ΑΛΓΕΒΡΑ

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Συγγραφική ομάδα:

Ανδρεαδάκης Στυλιανός • Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Κατσαργύρης Βασίλειος • Καθηγητής μαθηματικών Βαρβακείου Πειραμ. Λυκείου
Παπασταυρίδης Σταύρος • Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας
Πολύζος Γεώργιος • Καθηγητής μαθηματικών Β΄ Λυκείου Αμαρουσίου
Σβέρκος Ανδρέας • Καθηγητής μαθηματικών Β΄ Λυκείου Αγ. Παρασκευής

Α΄ ΕΚΔΟΣΗ: 1991

ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ: 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 2012

Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ, Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ, Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ, Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη της Άλγεβρας για τη Β΄ τάξη του Γενικού Λυκείου.

Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση της έκδοσης (2010) του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος. Από το βιβλίο αυτό αφαιρέθηκε το κεφάλαιο «Πρόοδοι» και προστέθηκαν δύο κεφάλαια: το κεφάλαιο «Συστήματα» και το κεφάλαιο «Ιδιότητες Συναρτήσεων», τα οποία προέρχονται από το βιβλίο ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010), του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούν οι Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος και Α. Σβέρκος. Επίσης το κεφάλαιο «Τριγωνομετρία» του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010), εμπλουτίστηκε με το κεφάλαιο «Τριγωνομετρία» του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ (2010).

Το περιεχόμενο του βιβλίου περιλαμβάνει σε γενικές γραμμές τα εξής:

Στο **1ο Κεφάλαιο** γίνεται μια επανάληψη των γραμμικών συστημάτων δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τα οποία οι μαθητές έχουν μελετήσει στο Γυμνάσιο, και εισάγεται η χρήση της ορίζουσας για την επίλυση και διερεύνηση τέτοιων συστημάτων. Επίσης, επιλύονται και γραμμικά συστήματα με τρεις αγνώστους καθώς και μη γραμμικά συστήματα.

Στο **2ο Κεφάλαιο** εξετάζονται ιδιότητες των συναρτήσεων και των γραφικών παραστάσεών τους, όπως η μονοτονία, τα ακρότατα και οι συμμετρίες μιας συνάρτησης, καθώς και η κατακόρυφη και οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Στο **3ο Κεφάλαιο** επεκτείνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί με την εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου και αποδεικνύονται στη γενικότητά τους οι τριγωνομετρικές ταυτότητες. Επίσης, ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, γίνεται η σύνδεση αυτών με φαινόμενα που εμφανίζουν περιοδικότητα και επιλύονται τριγωνομετρικές εξισώσεις. Τέλος χρησιμοποιούνται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών τριγώνου για τον υπολογισμό των στοιχείων του.

Στο **4ο Κεφάλαιο** τίθενται οι βάσεις για μια πιο συστηματική μελέτη των πολυωνύμων και αναπτύσσονται διάφορες μέθοδοι επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων και ανισώσεων.

Στο **5ο Κεφάλαιο** εισάγονται η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση, οι οποίες έχουν σημαντικές εφαρμογές σε διάφορα επιστημονικά πεδία.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}: Συστήματα

1.1 Γραμμικά Συστήματα 9
1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα 24

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}: Ιδιότητες Συναρτήσεων

2.1 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης 30
2.2 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης 40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}: Τριγωνομετρία

3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας 49
3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες 60
3.3 Αναγωγή στο 1^{Ο} Τεταρτημόριο 65
3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις 73
3.5 Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις 83
3.6 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών 89
3.7 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί της Γωνίας 2α 97
3.8 Μετασχηματισμοί Τριγωνομετρικών Παραστάσεων 103
3.9 Η Συνάρτηση f(x)=αημx+βσυνx 108
3.10 Επίλυση Τριγώνου 114

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο}: Πολυώνυμα-Πολυωνυμικές Εξισώσεις

4.1 Πολυώνυμα 128
4.2 Διαίρεση Πολυωνύμων 132
4.3 Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις 140
4.4 Εξισώσεις και Ανισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνυμικές 150

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}: Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

5.1 Εκθετική Συνάρτηση 160
5.2 Λογάριθμοι 173
5.3 Λογαριθμική Συνάρτηση 181

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 193
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 195

Κεφάλαιο 1ο
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η εξίσωση αx + βy = γ

Στο Γυμνάσιο διαπιστώσαμε με τη βοήθεια παραδειγμάτων ότι η εξίσωση

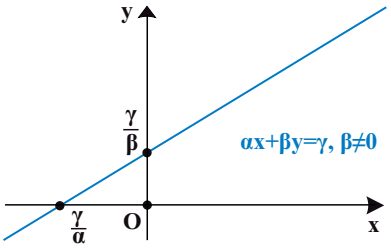
$$\alpha x + \beta y = \gamma, \text{ με } \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0,$$

που λέγεται **γραμμική εξίσωση**, παριστάνει ευθεία γραμμή. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το συμπέρασμα αυτό ως εξής:
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

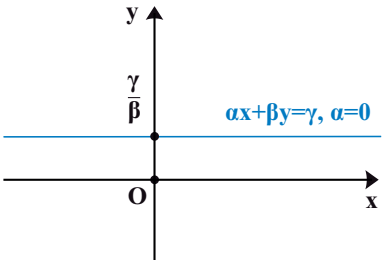
- Αν **β ≠ 0**, τότε η εξίσωση γράφεται:

$$\alpha x + \beta y = \gamma \Leftrightarrow \beta y = -\alpha x + \gamma$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta},$$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $\frac{\gamma}{\beta}$.



Σχήμα α΄

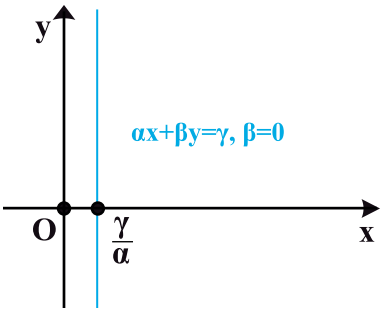


Σχήμα β΄

Ειδικότερα:

✓ Αν **α ≠ 0**, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες (Σχ. α΄), ενώ

✓ Αν **α = 0** , τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y = \frac{\gamma}{\beta}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x'x και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $\frac{\gamma}{\beta}$ (Σχ. β΄).



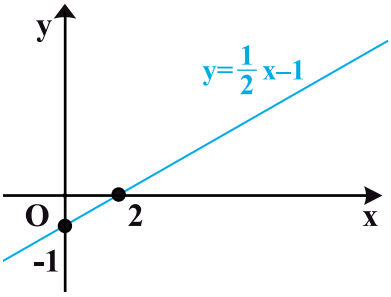
• Αν **β = 0** (οπότε $\alpha \neq 0$), τότε η εξίσωση γράφεται

$$\alpha x = \gamma \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

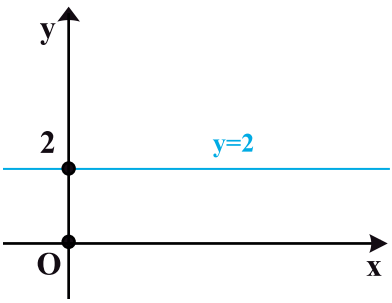
Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y'y και τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

Για παράδειγμα:

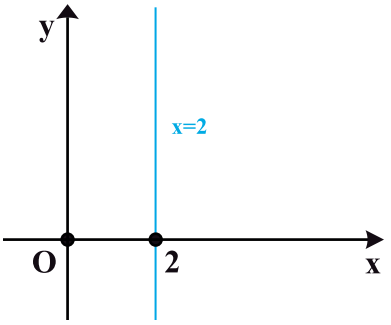
✓ Η εξίσωση $x - 2y = 2$ παίρνει τη μορφή $y = \frac{1}{2}x - 1$ η οποία παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{2}$ και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο -1.



✓ Η εξίσωση $y = 2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x'x και τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο 2 .



✓ Η εξίσωση $x = 2$ παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y'y και τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο 2.



Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση λέγεται **λύση της γραμμικής εξίσωσης**.

Για παράδειγμα, το ζεύγος (4, –1) είναι λύση της εξίσωσης $x-2y=6$, αφού $4-2(-1)=4+2=6$. Διαπιστώνουμε, όμως, ότι και τα ζεύγη (16,5), $(-10,-8)$ είναι λύσεις της εξίσωσης και γενικά ότι κάθε ζεύγος της μορφής $\left(k,\frac{1}{2}k-3\right)$, $k\in\mathbb{R}$ είναι λύση της εξίσωσης.

Γραμμικό σύστημα 2 x 2

Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις αx+βy=γ και α΄x+β΄y=γ΄ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα **γραμμικό σύστημα 2 x 2** και γράφουμε

$$\begin{cases}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{cases}$$

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος λέγεται **λύση του συστήματος**.

Στο Γυμνάσιο μάθαμε μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος γίνεται με κατάλληλη μετατροπή του σε άλλο γραμμικό σύστημα το οποίο έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το αρχικό. Τα δύο αυτά συστήματα λέγονται **ισοδύναμα συστήματα**.

Η μετατροπή ενός συστήματος σε ισοδύναμό του γίνεται συνήθως με έναν από τους εξής δύο τρόπους:

- Λύνουμε τη μια εξίσωση του συστήματος ως προς έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση.
- Αντικαθιστούμε μια από τις εξισώσεις (ε) ή (ε') του συστήματος, π.χ. την (ε), με την εξίσωση « $\lambda\cdot(\varepsilon)+\lambda'\cdot(\varepsilon')$ » που προκύπτει, αν στα μέλη της (ε) πολλαπλασιασμένα με $\lambda\neq 0$, προσθέσουμε τα μέλη της (ε') πολλαπλασιασμένα με λ'.

  Η εξίσωση $\lambda\cdot(\varepsilon)+\lambda'\cdot(\varepsilon')$ λέγεται **γραμμικός συνδυασμός** των εξισώσεων (ε) και (ε').

Η απόδειξη του ότι τα συστήματα που προκύπτουν από τις παραπάνω μετατροπές είναι ισοδύναμα στηρίζεται στις παρακάτω ιδιότητες της ισότητας που είδαμε στο 2ο κεφάλαιο του βιβλίου της Α΄ Λυκείου:

✓ Αν γ≠0, τότε: $\alpha=\beta\Leftrightarrow\alpha\gamma=\beta\gamma$

✓ Αν α=β και γ=δ , τότε α+γ = β+δ.

Έστω, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}x-2y=6 & (1)\\ 3x+4y=8 & (2)\end{cases}$$

Θα λύσουμε το σύστημα με τις δύο μεθόδους που μάθαμε στο Γυμνάσιο, τη μέθοδο της **αντικατάστασης** και τη μέθοδο των **αντιθέτων συντελεστών** (ή μέθοδο της απαλοιφής)

Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, π.χ. την (1) ως προς x. Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση το x με την παράσταση που βρήκαμε και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει

$$3(2y + 6) + 4y = 8 \Leftrightarrow 6y + 18 + 4y = 8$$
$$\Leftrightarrow 10y = -10$$
$$\Leftrightarrow y = -1$$

Έτσι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} x = 2y + 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του y στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο:

$$x = 2(-1) + 6 = 4$$

Άρα λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(4, -1)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή κάνουμε πολλά βήματα μέχρι να λύσουμε ένα σύστημα, είναι πολύ πιθανό να κάνουμε λάθος στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Για το λόγο αυτό είναι σκόπιμο να αντικαθιστούμε τις τιμές των αγνώστων που βρήκαμε στις αρχικές εξισώσεις του συστήματος και να ελέγχουμε αν τις επαληθεύουν, δηλαδή να κάνουμε **επαλήθευση του συστήματος**.

Στο συγκεκριμένο σύστημα, για $x = 4$ και $y = -1$, έχουμε:
1η εξίσωση: $4 - 2(-1) = 6$
2η εξίσωση: $3 \cdot 4 + 4(-1) = 12 - 4 = 8$

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών (ή της απαλοιφής)

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς, ώστε οι συντελεστές του ενός αγνώστου στις εξισώσεις που θα προκύψουν να είναι αντίθετοι:

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \cdot 1 \end{matrix} \text{ ή ισοδύναμα } \begin{cases} -3x+6y=-18 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις που βρήκαμε, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και επιλύουμε:

$$-3x+6y+3x+4y=-18+8 \Leftrightarrow 10y=-10 \Leftrightarrow y=-1 \ .$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μια από τις αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε την τιμή του άλλου:

$$x-2(-1)=6 \Leftrightarrow x+2=6 \Leftrightarrow x=4 \ .$$

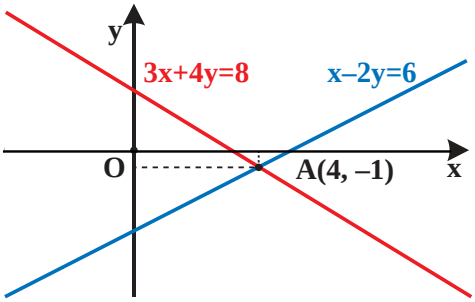
Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(4,-1)$ (η ίδια φυσικά που βρέθηκε και με την προηγούμενη μέθοδο).

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος 2 x 2

Κάθε εξίσωση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{cases} x-2y=6 \\ 3x+4y=8 \end{cases}$$

που λύσαμε προηγουμένως παριστάνει μια ευθεία γραμμή. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών προσδιορίζει τη λύση του συστήματος, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν συγχρόνως τις δύο εξισώσεις του συστήματος.



Γενικά, μπορούμε να επιλύσουμε γραφικά ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases}$$

με το να σχεδιάσουμε τις δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του και να βρούμε, εφόσον υπάρχει, το σημείο τομής τους.

Η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 δίνει λύσεις που μπορεί να είναι προσεγγιστικές. Παρά την αδυναμία αυτή, η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 διευκολύνει πάρα πολύ σε περιπτώσεις, όπου μας ενδιαφέρουν μόνο προσεγγιστικές λύσεις του συστήματος ή, ακόμη, όταν η αλγεβρική του επίλυση είναι δυσχερής.

Οι δύο εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 παριστάνουν δύο ευθείες οι οποίες μπορεί να τέμνονται ή να είναι παράλληλες ή ακόμα και να συμπίπτουν.

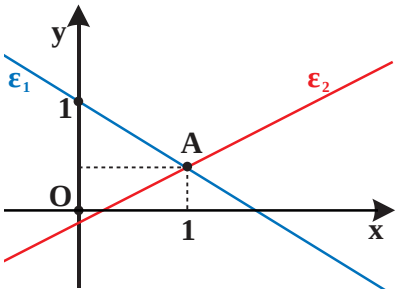
Για παράδειγμα:

✓ Το σύστημα $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 4x-9y=1 \end{cases}$ γράφεται $\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+1 \\ y=\frac{4}{9}x-\frac{1}{9} \end{cases}$ και <u>έχει μοναδική λύση</u>,

αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του τέμνονται, επειδή έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης.

Αν χαράξουμε τις ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις, βλέπουμε ότι προσεγγιστικά η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(1,\ 0{,}3)$.

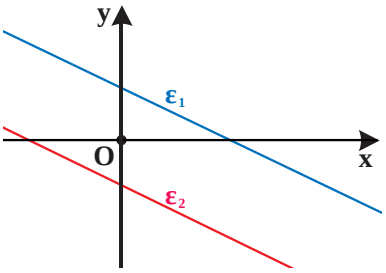
Αν όμως λύσουμε το σύστημα αλγεβρικά, θα βρούμε ότι η ακριβής λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(1,\frac{1}{3}\right)$.



✓ Το σύστημα $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=-5 \end{cases}$ γράφεται

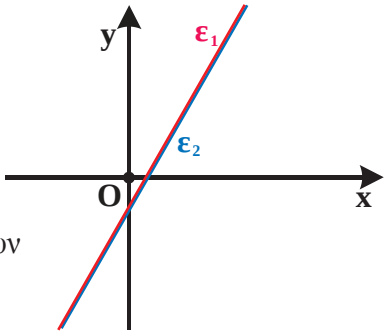
$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4} \end{cases}$, οπότε είναι <u>αδύνατο</u>,

αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του είναι παράλληλες.



✓ Το σύστημα $\begin{cases} y+1=2x \\ 4x-2y=2 \end{cases}$ γράφεται

$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$, οπότε <u>έχει άπειρο πλήθος λύσεων</u>, αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος συμπίπτουν.



Προφανώς κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής $(k, 2k-1),\ k \in \mathbb{R}$.

Γενικά, από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 αναμένουμε μια μόνο από τις περιπτώσεις:

✓ Το σύστημα να έχει μοναδική λύση

✓ Το σύστημα να είναι αδύνατο

✓ Το σύστημα να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Λύση – διερεύνηση γραμμικού συστήματος 2 x 2

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 στη γενική του μορφή.

Έστω λοιπόν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση που είναι $\beta \neq 0$ και $\beta' \neq 0$. Τότε το σύστημα γράφεται:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\alpha}{\beta} x + \dfrac{\gamma}{\beta} & (\varepsilon_1) \\ y = -\dfrac{\alpha'}{\beta'} x + \dfrac{\gamma'}{\beta'} & (\varepsilon_2) \end{cases}$$

και οι εξισώσεις του παριστάνουν ευθείες ε_1 και ε_2 με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $\lambda_2 = -\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

- Αν $-\dfrac{\alpha}{\beta} \neq -\dfrac{\alpha'}{\beta'}$, δηλαδή αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης, οπότε τέμνονται σε ένα σημείο του οποίου η τετμημένη προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης

$$-\frac{\alpha'}{\beta'} x + \frac{\gamma'}{\beta'} = -\frac{\alpha}{\beta} x + \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha'}{\beta'} \right) x = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\gamma'}{\beta'}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha\beta' - \alpha'\beta) x = \gamma\beta' - \gamma'\beta$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

Η τεταγμένη του σημείου τομής είναι:

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \right) + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{-\alpha\gamma\beta' + \alpha\beta\gamma' + \gamma\alpha\beta' - \gamma\alpha'\beta}{\beta(\alpha\beta' - \alpha'\beta)}$$

$$= \frac{\beta(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)}{\beta(\alpha\beta' - \alpha'\beta)}$$

Επομένως $y = \dfrac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$

Άρα, στην περίπτωση αυτή, το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x, y) = \left(\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \right)$$

• Αν $-\dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{\alpha'}{\beta'}$, δηλαδή αν αβ΄– α΄β =0 , τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, οπότε ή είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις αντιστοίχως. Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε και στην περίπτωση που είναι β=0 ή β' =0.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα για το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Έχουμε:

• Αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x, y) = \left(\frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}, \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \right)$$

• Αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο.

Συνήθως η παράσταση $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, συμβολίζεται με

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

και λέγεται **ορίζουσα του συστήματος**

Δηλαδή:
$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta \cdot$$

Την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αν στη θέση των συντελεστών του x θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με:

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta \ .$$

Ομοίως, την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αν στη θέση των συντελεστών του y θέσουμε τους σταθερούς όρους, συμβολίζουμε με:

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \, .$$

Τα προηγούμενα συμπεράσματα τα οποία αφορούν στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος συνοψίζονται, με τη βοήθεια των οριζουσών, ως εξής:

Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

- Αν $D \neq 0$, έχει μοναδική λύση, τη (x,y) με $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$
- Αν $D = 0$, είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Για παράδειγμα:

✓ Το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$ έχει

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3(-2) = 4 + 6 = 10 \neq 0,$$

οπότε έχει μοναδική λύση. Επειδή

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 16 = 40 \quad \text{και} \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$$

έχουμε:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{40}{10} = 4 \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{10} = -1 .$$

Άρα, η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (4, -1)$.

✓ Το σύστημα $\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases}$ έχει

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6) - 4(-3) = -12 + 12 = 0$$

και επομένως το σύστημα αναμένεται ή να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της δεύτερης εξίσωσης με το 2, τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases},$$

δηλαδή έχει μόνο μία εξίσωση τη $2x - 3y = 40$. Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις του συστήματος είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$2x - 3y = 40 \Leftrightarrow y = \frac{2x - 40}{3} .$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων τα ζεύγη της μορφής

$$\left(k, \frac{2k-40}{3}\right), \quad k \in \mathbb{R}$$

✓ Το σύστημα $\begin{cases} 3x+y=11 \\ 9x+3y=6 \end{cases}$ έχει

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 9-9 = 0$$

και επομένως το σύστημα αναμένεται ή να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Το σύστημα αυτό γράφεται

$$\begin{cases} 3x+y=11 \\ 3x+y=2 \end{cases}$$

που είναι προφανώς αδύνατο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1η Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2y = \lambda \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές και οι σταθεροί όροι του συστήματος δεν είναι όλοι συγκεκριμένοι αριθμοί, αλλά εξαρτώνται από το λ. Πρέπει επομένως για τις διάφορες τιμές του λ, να εξετάσουμε πότε προκύπτει σύστημα που έχει μοναδική λύση την οποία και να βρούμε ή πότε προκύπτει σύστημα αδύνατο ή σύστημα με άπειρες λύσεις. Όπως και στις εξισώσεις, ο λ λέγεται **παράμετρος** και η εργασία αυτή λέγεται **διερεύνηση**.

Έχοντας υπόψη τον παραπάνω πίνακα, ακολουθούμε την εξής πορεία.

• Υπολογίζουμε τις ορίζουσες D, D_x, D_y. Έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda - 1) + \lambda = 2 - \lambda$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^2(\lambda - 1) = \lambda^2(1 - \lambda + 1) = \lambda^2(2 - \lambda)$$

• Βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου, για τις οποίες είναι $D = 0$. Έχουμε:

$$D = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = 2$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

✓ Αν $D \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y), με:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2-\lambda}{\lambda(\lambda-2)} = \frac{-(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2)} = -\frac{1}{\lambda} \quad \text{και}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda^2(2-\lambda)}{\lambda(\lambda-2)} = \frac{-\lambda^2(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-2)} = -\lambda \ .$$

Δηλαδή, για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$, η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(-\frac{1}{\lambda}, -\lambda\right)$.

✓ Αν $D = 0$, δηλαδή αν $\lambda = 0$ ή $\lambda = 2$, τότε το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. Συγκεκριμένα:

• Αν $\lambda = 0$, τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 0x - y = -1 \\ 0x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

και άρα είναι αδύνατο.

• Αν $\lambda = 2$, τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

και άρα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Επειδή,

$$2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1 \ ,$$

Οι λύσεις του συστήματος είναι όλα τα ζεύγη της μορφής

$$(k, 2k-1), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Γραμμικό Σύστημα 3 x 3

Μία εξίσωση της μορφής αx+βy+γz=δ, με έναν τουλάχιστον από τους συντελεστές α, β, γ διάφορο του μηδενός, λέγεται **γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους.**

Λύση μιας γραμμικής εξίσωσης με τρεις αγνώστους λέγεται κάθε τριάδα αριθμών που την επαληθεύει.

Για παράδειγμα η εξίσωση 2x+3y+z=6 είναι μια γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους και η τριάδα $(2, -1, 5)$ είναι μια λύση της εξίσωσης, αφού 2·2+3(–1)+5=6.

Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \ , \ \ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \ \ \text{και} \ \ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3$$

και ζητάμε τις κοινές λύσεις τους, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους** ή, πιο σύντομα, ένα **γραμμικό σύστημα 3 x 3** και γράφουμε

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3 \end{cases}$$

Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε μεθόδους ανάλογες με τις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 .

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -9 & (1) \\ x + 3y - z = 10 & (2) \\ 3x + y - z = 8 & (3) \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης. Λύνουμε τη μία από τις τρεις εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, π.χ. την (3) ως προς z, και αντικαθιστούμε στις άλλες δύο. Έτσι έχουμε:

$$3x + y - z = 8 \Leftrightarrow z = 3x + y - 8 \qquad (4)$$

οπότε οι εξισώσεις (1) και (2) γράφονται:

✓ $2x - y + 3z = -9 \Leftrightarrow 2x - y + 3(3x + y - 8) = -9 \Leftrightarrow 11x + 2y = 15$ (5)

✓ $x + 3y - z = 10 \Leftrightarrow x + 3y - (3x + y - 8) = 10 \Leftrightarrow -x + y = 1$ (6)

Οι (5), (6) ορίζουν το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} 11x + 2y = 15 \\ -x + y = 1 \end{cases},$$

από την επίλυση του οποίου βρίσκουμε ότι x=1 και y=2 .

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές των x και y στην (4) και βρίσκουμε $z = -3$.

Άρα η λύση του αρχικού συστήματος είναι η τριάδα $(1, 2, -3)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 3 x 3, όπως είδαμε παραπάνω, ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2, προκύπτει ότι και ένα γραμμικό σύστημα 3 x 3 ή έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$

i) αλγεβρικά **ii)** γραφικά.

2. Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} \frac{x}{7}=\frac{y}{8} \\ x+y=45 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4} \\ 4x+3y=8 \end{cases}$

3. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} \frac{x-5}{2}+\frac{2y+1}{7}+2=0 \\ \frac{x+6}{3}-\frac{y-6}{2}=8 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} \frac{2x-1}{3}=4-\frac{y+2}{4} \\ \frac{x+3}{2}-3=\frac{x-y}{3} \end{cases}$

4. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x-3y=3 \\ \frac{x}{3}-y=-2 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2y=x+2 \\ \frac{1}{2}x-y+1=0 \end{cases}$

5. Να λύσετε τα συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών:

i) $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-5y=4 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2y=3x-8 \\ x+3y+1=0 \end{cases}$

6. Να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων, χωρίς να τα λύσετε.

i) $\begin{cases} 2x-5y=4 \\ 6x+7y=100 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2x-3y=40 \\ 4x-6y=80 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} 3x+y=11 \\ -9x-3y=2 \end{cases}$

7. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x+2y=-2 \\ x+(\sqrt{3}+1)y=-1-\sqrt{3} \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} (\sqrt{3}+1)x+4y=7 \\ \frac{1}{2}x+(\sqrt{3}-1)y=1 \end{cases}$

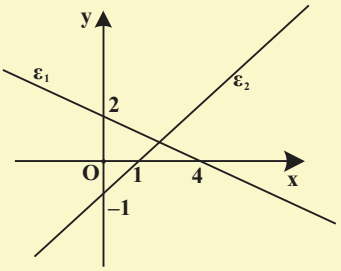
8. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} 3x-2y-\omega=11 \\ 2x-5y-2\omega=3 \\ 5x+y-2\omega=33 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 5x-y+3\omega=4 \\ x-3y+\omega=2 \\ 3x-2y+2\omega=2 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}-2\omega=3 \\ \dfrac{3x}{2}+y+\omega=5 \\ 5x+3y-2\omega=16 \end{cases}$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 του διπλανού σχήματος.

ii) Ποιο σύστημα ορίζουν οι ε_1 και ε_2 και ποια είναι η λύση του συστήματος;



2. Ένα ξενοδοχείο έχει 26 δωμάτια, άλλα δίκλινα και άλλα τρίκλινα και συνολικά 68 κρεβάτια. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

3. Σε έναν αγώνα το παιδικό εισιτήριο κοστίζει 1,5 € και το εισιτήριο ενός ενήλικα 4€. Τον αγώνα παρακολούθησαν 2200 άτομα και εισπράχτηκαν 5050 €. Να βρείτε πόσα ήταν τα παιδιά και πόσοι οι ενήλικες που παρακολούθησαν τον αγώνα.

4. Η αντίσταση R ενός σύρματος ως συνάρτηση της θερμοκρασίας T μπορεί να βρεθεί με τον τύπο $R=\alpha T+\beta$. Αν στους $20^{\circ}C$ η αντίσταση ήταν 0,4 Ω και στους $80^{\circ}C$ η αντίσταση ήταν 0,5 Ω , να βρείτε τα α και β .

5. Ένας χημικός έχει δύο διαλύματα υδροχλωρικού οξέως, το πρώτο έχει περιεκτικότητα 50% σε υδροχλωρικό οξύ και το δεύτερο έχει περιεκτικότητα 80% σε υδροχλωρικό οξύ. Ποια ποσότητα από κάθε διάλυμα πρέπει να αναμείξει ώστε να πάρει 100 ml διάλυμα περιεκτικότητας 68% σε υδροχλωρικό οξύ;

6. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x+4y=3$ και $\varepsilon_2: x+2y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ε_1 και ε_2 .

ii) Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου α για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται;

iii) Για ποιες τιμές της παραμέτρου α οι ευθείες είναι παράλληλες;

7. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα κοινά σημεία των ευθειών:

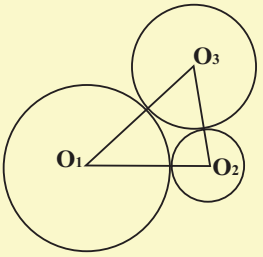
i) $\varepsilon_1 : \alpha x + y = \alpha^2$ και $\varepsilon_2 : x + \alpha y = 1$.

ii) $\varepsilon_3 : \alpha x - y = \alpha$ και $\varepsilon_4 : x + \alpha y = 1$.

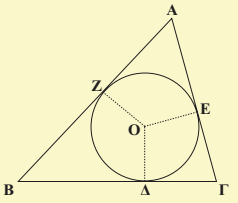
8. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} (\lambda-1)x - 2y = 1 \\ 4x - (\lambda+1)y = -2 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ **ii)** $\begin{cases} (\mu-2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu+2)y = 5 \end{cases}$, $\mu \in \mathbb{R}$

9. Οι κύκλοι του διπλανού σχήματος εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο και ισχύει $O_1O_2 = 6$, $O_1O_3 = 5$ και $O_2O_3 = 7$. Να υπολογίσετε τις ακτίνες των τριών κύκλων.

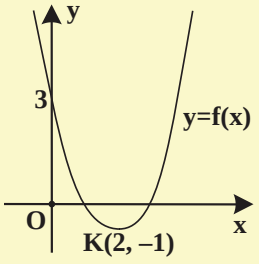


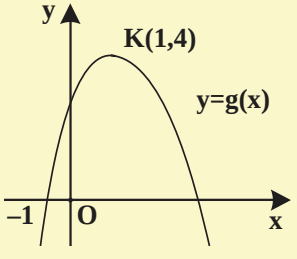
10. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τον εγγεγραμμένο του κύκλο που εφάπτεται των πλευρών στα σημεία Δ, Ε και Ζ. Να υπολογίσετε τα τμήματα $AZ = x$, $B\Delta = y$ και $\Gamma E = z$, συναρτήσει των πλευρών α, β και γ.

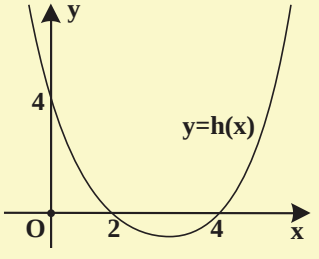


11. Ένας χημικός έχει τρία διαλύματα από το ίδιο οξύ. Το πρώτο περιέχει 50% οξύ, το δεύτερο 10% οξύ και το τρίτο 30% οξύ. Ο χημικός θέλει να παρασκευάσει 52 lit διάλυμα περιεκτικότητας 32% σε οξύ, χρησιμοποιώντας και τα τρία διαλύματα και μάλιστα η ποσότητα του πρώτου διαλύματος να είναι διπλάσια από την ποσότητα του τρίτου διαλύματος. Να βρείτε πόσα λίτρα από κάθε διάλυμα θα χρησιμοποιήσει.

12. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών τριωνύμων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Να βρείτε τα τριώνυμα αυτά.







1.2 ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Η επίλυση πολλών προβλημάτων οδηγεί συχνά σε ένα σύνολο εξισώσεων των οποίων ζητάμε τις κοινές λύσεις, αλλά οι εξισώσεις αυτές δεν είναι όλες γραμμικές.
Για παράδειγμα, έστω ότι ζητάμε δυο αριθμούς με άθροισμα 13 και άθροισμα τετραγώνων 89.

Αν x, y είναι οι δύο αριθμοί , τότε πρέπει $x+y=13$ και $x^2+y^2=89$. Επειδή ζητάμε και κοινές λύσεις των δύο εξισώσεων, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y=13 & (1) \\ x^2+y^2=89 & (2) \end{cases}$$

Για τη λύση του συστήματος εργαζόμαστε ως εξής:
Επιλύουμε την (1), ως προς έναν άγνωστο, π.χ. ως προς *x* , και αντικαθιστούμε στη (2).
Έχουμε

$$x+y=13 \Leftrightarrow y=13-x \qquad (3).$$

Επομένως

$$x^2+(13-x)^2=89 \Leftrightarrow x^2+169-26x+x^2=89$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-26x+80=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-13x+40=0.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα Δ= 9 . Επομένως:

$$x=\frac{13\pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow 8 \\ \searrow 5 \end{array}$$

Από την (3), για x=8 έχουμε *y*=5 , ενώ για *x*=5 έχουμε *y*=8. Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις τις (8, 5) και (5, 8).
Η απάντηση βέβαια στο πρόβλημα είναι ότι οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 5 και 8.
Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, διάφορες περιπτώσεις επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ xy=6 & (2). \end{cases}$

ΛΥΣΗ

α΄ τρόπος

Επιλύουμε την (1) ως προς x και αντικαθιστούμε στη (2). Έχουμε:

$$x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x \qquad (3).$$

Επομένως

$$\begin{aligned} xy = 6 &\Leftrightarrow x(5 - x) = 6 \\ &\Leftrightarrow 5x - x^2 = 6 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \ \text{ή} \ x = 3. \end{aligned}$$

Από την (3) για x=2 έχουμε y=3 , ενώ για x=3 έχουμε y=2 . Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις τις (2, 3) και (3, 2) .

β΄ τρόπος

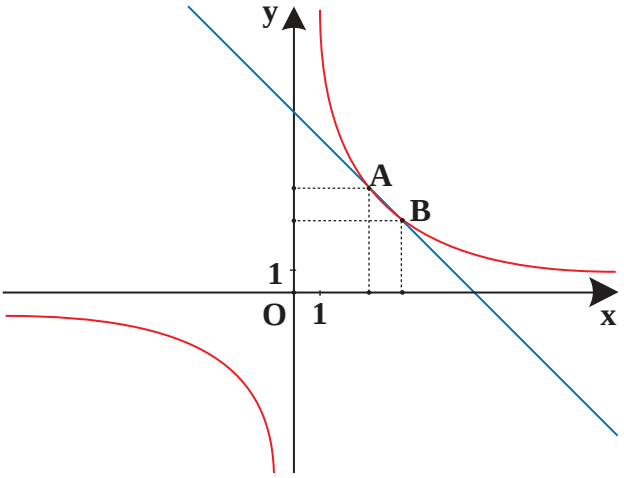
Εξετάζοντας το σύστημα βλέπουμε ότι αναζητούμε δύο αριθμούς για τους οποίους γνωρίζουμε ότι έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 6. Επομένως, από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\omega^2 - 5\omega + 6 = 0 \ .$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι οι 2 και 3 οπότε οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (2,3) και (3,2).

ΣΧΟΛΙΟ

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος x+y=5 παριστάνει ευθεία, ενώ η δεύτερη εξίσωση xy = 6 παριστάνει την υπερβολή $y = \frac{6}{x}$. Επομένως οι συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της υπερβολής θα μας δώσουν τις λύσεις του συστήματος.



Τα σημεία τομής είναι τα Α(2,3) και Β(3,2) . Άρα το σύστημα έχει δύο λύσεις τις (2,3) και (3,2) .

2ο Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} xy = 6 & (1) \\ x^2 + y^2 = 13 & (2) \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Λύνουμε την (1) ως προς x και αντικαθιστούμε στη (2). Έχουμε

$$xy = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{x}$$

οπότε η (2) γίνεται:

$$x^2 + y^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{36}{x^2} = 13$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 36 = 13x^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι διτετράγωνη. Αν θέσουμε $x^2 = \omega$, τότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 13\omega + 36 = 0$, της οποίας οι λύσεις είναι η ω=9 και η ω=4 .

✓ Για ω=9 έχουμε

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -3$$

Από την (1) για x=3 παίρνουμε y=2 και για $x = -3$ παίρνουμε $y = -2$.

✓ Για $\omega = 4$ έχουμε

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \ \text{ή} \ x = -2 .$$

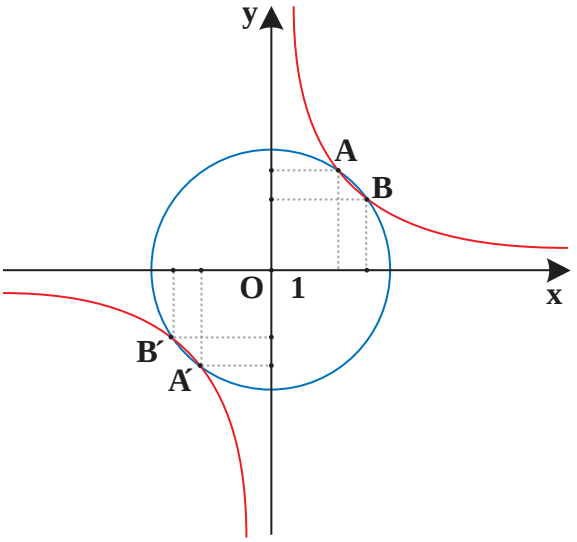
Από την (1) για x=2 παίρνουμε y=3 και για $x = -2$ παίρνουμε $y = -3$.

Άρα το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις τις (3,2), (−3,−2), (2,3) και (−2,−3).

ΣΧΟΛΙΟ

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος $xy = 6$ παριστάνει την υπερβολή $y = \frac{6}{x}$, ενώ η δεύτερη εξίσωση $x^2 + y^2 = 13$ παριστάνει κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα $\rho = \sqrt{13}$.

Επομένως οι συντεταγμένες των σημείων τομής της υπερβολής και του κύκλου θα μας δώσουν τις λύσεις του συστήματος.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ x+y=1 \end{cases}$.

2. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} y=3x^2 \\ 12x-3y=4 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x-y=0 \end{cases}$ **iii)** $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$

και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα.

3. Από τους τύπους $S=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$ και $\upsilon=\upsilon_0+\alpha t$, να δείξετε ότι $S=\frac{\upsilon+\upsilon_0}{2}\cdot t$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2=2y+10 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

2. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

3. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι $120cm^2$. Αν η μία διάσταση του ορθογωνίου αυξηθεί κατά $3cm$, ενώ η άλλη ελαττωθεί κατά $2cm$, τότε το εμβαδόν του δεν μεταβάλλεται. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

4. Δίνεται η παραβολή $y = -x^2$ και η ευθεία $y = 2x + k$, $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του k η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.

5. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2y = x^2 \\ y = x + \mu \end{cases}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα συστήματα:

$(\Sigma_1): \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$, $(\Sigma_2): \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$, $(\Sigma_3): \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$, $(\Sigma_4): \begin{cases} x - y = 1 \\ x + \alpha^2 y = 1 \end{cases}$

με εκείνη από τις απαντήσεις Α, Β, Γ που νομίζετε ότι είναι η σωστή.

Α) Έχει μοναδική λύση, **Β)** Είναι αδύνατο, **Γ)** Έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(Σ_1)	(Σ_2)	(Σ_3)	(Σ_4)

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Α Ψ

2. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα είναι $D = 0$, τότε το σύστημα είναι κατ' ανάγκη αδύνατο. Α Ψ

3. Το σύστημα $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ είναι αδύνατο. Α Ψ

4. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ και η παραβολή $y = x^2 + 1$ δεν έχουν κοινά σημεία. Α Ψ

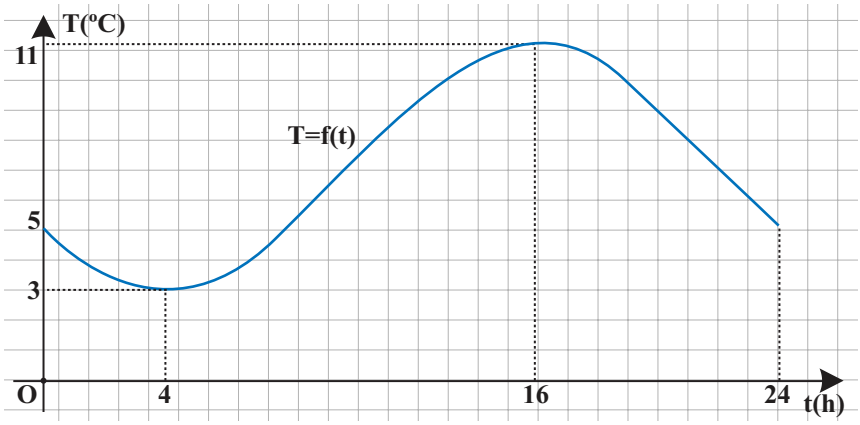
Κεφάλαιο 2ο
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Σε προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε την έννοια της συνάρτησης και μελετήσαμε ορισμένες βασικές συναρτήσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε στη γενική τους μορφή ιδιότητες των συναρτήσεων και των γραφικών τους παραστάσεων.

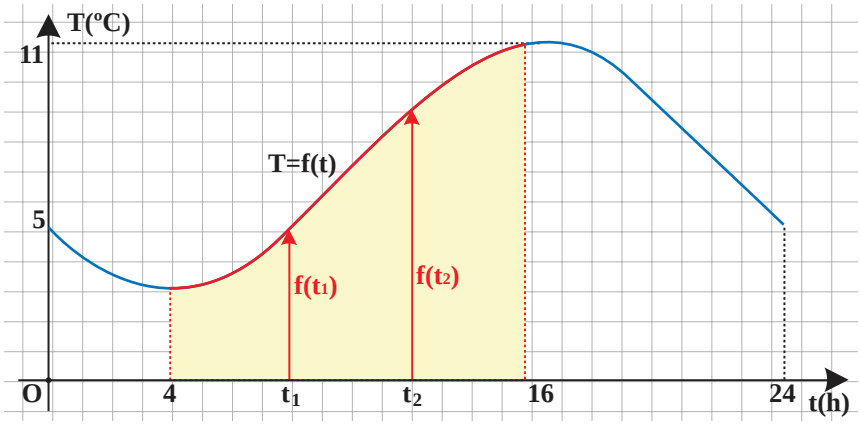
2.1 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μονοτονία συνάρτησης

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης T = f (t) που εκφράζει τη θερμοκρασία T ενός τόπου συναρτήσει του χρόνου t κατά το χρονικό διάστημα από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας (t =0) μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας (t =24).



α) Παρατηρούμε ότι στο διάστημα [4,16] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας ανέρχεται.



Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία αυξάνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [4,16]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) < f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση T = f (t) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [4,16] . Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \uparrow \Delta$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

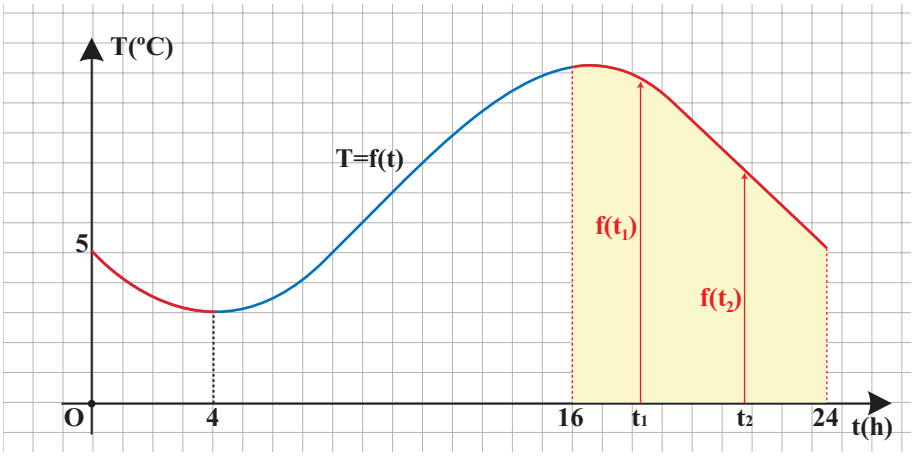
Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \\ &\Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Γενικά:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Στο ίδιο σχήμα, παρατηρούμε επιπλέον ότι στο διάστημα [16,24] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας κατέρχεται.



Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία μειώνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [16,24]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) > f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση T = f (t) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [16,24]. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \downarrow \Delta$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -2x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \\ &\Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

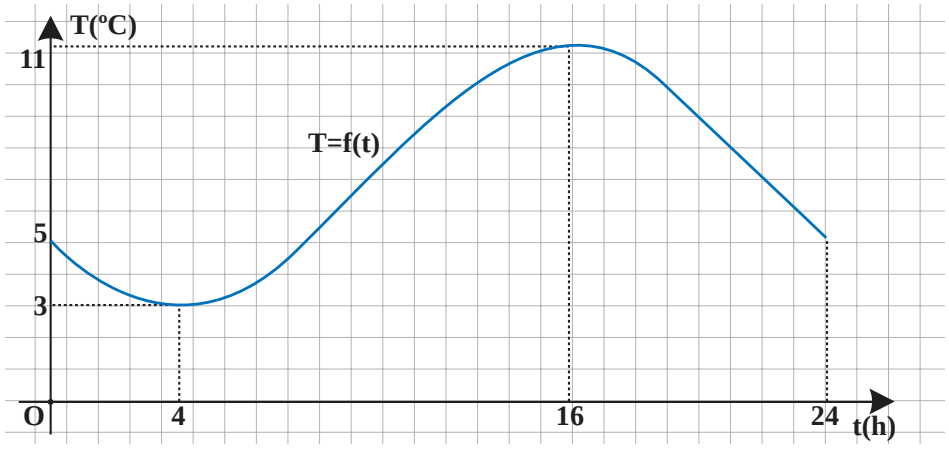
Γενικά:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ.

Ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε και πάλι τη γραφική παράσταση της συνάρτησης T = f (t).



Παρατηρούμε ότι:

α) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 4$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει την ελάχιστη τιμή της, που είναι η $f(4) = 3$ βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$$f(t) \geq f(4) = 3 \text{ , για κάθε } t \in [0,24]$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 4$ ελάχιστο, το $f(4) = 3$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν:

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ , για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με **min f (x) .**

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 + 1$. Επειδή

$$x^4 \geq 0 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

θα είναι

$$3x^4 \geq 0 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε θα έχουμε

$$3x^4 + 1 \geq 1 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως:

$$f(x) \geq f(0) \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$

β) Τη χρονική στιγμή $t_2 = 16$ η θερμοκρασία του τόπου παίρνει τη μέγιστη τιμή της, που είναι η T(16)=11 βαθμοί Κελσίου. Δηλαδή ισχύει:

$$f(t) \leq f(16) = 11 \text{ , για κάθε } t \in [0,24]$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ παρουσιάζει στο $t = 16$ μέγιστο, το f (16)=11. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** όταν:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A$$

Το $x_0 \in A$ λέγεται **θέση μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της f και το συμβολίζουμε με **max f (x)** .
Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = -3x^4 + 1$. Επειδή

$$x^4 \geq 0 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

θα είναι

$$-3x^4 \leq 0 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

οπότε θα έχουμε

$$-3x^4 + 1 \leq 1 \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

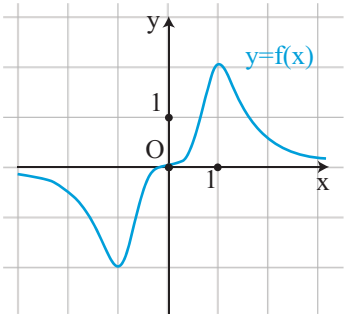
Επομένως:

$$f(x) \leq f(0) \text{ , για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

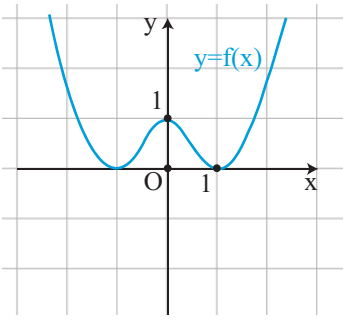
Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$.
Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

ΣΧΟΛΙΟ

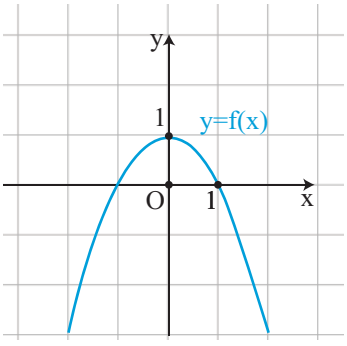
Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει και μέγιστο και ελάχιστο (Σχ. α) ή μόνο ελάχιστο (Σχ. β΄) ή μόνο μέγιστο (Σχ. γ΄) ή να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο (Σχ. δ΄).



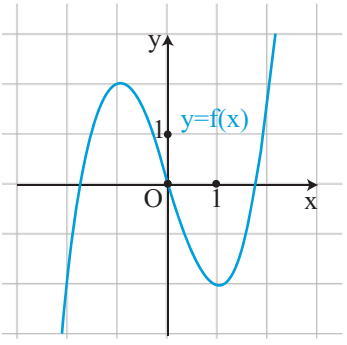
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



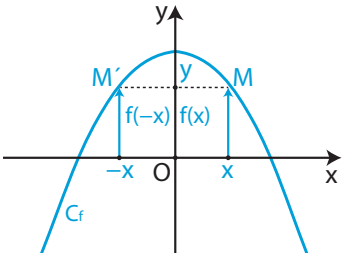
Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

Άρτια συνάρτηση

α) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς τον άξονα y'y ανήκει στη C_f.



Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου M(x, y) της C_f ως προς τον άξονα y'y είναι το σημείο $M'(-x, y)$ και επειδή τα σημεία M(x, y) και $M'(-x, y)$ ανήκουν στη C_f, θα ισχύει y = f (x) και y = f (–x), οπότε θα έχουμε:

$$f(-x) = f(x)$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **άρτια**. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y.

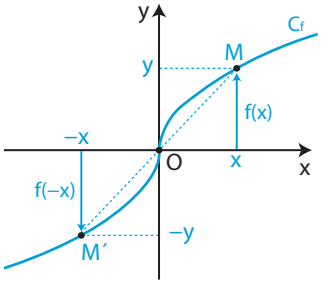
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ είναι άρτια συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 1 = 2x^4 - x^2 + 1 = f(x)$$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y.

Περιττή συνάρτηση

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.
Παρατηρούμε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει στη C_f.



Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου M(x, y) της C_f ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $M'(-x,-y)$ και επειδή τα σημεία M(x, y) και $M'(-x,-y)$ ανήκουν στη C_f, θα ισχύει $y = f(x)$ και $-y = f(-x)$, οπότε θα έχουμε:

$$f(-x) = -f(x)$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **περιττή**. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή,** όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x$ είναι περιττή συνάρτηση, διότι έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -f(x)$$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Ο όρος "άρτια" προέκυψε αρχικά από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ κτλ., που έχουν άρτιο εκθέτη, έχουν άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, είναι δηλαδή άρτιες συναρτήσεις, ενώ ο όρος "περιττή" προέρχεται από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ κτλ., που έχουν περιττό εκθέτη, έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, είναι δηλαδή περιττές συναρτήσεις.

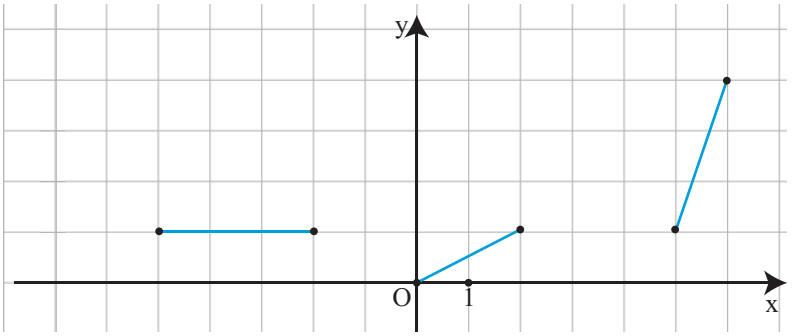
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας <u>άρτιας</u> συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα [–6,6]. Να χαραχθούν και τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής:

α) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f :

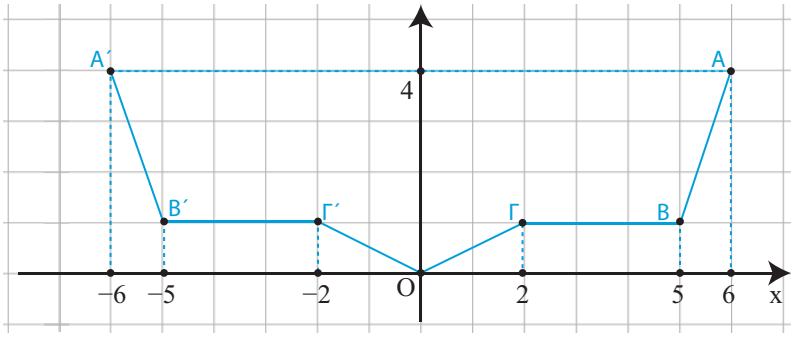
i) είναι γνησίως αύξουσα,
ii) είναι γνησίως φθίνουσα,
iii) είναι σταθερή.

β) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f , καθώς επίσης οι θέσεις των ακροτάτων αυτών.



ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια, η γραφική της παράσταση θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y . Επομένως, αν πάρουμε τα συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y των δοθέντων τμημάτων της γραφικής παράστασης της f, θα έχουμε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της f, που είναι η πολυγωνική γραμμή Α΄Β΄Γ΄ΟΓΒΑ (Σχήμα).



Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτει ότι:

α) Η συνάρτηση f :

i) είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα [0,2] και [5,6],

ii) είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-2,0]$ και $[-6,-5]$, τα οποία είναι συμμετρικά ως προς το Ο των διαστημάτων [0,2] και [5,6] αντιστοίχως στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $[-5,-2]$ και [2,5] τα οποία είναι συμμετρικά μεταξύ τους ως προς το Ο.

β) Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -6 και 6. Δηλαδή ισχύει:

$$\max f(x) = f(-6) = f(6) = 4$$

Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 0 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει την τιμή 0. Δηλαδή ισχύει:

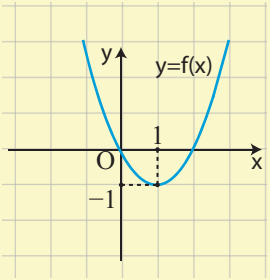
$$\min f(x) = f(0) = 0.$$

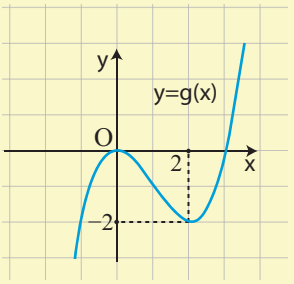
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

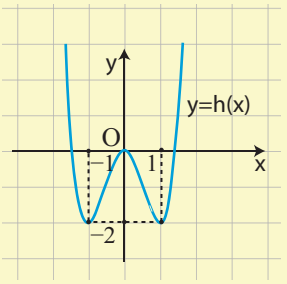
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι:

α) γνησίως αύξουσα και β) γνησίως φθίνουσα.







2) Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των συναρτήσεων της προηγούμενης άσκησης, καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

3) Να δείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για x=3.

ii) Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει μέγιστο για x=1.

4) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

i) $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$ ii) $f_2(x) = 3|x| + 1$ iii) $f_3(x) = |x+1|$

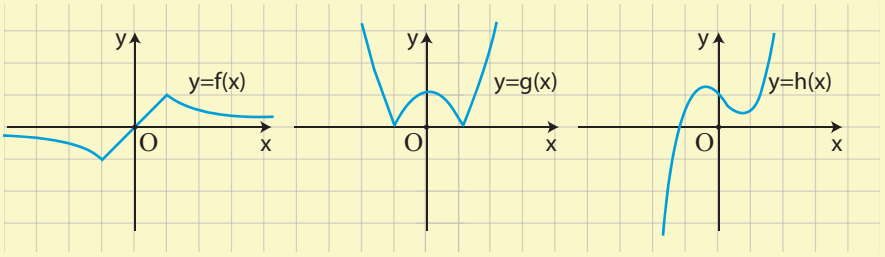
iv) $f_4(x) = x^3 - 3x^5$ v) $f_5(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ vi) $f_6(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

5) Ομοίως για τις συναρτήσεις:

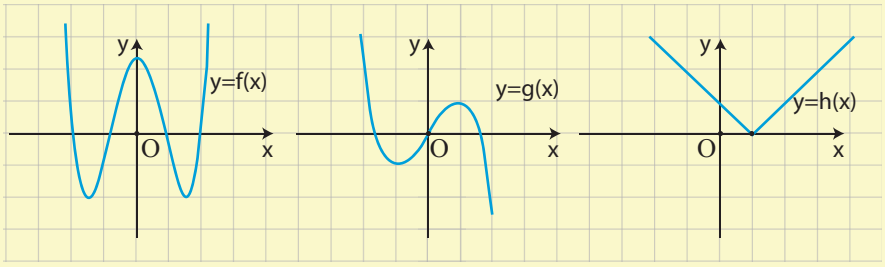
i) $f_1(x)=\dfrac{1}{|x|}$ ii) $f_2(x)=\sqrt{x-2}$ iii) $f_3(x)=|x-1|-|x+1|$

iv) $f_4(x)=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x^2+1}$ v) $f_5(x)=\sqrt{|x|}$ vi) $f_6(x)=\sqrt{1-x^2}$.

6) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.

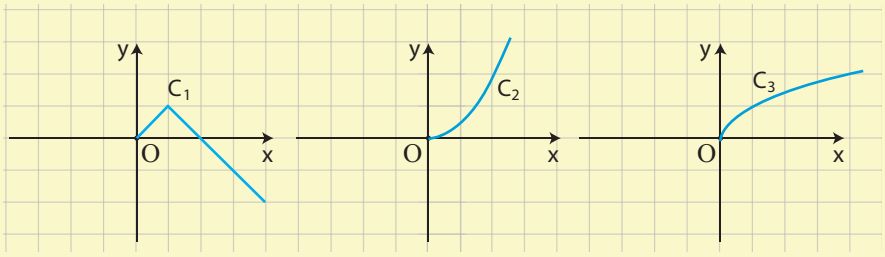


7) Ομοίως για τις παρακάτω γραμμές



8) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις

α) Άρτιας συνάρτησης και β) Περιττής συνάρτησης.



2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης

α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|+1$. Επειδή

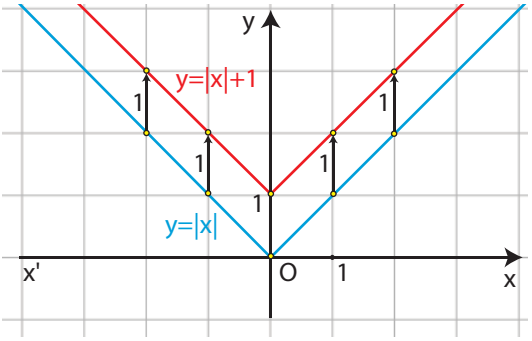
$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{αν} \quad x<0\\ x+1, & \text{αν} \quad x\geq 0\end{cases},$$

η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x|+1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x+1$, με $x\leq 0$ και

✓ $y=x+1$, με $x\geq 0$,

που έχουν αρχή το σημείο 1 του άξονα y'y και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών



$x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες, όπως είναι γνωστό, αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).

Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ κατακόρυφα[(1)] και προς τα πάνω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x)=|x|+1$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει:

$$f(x)=\varphi(x)+1 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

που σημαίνει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $f(x)$ είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερο του $\varphi(x)$.

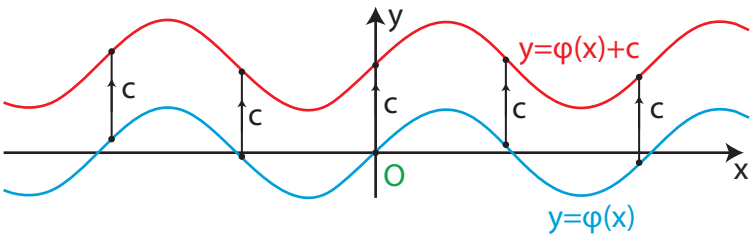
Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

$$f(x)=\varphi(x)+c \text{ , όπου } c>0 \text{ ,}$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω** (Σχήμα α΄)

(1) Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα y'y .



Σχήμα α΄

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|-1$. Επειδή

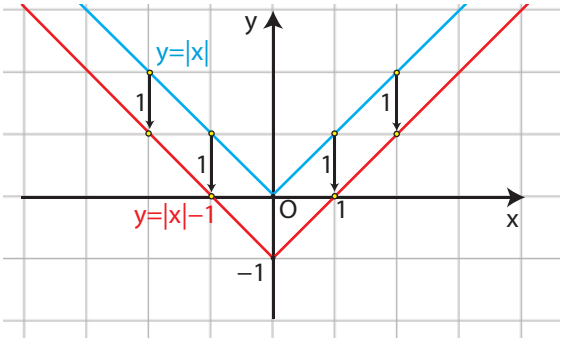
$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{αν} \quad x<0\\ x-1, & \text{αν} \quad x\geq 0\end{cases},$$

η γραφική παράσταση της $f(x)=|x|-1$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x-1$, με $x\leq 0$ και

✓ $y=x-1$, με $x\geq 0$,

που έχουν αρχή το σημείο -1 του άξονα y'y και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ κατακόρυφα και προς τα κάτω κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x)=|x|-1$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει:

$$f(x)=\varphi(x)-1\text{, για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

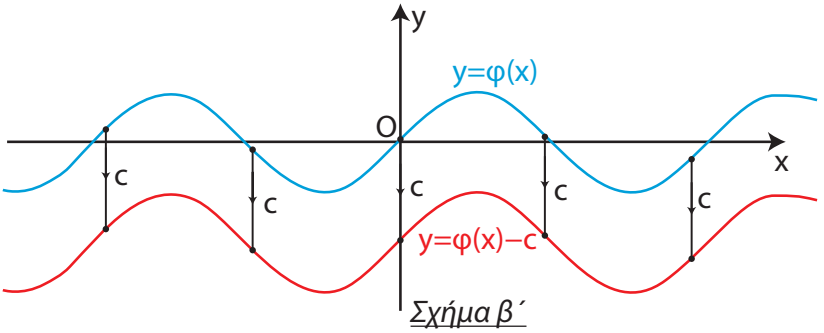
που σημαίνει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το $f(x)$ είναι κατά 1 μονάδα μικρότερο του $\varphi(x)$.

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:

$$f(x)=\varphi(x)-c\text{, όπου } c>0,$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα κάτω** (Σχήμα β΄)



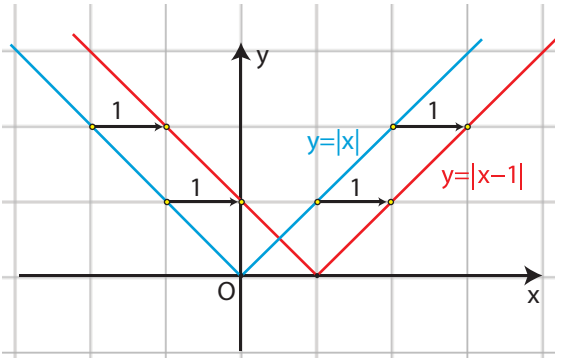
Σχήμα β΄

Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

α) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x-1|$. Επειδή

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{αν} \quad x<1\\ x-1, & \text{αν} \quad x\geq 1\end{cases},$$

η γραφική παράσταση της $f(x)=|x-1|$, θα αποτελείται από τις ημιευθείες



- ✓ $y=-x+1$, με $x\leq 1$ και
- ✓ $y=x-1$, με $x\geq 1$,

που έχουν αρχή το σημείο 1 του άξονα x'x και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).

Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ οριζόντια[(2)] και προς τα δεξιά κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της $f(x)=|x-1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει

$$f(x)=\varphi(x-1), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x)=|x-1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x)=|x|$ στη θέση x – 1.

(2) Δηλαδή παράλληλα με τον άξονα x'x .

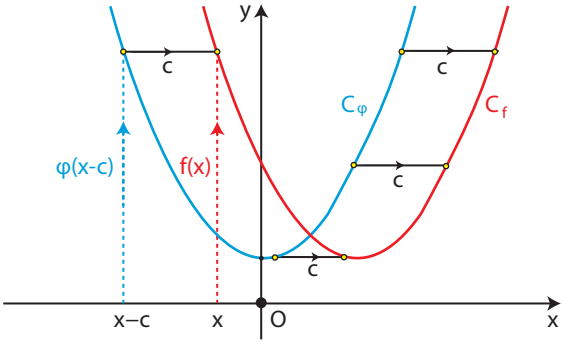
Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με:

$$f(x)=\varphi(x-c)\ ,\ \text{όπου}\ c>0\ ,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά** (Σχήμα γ΄).

Πράγματι επειδή $f(x)=\varphi(x-c)$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση $x-c$, που βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα γ΄).



Σχήμα γ΄

β) Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=|x+1|$. Επειδή

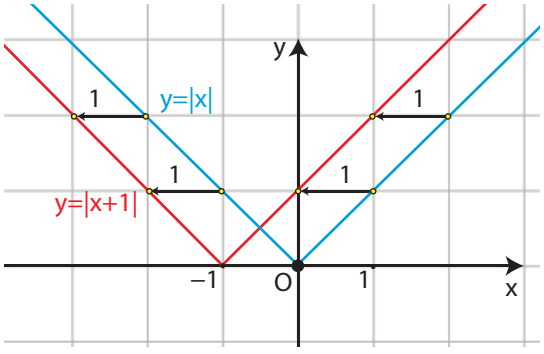
$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{αν} \quad x<-1\\ x+1, & \text{αν} \quad x\geq -1\end{cases},$$

η γραφική παράσταση της $f(x)=|x+1|$ θα αποτελείται από τις ημιευθείες

✓ $y=-x-1$, με $x\leq -1$ και

✓ $y=x+1$, με $x\geq -1$,

που έχουν αρχή το σημείο -1 του άξονα x'x και είναι παράλληλες με τις διχοτόμους των γωνιών $x'\hat{O}y$ και $x\hat{O}y$ από τις οποίες αποτελείται η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ (Σχήμα).



Επομένως, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$ οριζόντια και προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα, τότε αυτή θα συμπέσει με τη γραφική

παράσταση της $f(x)=|x+1|$. Αυτό, άλλωστε, ήταν αναμενόμενο, αφού ισχύει

$$f(x)=\varphi(x+1)\ ,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\mathbb{R},$$

που σημαίνει ότι η τιμή της $f(x)=|x+1|$ στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της $\varphi(x)=|x|$ στη θέση x +1.

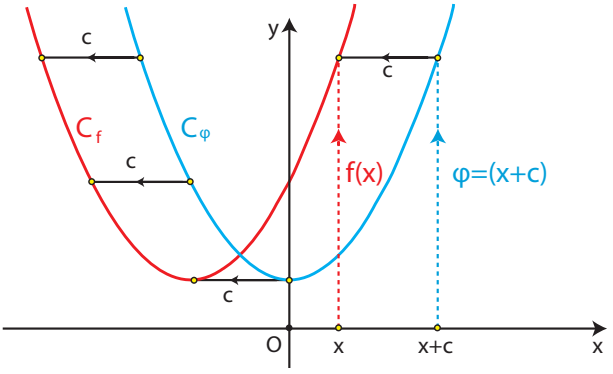
Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

$$f(x)=\varphi(x+c)\ ,\ \text{όπου}\ c>0\ ,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά** (Σχήμα δ΄).

Πράγματι επειδή $f(x)=\varphi(x+c)$, η τιμή της f στη θέση x είναι ίδια με την τιμή της φ στη θέση x + c , που βρίσκεται c μονάδες δεξιότερα της θέσης x. Άρα, η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται c μονάδες αριστερότερα της γραφικής παράστασης της φ (Σχήμα δ΄).



Σχήμα δ΄

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=|x+3|+2$.

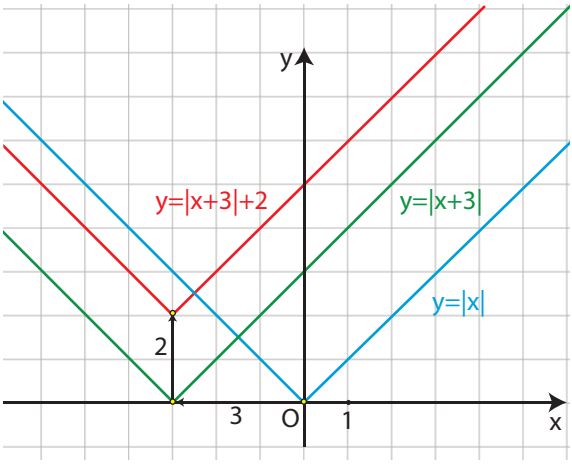
ΛΥΣΗ

Αρχικά χαράσσουμε την $y=|x+3|$, που όπως είδαμε προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$ κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $y=|x+3|+2$,που όπως είδαμε προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y=|x+3|$ κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Επομένως, η γραφική παράσταση της

$$f(x)=|x+3|+2$$

προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της συνάρτησης $y=|x|$, μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω (Σχήμα).



ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Με ανάλογο τρόπο, δουλεύουμε για να παραστήσουμε γραφικά τις συναρτήσεις της μορφής:

$$f(x)=\varphi(x\pm c)\pm d \text{ , με } c,d>0$$

Δηλαδή, αξιοποιούμε τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη μετατόπιση καμπύλης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$\varphi(x)=|x|$, $f(x)=|x|+2$ και $g(x)=|x|-2$.

2. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$\varphi(x)=|x|$, $h(x)=|x+2|$ και $q(x)=|x-2|$.

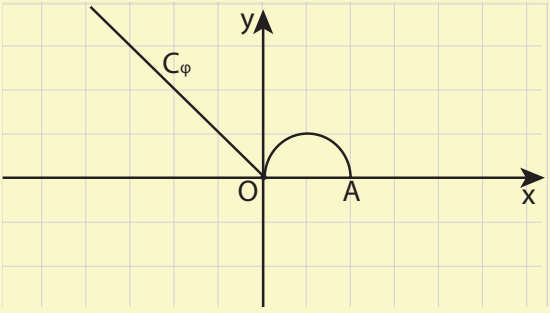
3. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

$\varphi(x)=|x|$, $F(x)=|x+2|+1$ και $G(x)=|x-2|-1$.

4. **i)** Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x)=2x^2-4x+5$ στη μορφή $f(x)=\alpha(x-p)^2+q$ και στη συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2$ θα συμπέσει με τη γραφική παράσταση της f.

ii) Να κάνετε το ίδιο και για τη συνάρτηση $f(x)=-2x^2+8x-9$, θεωρώντας ως g την $g(x)=-2x^2$.

5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης φ που αποτελείται από τη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων και από το ημικύκλιο που ανήκει στο $1^{ο}$ τεταρτημόριο και έχει διάμετρο που ορίζουν τα σημεία Ο(0,0) και Α(2,0).



Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\varphi(x)+2$ και $g(x)=\varphi(x)-2$

ii) $h(x)=\varphi(x+3)$ και $q(x)=\varphi(x-3)$

iii) $F(x)=\varphi(x+3)+2$ και $G(x)=\varphi(x-3)-2$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=2x^2-1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ:

i) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

ii) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

iii) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

iv) κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ι) Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα. Α Ψ

2. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα. Α Ψ

3. Υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση που διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) , Β(2,1) και Γ (3,3) . Α Ψ

4. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε θα ισχύει $f(0) < 0$. Α Ψ

5. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β(2,5) , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Α Ψ

6. Αν η μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης f είναι ίση με 1, τότε η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη. Α Ψ

7. Η συνάρτηση $f:[-1,2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια. Α Ψ

8. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε θα έχει ρίζα και τον αριθμό –ρ. Α Ψ

9. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Α Ψ

10. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η –f είναι περιττή. Α Ψ

ΙΙ) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για την παρακάτω συνάρτηση f.

Η συνάρτηση f, της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi(x) = 3x^4$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, έχει τύπο:

Α) $f(x) = 3(x-1)^4 + 2$ Β) $f(x) = 3(x-1)^4 - 2$

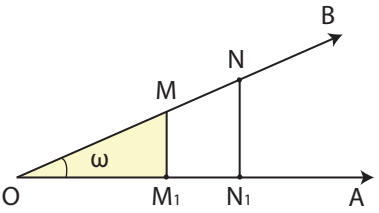
Γ) $f(x) = 3(x+1)^4 + 2$ Δ) $f(x) = 3(x+1)^4 - 2$

Κεφάλαιο 3ο
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Έστω οξεία γωνία ω. Αν πάνω στη μία από τις δύο πλευρές της γωνίας πάρουμε τυχαία σημεία Μ και Ν και φέρουμε τις κάθετες MM_1 και NN_1 προς την άλλη πλευρά της γωνίας, τότε τα τρίγωνα OMM_1 και ONN_1 θα είναι όμοια, οπότε θα ισχύει:



$$\frac{(MM_1)}{(OM)}=\frac{(NN_1)}{(ON)},\qquad \frac{(OM_1)}{(OM)}=\frac{(ON_1)}{(ON)}\qquad \text{και}\qquad \frac{(MM_1)}{(OM_1)}=\frac{(NN_1)}{(ON_1)}$$

Επομένως, για τη γωνία ω τα πηλίκα

$$\frac{(MM_1)}{(OM)},\qquad \frac{(OM_1)}{(OM)}\qquad \text{και}\qquad \frac{(MM_1)}{(OM_1)}$$

είναι σταθερά, δηλαδή ανεξάρτητα της θέσης του σημείου Μ πάνω στην πλευρά της γωνίας. Τα πηλίκα αυτά, όπως γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο, ονομάζονται **ημίτονο, συνημίτονο** και **εφαπτομένη** της γωνίας ω και συμβολίζονται με **ημω, συνω** και **εφω**, αντιστοίχως.

Δηλαδή, στο ορθογώνιο τρίγωνο $M_1\hat{O}M$, ισχύει:

$$\text{ημω}=\frac{(MM_1)}{(OM)}\qquad \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

$$\text{συν}\omega = \frac{(OM_1)}{(OM)} \qquad \left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \right)$$

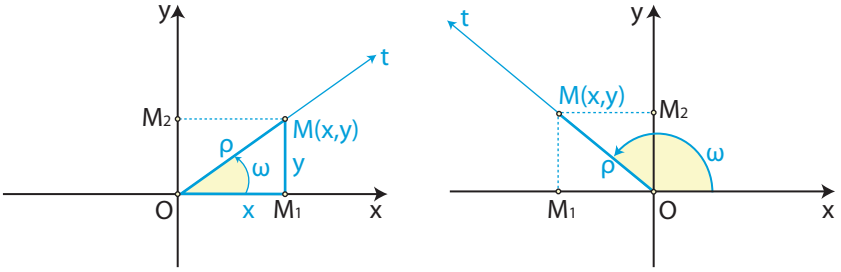
$$\text{εφ}\omega = \frac{(MM_1)}{(OM_1)} \qquad \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} \right)$$

Ορίζουμε ακόμα ως **συνεφαπτομένη** της οξείας γωνίας ω, την οποία συμβολίζουμε με **σφω**, το σταθερό πηλίκο

$$\text{σφ}\omega = \frac{(OM_1)}{(MM_1)} \qquad \left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} \right)$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω, με $0^o \leq \omega \leq 360^o$

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, Ot μία ημιευθεία αυτού και ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox αν περιστραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το O μέχρι να συμπέσει για πρώτη φορά με την ημιευθεία Ot (Σχ. α΄, β΄). Ο θετικός ημιάξονας Ox λέγεται **αρχική πλευρά** της γωνίας ω, ενώ η ημιευθεία Ot λέγεται **τελική πλευρά** της ω.



Σχήμα α΄ *Σχήμα β΄*

Πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας ω παίρνουμε τυχαίο σημείο M(x, y) και φέρνουμε την κάθετη MM_1 στον άξονα x'x (Σχ. α΄ και β΄).
Αν η γωνία ω είναι οξεία (Σχ. α΄), τότε, όπως είδαμε παραπάνω, ισχύουν οι ισότητες:

$$\eta\mu\omega = \frac{(MM_1)}{(OM)}, \quad \text{συν}\omega = \frac{(OM_1)}{(OM)}, \quad \text{εφ}\omega = \frac{(MM_1)}{(OM_1)} \quad \text{και} \quad \text{σφ}\omega = \frac{(OM_1)}{(MM_1)}$$

Όμως $(OM_1) = x$, $(M_1M) = y$ και $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho > 0$. Επομένως, οι παραπάνω ισότητες γράφονται:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \text{συν}\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \text{εφ}\omega = \frac{y}{x} \quad \text{και} \quad \text{σφ}\omega = \frac{x}{y}, \text{ όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 .$$

Γενικεύοντας τα παραπάνω, ορίζουμε με τον ίδιο τρόπο τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας ω (Σχήμα β΄).

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \quad (\text{εφόσον } x \neq 0)$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} \quad (\text{εφόσον } y \neq 0)$$

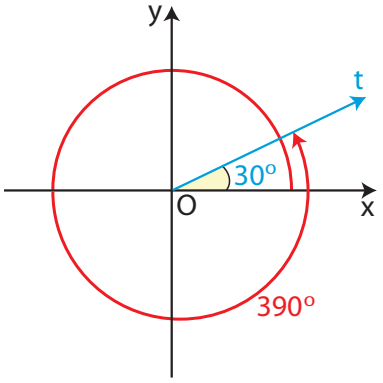
, όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$

όπου (x, y) οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου M (διαφορετικού του O) της τελικής πλευράς της γωνίας ω και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ η απόσταση του M από το O.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των 360^o και αρνητικών γωνιών

Ας υποθέσουμε ότι ο ημιάξονας Ox ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy περιστρέφεται γύρω από το O κατά τη θετική φορά. Αν πραγματοποιήσει μια πλήρη περιστροφή και περιστραφεί επιπλέον και κατά γωνία μέτρου 30°, τότε λέμε ότι ο Ox έχει διαγράψει γωνία

$$\omega = 360^\circ + 30^\circ = 390^\circ.$$

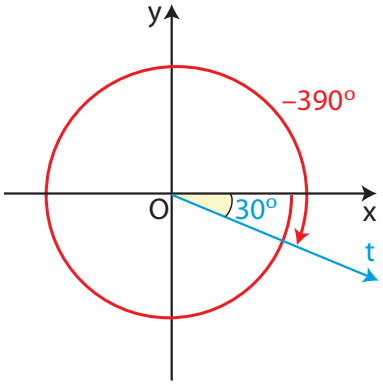


Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι γωνίες που είναι μεγαλύτερες των 360°, δηλαδή οι γωνίες της μορφής:

$$\omega = \nu \cdot 360^\circ + \mu^\circ, \text{ όπου } \nu \in \mathbb{N}^* \text{ και } 0^\circ \leq \mu < 360^\circ$$

Αν τώρα ο ημιάξονας Ox, στρεφόμενος γύρω από το O κατά την αρνητική φορά, πραγματοποιήσει μια πλήρη περιστροφή και στη συνέχεια διαγράψει γωνία μέτρου 30°, τότε λέμε ότι ο ημιάξονας Ox έχει διαγράψει αρνητική γωνία $360^o + 30^o = 390^o$ ή αλλιώς γωνία:

$$\omega = -(360^\circ + 30^\circ) = -390^\circ$$



Με ανάλογο τρόπο ορίζονται οι αρνητικές γωνίες δηλαδή οι γωνίες της μορφής:

$$\omega = -(\nu \cdot 360^\circ + \mu^\circ), \text{ όπου } \nu \in \mathbb{N} \text{ και } 0^\circ \le \mu < 360^\circ$$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που είναι μεγαλύτερες από 360^o, καθώς και των αρνητικών γωνιών, ορίζονται όπως και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών από 0° μέχρι 360°.

Δηλαδή, για κάθε γωνία ω, θετική ή αρνητική, ορίζουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \quad (\text{εφόσον } x \neq 0)$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} \quad (\text{εφόσον } y \neq 0)$$

$$\text{, όπου } \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

όπου (x, y) οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου M της τελικής πλευράς της γωνίας ω (διαφορετικού του O) και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ η απόσταση του M από το O.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια γωνία ω (θετική ή αρνητική) με αρχική πλευρά τον ημιάξονα Ox .

Αν ο ημιάξονας Ox , στρεφόμενος γύρω από το O κατά τη θετική φορά, συμπληρώσει ν πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει τη γωνία ω, τότε θα έχει διαγράψει γωνία $\nu \cdot 360^\circ + \omega$, που έχει την ίδια τελική πλευρά με την ω.

Αν όμως ο ημιάξονας Ox , στρεφόμενος γύρω από το O κατά την αρνητική φορά, συμπληρώσει ν πλήρεις στροφές και στη συνέχεια διαγράψει τη γωνία ω, τότε θα έχει διαγράψει γωνία $-\nu \cdot 360^\circ + \omega$, που έχει και αυτή την ίδια τελική πλευρά με την ω.

Οι παραπάνω γωνίες, που είναι της μορφής $k \cdot 360^\circ + \omega$, $k \in \mathbb{Z}$, επειδή έχουν την ίδια τελική πλευρά θα έχουν και τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Επομένως, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θα ισχύει:

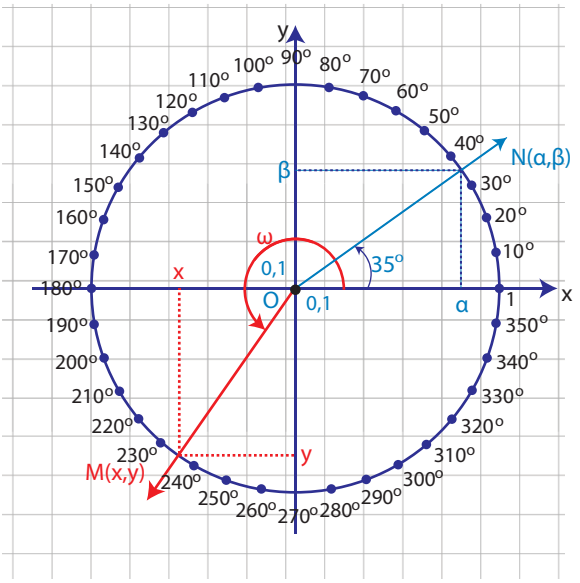
$$\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega, \qquad \varepsilon\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega, \qquad \sigma\varphi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Για έναν κατά προσέγγιση, αλλά σύντομο, υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών, χρησιμοποιούμε το λεγόμενο τριγωνομετρικό κύκλο. Ο τριγωνομετρικός κύκλος θα μας εξυπηρετήσει και σε άλλους σκοπούς, όπως θα φανεί στις επόμενες παραγράφους.

Με κέντρο την αρχή O(0,0) ενός συστήματος συντεταγμένων και ακτίνα ρ = 1 γράφουμε έναν κύκλο. Ο κύκλος αυτός λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος**.



Έστω τώρα ότι η τελική πλευρά μιας γωνίας, π.χ. της γωνίας $\omega = 35^\circ$ τέμνει τον κύκλο αυτό στο σημείο N(α, β).

Επειδή $\eta\mu 35^\circ = \frac{\beta}{\rho}$ και ρ=1 θα ισχύει $\eta\mu 35^\circ = \beta \simeq 0,57$.

Ομοίως, επειδή $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = \frac{\alpha}{\rho}$ και ρ =1, θα ισχύει $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = \alpha \simeq 0,82$.

Γενικότερα, αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M(x, y), τότε ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = x = \text{τετμημένη του σημείου M}$$
$$\eta\mu\omega = y = \text{τεταγμένη του σημείου M}$$

Για το λόγο αυτό ο άξονας x'x λέγεται και **άξονας των συνημίτονων**, ενώ ο άξονας y'y λέγεται και **άξονας των ημίτονων**.

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω συμπεράσματος είναι οι εξής:

1. Οι τιμές του συνω και του ημω μιας γωνίας ω δεν μπορούν να υπερβούν κατ' απόλυτη τιμή την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου, που είναι ίση με 1. Δηλαδή ισχύει:

$$-1 \le \sigma\upsilon\nu\omega \le 1 \quad \text{και} \quad -1 \le \eta\mu\omega \le 1$$

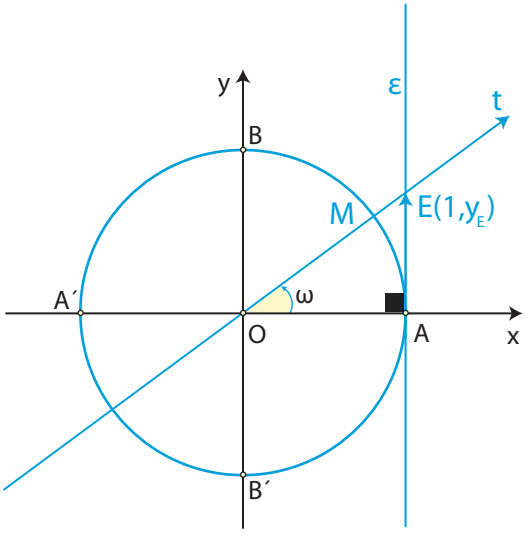
2. Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω, ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής, είναι όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας.

	1°	2°	3°	4°
ημω	+	+	–	–
συνω	+	–	–	+
εφω	+	–	+	–
σφω	+	–	+	–

Ο άξονας των εφαπτομένων

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και μια γωνία ω που η τελική της πλευρά τον τέμνει στο σημείο M(x, y). Φέρνουμε την εφαπτομένη ε του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο A.

Αν η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο και η ευθεία OM τέμνει την ε στο E, τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\hat{O}E$ θα έχουμε



$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{(AE)}{(OA)} = \frac{(AE)}{1} = (AE)$$

Αν με y_E παραστήσουμε την τεταγμένη του E, τότε θα ισχύει $(AE) = y_E$, οπότε θα είναι

$$\varepsilon\varphi\omega = y_E.$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και όταν η τελική πλευρά της γωνίας ω βρίσκεται σε οποιοδήποτε άλλο τεταρτημόριο.

Επομένως σε κάθε περίπτωση ισχύει:

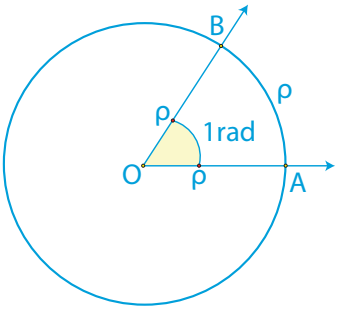
$$\textbf{εφω} = \mathbf{y_E} = \textbf{τεταγμένη του σημείου E}$$

Για το λόγο αυτό η ευθεία ε, που έχει εξίσωση $x = 1$, λέγεται **άξονας των εφαπτομένων**.

Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Έχουμε γνωρίσει στο Γυμνάσιο το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης τόξων. Συγκεκριμένα, ένα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ενός κύκλου (O, ρ) λέγεται **τόξο ενός ακτινίου (ή 1rad)**, αν το τόξο αυτό έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου. Επομένως, το τόξο α ακτινίων (ή α rad) έχει μήκος $S = \alpha \cdot \rho$.

Ορίζουμε τώρα το ακτίνιο και ως μονάδα μέτρησης των γωνιών ως εξής:



ΟΡΙΣΜΟΣ

Ακτίνιο (ή 1 rad) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad).

Από τον ορισμό αυτό προκύπτει και η σχέση μοίρας και ακτινίου ως μονάδων μέτρησης γωνιών, ως εξής:

Έστω ότι μια γωνία ω είναι μ° και α rad . Επειδή το μήκος ενός κύκλου ακτίνας ρ είναι 2πρ,

$$\text{η γωνία } 360^\circ \text{ είναι ίση με } 2\pi \text{ rad.}$$

οπότε,

$$\text{η γωνία 1 rad είναι ίση με } \frac{360}{2\pi} \text{ μοίρες,}$$

Επομένως,

$$\text{η γωνία α rad είναι ίση με } \alpha \cdot \frac{180}{\pi} \text{ μοίρες.}$$

Επειδή όμως η γωνία ω είναι μ°, θα ισχύει $\mu = \alpha \cdot \frac{180}{\pi}$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

Για παράδειγμα:

✓ Για να εκφράσουμε τη γωνία 60° σε ακτίνια, θέτουμε στον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ όπου $\mu = 60^\circ$ και έχουμε

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{60}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Άρα είναι $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ rad.

✓ Για να εκφράσουμε τη γωνία $\frac{5\pi}{6}$ rad σε μοίρες, θέτουμε στον τύπο

$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180}$ όπου $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ και έχουμε

$$\frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi}=\frac{\mu}{180}\Leftrightarrow\frac{5}{6}=\frac{\mu}{180}\Leftrightarrow\mu=150$$

Άρα $\frac{5\pi}{6}$ rad $=150^{\circ}$.

Στον παρακάτω πίνακα επαναλαμβάνουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μερικών γωνιών που είχαμε υπολογίσει στο Γυμνάσιο και οι οποίοι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στις διάφορες εφαρμογές.

Γωνία ω		**Τριγωνομετρικοί αριθμοί**			
σε μοίρες	**σε rad**	**ημω**	**συνω**	**εφω**	**σφω**
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Στη συνέχεια, επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο το τόξο x rad έχει μήκος x, αντί να γράφουμε

ημ(x rad), συν(x rad), εφ(x rad) και σφ(x rad),

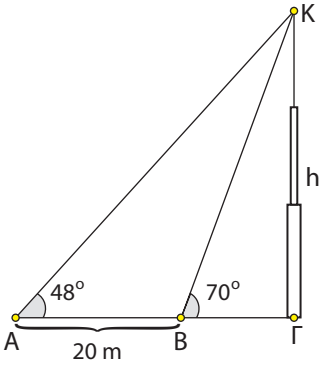
θα γράφουμε απλά

ημx, συνx, εφx και σφx.

Για παράδειγμα, αντί να γράφουμε π.χ. $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}\text{rad}\right)$ θα γράφουμε απλά $\text{ημ}\frac{\pi}{3}$ και αντί ημ(100rad) θα γράφουμε απλά ημ100 .

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Οι μετρήσεις που έκανε ένας μηχανικός για να βρει το ύψος h ενός καμπαναριού ΓΚ φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογιστεί το ύψος του καμπαναριού σε μέτρα με προσέγγιση ακέραιας μονάδας.



ΛΥΣΗ

Από το σχήμα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi 48^\circ = \frac{h}{A\Gamma}, \text{ οπότε } A\Gamma = \frac{h}{\varepsilon\varphi 48^\circ}$$

$$\varepsilon\varphi 70^\circ = \frac{h}{B\Gamma}, \text{ οπότε } B\Gamma = \frac{h}{\varepsilon\varphi 70^\circ}$$

$$A\Gamma - B\Gamma = AB = 20m$$

Επομένως $\frac{h}{\varepsilon\varphi 48^\circ} - \frac{h}{\varepsilon\varphi 70^\circ} = 20$, οπότε $h = \frac{20\varepsilon\varphi 70^\circ \cdot \varepsilon\varphi 48^\circ}{\varepsilon\varphi 70^\circ - \varepsilon\varphi 48^\circ}$.

Με τους τριγωνομετρικούς πίνακες ή με ένα κομπιουτεράκι βρίσκουμε ότι

$$\varepsilon\varphi 70^\circ \simeq 2,75 \text{ και } \varepsilon\varphi 48^\circ \simeq 1,11.$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και έχουμε:

$$h \simeq \frac{61,05}{1,64} \simeq 37$$

Άρα το ύψος του καμπαναριού είναι περίπου 37m .

2η Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 750° .

ΛΥΣΗ

Αν διαιρέσουμε το 750 με το 360 βρίσκουμε πηλίκο 2 και υπόλοιπο 30, έτσι έχουμε

$$750^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ$$

Επομένως

$$\eta\mu 750^\circ = \eta\mu(2 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu 750^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 750^\circ = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \sigma\varphi 750^\circ = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}$$

3η Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $\frac{79\pi}{3}$ rad.

ΛΥΣΗ

Είναι $\frac{79\pi}{3}=\frac{79}{6}\cdot 2\pi$. Αν τώρα διαιρέσουμε τον 79 με τον 6 βρίσκουμε πηλίκο 13 και υπόλοιπο 1. Επομένως είναι $\frac{79\pi}{3}=\frac{79}{6}\cdot 2\pi=\left(13+\frac{1}{6}\right)2\pi=13\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}$, οπότε θα έχουμε:

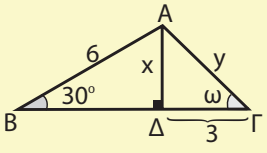
$$\eta\mu\frac{79\pi}{3}=\eta\mu\left(13\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu\frac{79\pi}{3}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{79\pi}{3}=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}=\sqrt{3} \qquad \sigma\varphi\frac{79\pi}{3}=\sigma\varphi\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

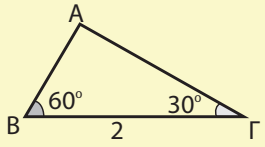
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x, y και τη γωνία ω .



2. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου του διπλανού σχήματος.



3. Μια επίκεντρη γωνία ω βαίνει σε τόξο S = 6cm. Να εκφράσετε τη γωνία αυτή σε ακτίνια, αν η ακτίνα του κύκλου είναι:
i) ρ = 1cm **ii)** ρ = 2cm **iii)** ρ = 3cm .

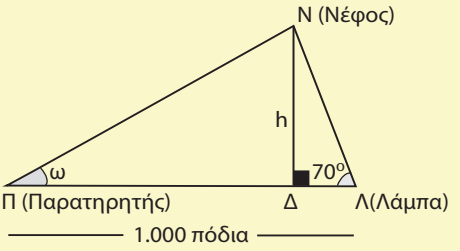
4. Να εκφράσετε σε rad γωνία
i) 30° **ii)** 120° **iii)** 1260° **iv)** -1485°.

5. Να μετατρέψετε σε μοίρες γωνία:
i) $\frac{\pi}{10}$ rad **ii)** $\frac{5\pi}{6}$ rad **iii)** $\frac{91\pi}{3}$ rad **iv)** 100rad .

6. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας
i) 1830° **ii)** 2940° **iii)** 1980° **iv)** 3600°.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Σε μικρά αεροδρόμια υπολογίζουν το ύψος των νεφών με τη βοήθεια μιας ισχυρής λάμπας εντός παραβολικού κατόπτρου, η οποία βρίσκεται σε απόσταση 1000 πόδια (1 πόδι $\simeq$ 0,3 m) από το σημείο του παρατηρητή.

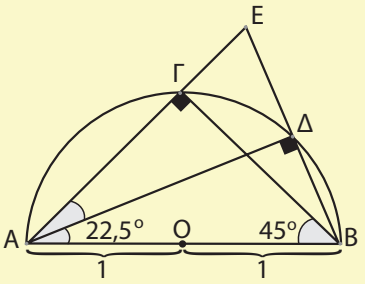


Η λάμπα είναι τοποθετημένη υπό σταθερή γωνία και ο παρατηρητής στρέφει το όργανο παρατήρησης στο σημείο ανάκλασης του φωτός από τα νέφη.

i) Να προσδιορίσετε το ύψος h για $\omega = 30^\circ, 45^\circ$ και 60°.

ii) Πόση είναι η γωνία ω, αν h=1000 πόδια;

2. Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος:



i) Να δείξετε ότι:
$(A\Gamma) = (B\Gamma) = 2\eta\mu 45^\circ = \sqrt{2}$.

ii) Να εξηγήσετε γιατί είναι
$(EB) = 4 \cdot \eta\mu 22{,}5^\circ$.

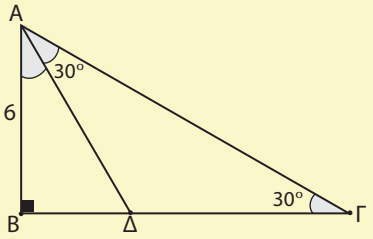
iii) Να υπολογίσετε το μήκος (ΓΕ).

iv) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας το τρίγωνο $B\hat{E}\Gamma$, ότι $(EB) = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

v) Να υπολογίσετε το $\eta\mu 22{,}5^\circ$.

vi) Ποιων άλλων γωνιών μπορείτε να υπολογίσεται το ημίτονο και πώς πρέπει να συνεχιστεί η κατασκευή για το σκοπό αυτό;

3. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ του διπλανού σχήματος.



4. Η πιο αργή κίνηση που μπορεί να επισημάνει το ανθρώπινο μάτι είναι 1mm ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε πόσο μήκος πρέπει να έχει ο λεπτοδείκτης ενός ρολογιού για να μπορούμε να επισημάνουμε την κίνηση του άκρου του.

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Από τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω προκύπτουν ορισμένες σχέσεις που τους συνδέουν και είναι γνωστές ως τριγωνομετρικές ταυτότητες. Οι ταυτότητες αυτές είναι χρήσιμες στο λογισμό με παραστάσεις που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.

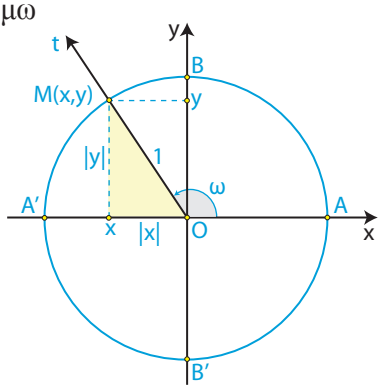
Συγκεκριμένα ισχύουν:

1. $$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν Μ (x, y) είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι:

$$x = \sigma\upsilon\nu\omega \text{ και } y = \eta\mu\omega$$



Επειδή όμως,
$(OM) = 1$ και $(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$
θα ισχύει:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

οπότε θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$$

2. $$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στο ίδιο σχήμα έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad (\text{εφόσον } x = \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0)$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad (\text{εφόσον } y = \eta\mu\omega \neq 0).$$

Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων (1) και (2), θα αποδείξουμε δύο επιπλέον χρήσιμες ταυτότητες.

3. $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \text{ (εφόσον } \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \text{ και } \eta\mu\omega \neq 0)$$

Επομένως:

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1 \ .$$

4. $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$ και $\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ταυτότητας $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ με $\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0$ και έχουμε:

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \ .$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}.$

ii) Αν στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ θέσουμε $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$,

έχουμε: $\eta\mu^2\omega + \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}.$

Άρα $\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}.$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Αν $\eta\mu\omega=\frac{5}{13}$ και $90^\circ<\omega<180^\circ$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

ΛΥΣΗ

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega$.

Αντικαθιστούμε το ημω με $\frac{5}{13}$ και έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=1-\frac{25}{169}=\frac{169-25}{169}=\frac{144}{169}.$$

Επειδή $90^\circ<\omega<180^\circ$, είναι συνω < 0 , οπότε έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$$

Από τις ταυτότητες τώρα $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega=\frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5}.$$

2η Να αποδειχθεί ότι

i) $\eta\mu^4\omega+\sigma\upsilon\nu^4\omega=1-2\eta\mu^2\omega\sigma\upsilon\nu^2\omega$ **ii) $\eta\mu^4\omega-\sigma\upsilon\nu^4\omega=2\eta\mu^2\omega-1$**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\eta\mu^4\omega+\sigma\upsilon\nu^4\omega&=(\eta\mu^2\omega)^2+(\sigma\upsilon\nu^2\omega)^2\\&=(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega)^2-2\eta\mu^2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega\\&=1-2\eta\mu^2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega, \quad (\text{Επειδή } \eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1)\end{aligned}$$

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\eta\mu^4\omega-\sigma\upsilon\nu^4\omega&=(\eta\mu^2\omega)^2-(\sigma\upsilon\nu^2\omega)^2\\&=(\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega)(\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega)\\&=\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega \quad (\text{Επειδή } \eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1)\\&=\eta\mu^2\omega-(1-\eta\mu^2\omega)=2\eta\mu^2\omega-1.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

2. Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{2}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

3. Αν $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

4. Αν $\sigma\varphi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

5. Αν $\sigma\varphi x = -2$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$.

6. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες:

i) Να ισχύει συγχρόνως $\eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$.

ii) Να ισχύει συγχρόνως $\eta\mu x = 1$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1$.

iii) Να ισχύει συγχρόνως $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$.

7. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M (x, y) του επιπέδου με $x = 3\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = 3\eta\mu\theta$ είναι σημεία κύκλου O(0,0) κέντρου και ακτίνας $\rho = 3$.

8. Αν ισχύει $x = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = 3\eta\mu\theta$, να δείξετε ότι $9x^2 + 4y^2 = 36$.

9. Αν είναι $x = r\,\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi$, $y = r\,\eta\mu\theta\eta\mu\varphi$ και $z = r\,\sigma\upsilon\nu\theta$, να δείξετε ότι $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

10. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$.

11. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}=\dfrac{2}{\eta\mu\theta}$ **ii)** $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu x}.$

12. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$ **ii)** $\varepsilon\varphi^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\varepsilon\varphi^2\alpha\cdot\eta\mu^2\alpha.$

13. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x}+\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x}=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ **ii)** $(1-\sigma\upsilon\nu x)\left(1+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=\eta\mu x\cdot\varepsilon\varphi x$

iii) $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x}=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **iv)** $\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-\eta\mu x\right)\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x\right)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x.$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\alpha$, να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α τις παραστάσεις:

i) $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **ii)** $\dfrac{1}{\eta\mu x}+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

iii) $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x$ **iv)** $\eta\mu^3x+\sigma\upsilon\nu^3x.$

2. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x=1-2\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x$ **ii)** $\eta\mu^6x+\sigma\upsilon\nu^6x=1-3\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x.$

iii) Η παράσταση $2(\eta\mu^6x+\sigma\upsilon\nu^6x)-3(\eta\mu^4x+\sigma\upsilon\nu^4x)$ έχει τιμή ανεξάρτητη του x , δηλαδή είναι σταθερή.

3. Αν $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{\dfrac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}-\sqrt{\dfrac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}=2\varepsilon\varphi x.$

4. Αν $0\le x<\dfrac{\pi}{2},$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}=\dfrac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}.$

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

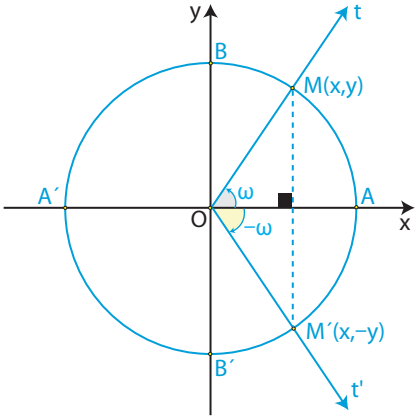
Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών οποιασδήποτε γωνίας μπορεί να γίνει, όπως θα δούμε στη συνέχεια, με τη βοήθεια πινάκων που δίνουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών από 0° μέχρι 90°.

Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες ω και ω' που οι τελικές πλευρές τους τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία Μ και Μ' αντιστοίχως.

Γωνίες αντίθετες

Αν οι γωνίες ω και ω' είναι αντίθετες, δηλαδή αν $\omega' = -\omega$, τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία Μ και Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x'x. Επομένως τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες.

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega \qquad \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$$
$$\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$$

Δηλαδή:

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το <u>ίδιο συνημίτονο</u> και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Για παράδειγμα:

✓Έχουμε:

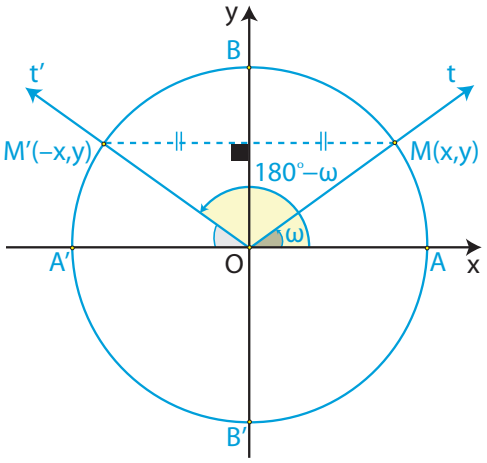
$$\eta\mu(-30^\circ) = -\eta\mu(30^\circ) = -\frac{1}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\varepsilon\varphi(-30^\circ) = -\varepsilon\varphi(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \sigma\varphi(-30^\circ) = -\sigma\varphi(30^\circ) = -\sqrt{3}$$

✓Επίσης, έχουμε:

$$\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = -1 \qquad \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{4} = -1$$

Γωνίες με άθροισμα 180º

Αν οι γωνίες ω και ω' έχουν άθροισμα 180°, δηλαδή αν $\omega' = 180^\circ - \omega$, τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y . Επομένως τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.
Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$
$$\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(180^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$$

Δηλαδή:

Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν το <u>ίδιο ημίτονο</u> και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.
Για παράδειγμα:

✓ Επειδή $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$, έχουμε:

$$\eta\mu150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi150^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\varepsilon\varphi30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi150^\circ = \sigma\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\varphi30^\circ = -\sqrt{3}$$

✓ Επειδή $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{συν}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\text{συν}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\text{συν}\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

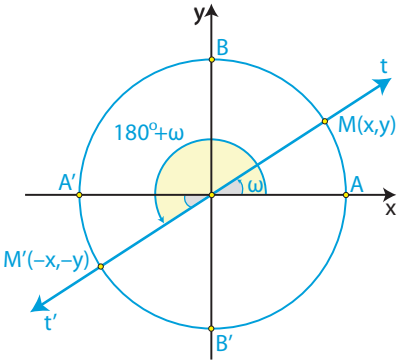
$$\text{εφ}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\text{εφ}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\text{εφ}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

$$\text{σφ}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\text{σφ}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\text{σφ}\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180º

Αν οι γωνίες ω και ω' διαφέρουν κατά 180° δηλαδή αν $\omega'=180^\circ+\omega$, τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Επομένως τα σημεία αυτά έχουν αντίθετες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες.

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$$\eta\mu(180^\circ+\omega)=-\eta\mu\omega \qquad \text{συν}(180^\circ+\omega)=-\text{συν}\omega$$
$$\text{εφ}(180^\circ+\omega)=\text{εφ}\omega \qquad \text{σφ}(180^\circ+\omega)=\text{σφ}\omega$$

Δηλαδή:

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.

Για παράδειγμα:

✓ Επειδή $210^\circ=180^\circ+30^\circ$, έχουμε:

$$\eta\mu 210^\circ=\eta\mu(180^\circ+30^\circ)=-\eta\mu 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\text{συν}210^\circ=\text{συν}(180^\circ+30^\circ)=-\text{συν}30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{εφ}210^\circ=\text{εφ}(180^\circ+30^\circ)=\text{εφ}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{σφ}210^\circ=\text{σφ}(180^\circ+30^\circ)=\text{σφ}30^\circ=\sqrt{3}$$

✓ Επειδή $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

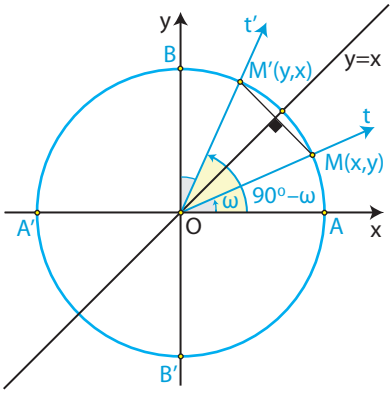
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Γωνίες με άθροισμα 90ο

Αν οι γωνίες ω και ω' έχουν άθροισμα 90°, δηλαδή $\omega' = 90^\circ - \omega$, τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

Επομένως η τετμημένη του καθενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου. Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$
$$\varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(90^\circ - \omega) = \varepsilon\varphi\omega$$

Δηλαδή,

Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90°, τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

Για παράδειγμα, επειδή $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, έχουμε:

$$\eta\mu60^\circ = \sigma\upsilon\nu30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sigma\upsilon\nu60^\circ = \eta\mu30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon\varphi60^\circ = \sigma\varphi30^\circ = \sqrt{3} \qquad \text{και} \qquad \sigma\varphi60^\circ = \varepsilon\varphi30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από τα προηγούμενα καταλαβαίνουμε ότι δεν χρειάζεται να έχουμε πίνακες τριγωνομετρικών αριθμών όλων των γωνιών, αλλά μόνο των γωνιών από 0° μέχρι 90°.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. **Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας** 54°.

ΛΥΣΗ

Επειδή $54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$, έχουμε

$$\eta\mu 54^\circ = \sigma\upsilon\nu 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ ισχύει

$\eta\mu^2 54^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 54^\circ = 1$, οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu^2 54^\circ = 1 - \eta\mu^2 54^\circ = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16},$$

οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu 54^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

Επομένως είναι:

$$\varepsilon\varphi 54^\circ = \frac{\eta\mu 54^\circ}{\sigma\upsilon\nu 54^\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi 54^\circ = \frac{\sigma\upsilon\nu 54^\circ}{\eta\mu 54^\circ} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}.$$

2η Να υπολογιστούν με τη βοήθεια της γωνίας ω οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών:

α) $90^\circ + \omega$, **β)** $270^\circ - \omega$ **και** **γ)** $270^\circ + \omega$

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $90^\circ + \omega = 90^\circ - (-\omega)$, έχουμε:

$$\eta\mu(90^\circ + \omega) = \eta\mu(90^\circ - (-\omega)) = \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega.$$

Ομοίως υπολογίζονται οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $90^\circ + \omega$.

ii) Επειδή $270^\circ - \omega = 180^\circ + (90^\circ - \omega)$, έχουμε:
$\eta\mu(270^\circ - \omega) = \eta\mu(180^\circ + (90^\circ - \omega)) = -\eta\mu(90^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$.

Ομοίως υπολογίζονται οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $270^\circ - \omega$.

iii) Επειδή $270^\circ + \omega = 360^\circ - 90^\circ + \omega = 360^\circ + (\omega - 90^\circ)$, έχουμε:
$\varepsilon\varphi(270^\circ + \omega) = \varepsilon\varphi(\omega - 90^\circ) = -\varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$.

Ομοίως υπολογίζονται οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $270^\circ + \omega$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

i) 1200° **ii)** -2850°.

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας

i) $\frac{187\pi}{6}$ rad **ii)** $\frac{21\pi}{4}$ rad.

3. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma)$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0$

iii) $\eta\mu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B + \Gamma}{2}$ **iv)** $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \eta\mu\frac{B + \Gamma}{2}$.

4. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\cdot\eta\mu(90^\circ + \alpha)}$.

5. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\varepsilon\varphi(\pi - x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi + x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu(13\pi + x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)} = -1.$

6. Να δείξετε ότι έχει σταθερή τιμή η παράσταση:

$$\eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\eta\mu 495^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\upsilon\nu 495^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu(-120^\circ)}{\varepsilon\varphi(-120^\circ) + \varepsilon\varphi 495^\circ}.$$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(5\pi+\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu(7\pi-\omega)\cdot\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)}{\sigma\varphi(5\pi+\omega)\cdot\eta\mu(7\pi-\omega)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}-\omega\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2}+\omega\right)} = \eta\mu^2\omega - 1.$$

3. Αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=5$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{6}+x\right).$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$0 < \frac{\varepsilon\varphi(\pi+x)}{\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi(\pi+x)} < 1.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι) Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Αν $\eta\mu\omega = 1$, τότε υποχρεωτικά θα είναι $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$. Α Ψ

2. Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$, τότε υποχρεωτικά θα είναι $\eta\mu\omega = 1$. Α Ψ

3. Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = 2$. Α Ψ

4. Για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ Α Ψ

5. $\eta\mu^2 20^\circ + \eta\mu^2 70^\circ = 1$ Α Ψ

6. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu(x-\pi) = -\eta\mu x$ Α Ψ

7. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu^2 x = \eta\mu x^2$ Α Ψ

8. Αν $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\eta\mu x = 0$, τότε $\eta\mu x = 0$ Α Ψ

9. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=0$ Α Ψ

II. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της Α΄ ομάδας με τον ίσο του από τη Β΄ ομάδα.

Α΄ ΟΜΑΔΑ	
1	$\eta\mu 120^\circ$
2	$\sigma\upsilon\nu 150^\circ$
3	$\eta\mu 210^\circ$
4	$\sigma\upsilon\nu 300^\circ$
5	$\varepsilon\varphi 210^\circ$
6	$\sigma\varphi 300^\circ$
7	$\varepsilon\varphi 300^\circ$
8	$\sigma\varphi 210^\circ$

Β΄ ΟΜΑΔΑ	
Α	$-\sqrt{3}$
Β	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
Γ	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
Δ	$-\frac{1}{2}$
Ε	$\frac{1}{2}$
Ζ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
Η	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Θ	$\sqrt{3}$

III. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($A = 90^\circ$) και <u>όχι</u> ισοσκελές, τότε:

Α) $\eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 1$, **Β)** $\eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = 1$, **Γ)** $\varepsilon\varphi B = 1$.

2. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ <u>δεν</u> είναι ορθογώνιο τότε:

Α) $\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = \sigma\upsilon\nu A$, **Β)** $\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu A$, **Γ)** $\varepsilon\varphi(B + \Gamma) = \varepsilon\varphi A$.

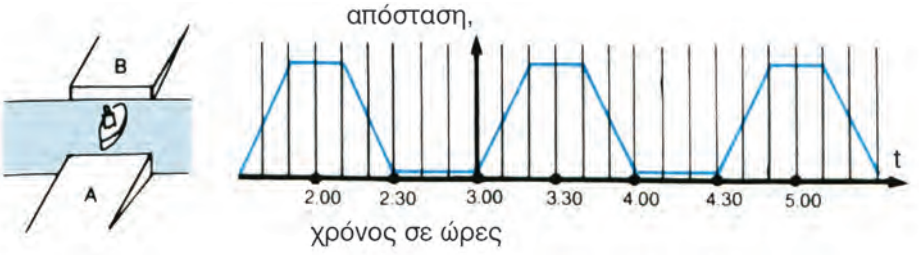
3. Αν ένα τρίγωνο ΑΒΓ <u>δεν</u> είναι ορθογώνιο τότε:

Α) $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) = \eta\mu\frac{A}{2}$, **Β)** $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$, **Γ)** $\varepsilon\varphi\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right) = \varepsilon\varphi\frac{A}{2}$.

3.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Περιοδικές συναρτήσεις

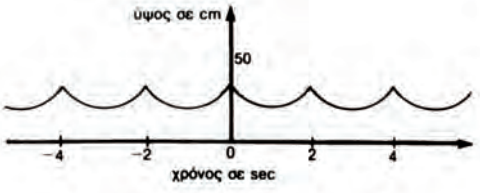
— Έστω ότι ένα φέρι-μποτ πηγαινοέρχεται μεταξύ δύο λιμανιών Α και Β και η γραφική παράσταση της απόστασης του από το λιμάνι Α ως συνάρτηση του χρόνου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Παρατηρούμε ότι κάθε $1\frac{1}{2}$ ώρα το φέρι-μποτ επαναλαμβάνει την ίδια ακριβώς κίνηση. Αυτό σημαίνει ότι σε όποια απόσταση βρίσκεται από το λιμάνι Α σε κάποια χρονική στιγμή t, στην ίδια απόσταση θα βρίσκεται και τη χρονική στιγμή $t+1\frac{1}{2}$ ώρες και στην ίδια απόσταση βρισκόταν και τη χρονική στιγμή $t-1\frac{1}{2}$ ώρες.

Επομένως η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση του φέρι-μποτ από το λιμάνι Α, με τη βοήθεια του χρόνου t, έχει τις ίδιες τιμές τις χρονικές στιγμές t, $t+1\frac{1}{2}$, $t-1\frac{1}{2}$. Λέμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι **περιοδική** με **περίοδο** $1\frac{1}{2}$ ώρες.

— Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση του ύψους μιας κούνιας ως συνάρτηση του χρόνου t.





Παρατηρούμε ότι, όποιο ύψος έχει η κούνια σε κάποια χρονική στιγμή t, το ίδιο ύψος θα έχει και τη χρονική στιγμή t + 2 sec και το ίδιο ύψος είχε και τη χρονική στιγμή t – 2 sec.

Λέμε πάλι ότι η συνάρτηση (που εκφράζει το ύψος της κούνιας με τη βοήθεια του χρόνου t) είναι **περιοδική** με **περίοδο** 2 sec.

Γενικότερα:

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ>0 τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

i) $x + T \in A, \quad x - T \in A$

και

ii) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός Τ λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικών αριθμών

Όπως γνωρίζουμε, για κάθε γωνία ω υπάρχει μία μόνο τιμή του ημω, με $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$. Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση με την οποία κάθε γωνία ω αντιστοιχίζεται στο ημίτονό της. Ομοίως ορίζονται και οι άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις γωνιών.

Πολλές εφαρμογές όμως των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δεν περιέχουν γωνίες, αλλά πραγματικούς αριθμούς, όπως, π.χ. ο τύπος της αρμονικής ταλάντωσης $f(t) = \alpha \cdot \eta\mu\omega t$, στον οποίο τα α και ω είναι σταθερές και t είναι ένας πραγματικός αριθμός που παριστάνει το χρόνο.

Για το λόγο αυτό ορίζουμε στη συνέχεια τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.

Συγκεκριμένα:

— Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο ημ (x rad) λέγεται **συνάρτηση ημίτονο** και συμβολίζεται με **ημ**.
Ορίζουμε δηλαδή ότι

$$\eta\mu x = \eta\mu(x\,\text{rad})$$

Επειδή $\eta\mu(\omega + 360^\circ) = \eta\mu(\omega - 360^\circ) = \eta\mu\omega$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει:

$$\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu x$$

Άρα **η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π.**
— Ομοίως ορίζουμε και τη **συνάρτηση συνημίτονο** που συμβολίζεται με **συν**.

Ορίζουμε δηλαδή ότι

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(x\,\text{rad}).$$

Και η συνάρτηση συνημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π.

— **Η συνάρτηση εφαπτομένη,** που συμβολίζεται με **εφ**, ορίζεται ως εξής:

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εφ είναι το σύνολο:

$$\mathbb{R}_1 = \{x \,|\, \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ ισχύει

$$\varepsilon\varphi(x+\pi) = \varepsilon\varphi(x-\pi) = \varepsilon\varphi x,$$

η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π.

— **Η συνάρτηση συνεφαπτομένη**, που συμβολίζεται με **σφ**, ορίζεται ως εξής:

$$\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$$

Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης σφ είναι το σύνολο:

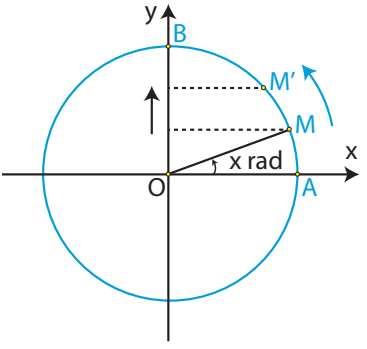
$$\mathbb{R}_2 = \{x \,|\, \eta\mu x \neq 0\}$$

Και η συνάρτηση συνεφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π.

Μελέτη της συνάρτησης f(x) = ημx

Επειδή η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π, π.χ το [0,2π]. Έχουμε αναφέρει όμως ότι το ημx είναι η τεταγμένη του σημείου Μ στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας xrad τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο. Επομένως αρκεί να εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται η τεταγμένη του Μ, όταν αυτό περιφέρεται στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη θετική φορά, ξεκινώντας από το Α.

Παρατηρούμε ότι:



• Όταν το x μεταβάλλεται από το 0 μέχρι το $\frac{\pi}{2}$, το Μ κινείται από το Α μέχρι το Β. Άρα η τεταγμένη του αυξάνει, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ομοίως βρίσκουμε ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι:

— γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

— γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ και

— γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

• Η συνάρτηση παρουσιάζει

— μέγιστο για $x = \frac{\pi}{2}$, το $\eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$ και

— ελάχιστο για $x = \frac{3\pi}{2}$, το $\eta\mu\frac{3\pi}{2} = -1$.

Τα συμπεράσματα αυτά συνοψίζονται ως εξής:

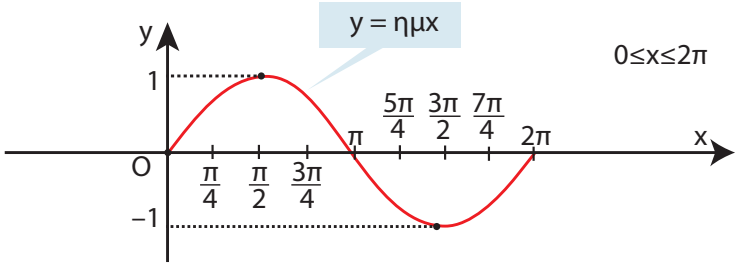
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0 ↗	1 (μέγ.) ↘	0 ↘	−1 (ελάχ.) ↗	0

Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης χρειαζόμαστε έναν πίνακα τιμών της. Κατά τα γνωστά έχουμε:

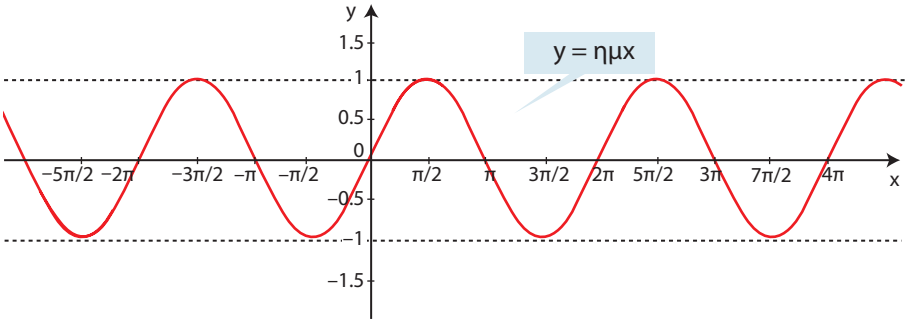
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ημx	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,71$	1	0,71	0	− 0,71	− 1	− 0,71	0

Παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μία συνεχή γραμμή.

Έτσι προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο στο διάστημα [0, 2π]:



Επειδή η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιοδική, με περίοδο 2π, η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή στα διαστήματα [2π, 4π], [4π, 6π] κτλ. καθώς και στα διαστήματα $[-2\pi, 0], [-4\pi, -2\pi]$ κτλ.
Έτσι έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο, η οποία λέγεται **ημιτονοειδής καμπύλη**.



Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετα ημίτονα. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu(-x) = -\eta\mu x$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιττή και επομένως η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O(0,0) των αξόνων.

Μελέτη της συνάρτησης f(x) = συνx

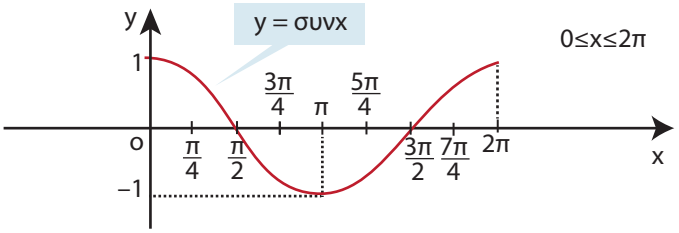
Επειδή η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π, π.χ. το [0, 2π].
Από τη μελέτη αυτή προκύπτουν τα συμπεράσματα του επόμενου πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνx	1 μέγ. ↘	0 ↘	−1 ελάχ. ↗	0 ↗	1 μέγ.

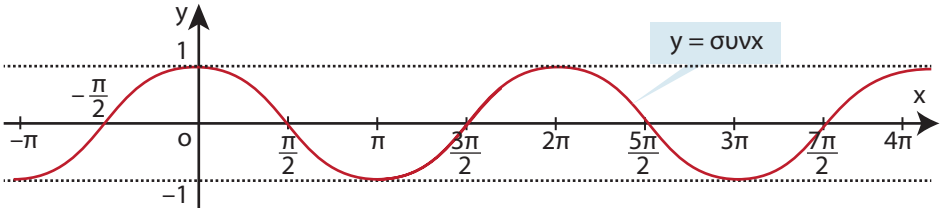
Συντάσσουμε τώρα κατά τα γνωστά και τον ακόλουθο πίνακα τιμών της συνάρτησης συνημίτονο:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
συνx	1	0,71	0	− 0,71	−1	− 0,71	0	0,71	1

Έτσι μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της y = συνx για $0 \le x \le 2\pi$.



Επειδή η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π, η γραφική της παράσταση στο $\mathbb{R}$ είναι η ακόλουθη:



Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\text{συν}(-x) = \text{συν}x$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f(x) = συνx είναι άρτια και επομένως η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y.

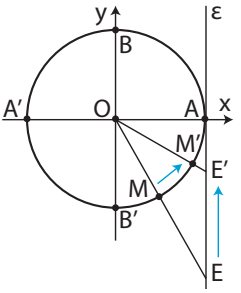
Μελέτη της συνάρτησης f(x) = εφx

Επειδή η συνάρτηση f(x) = εφx είναι περιοδική με περίοδο π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ. το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(Το διάστημα είναι ανοικτό, αφού η συνάρτηση εφ δεν ορίζεται στα $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$).

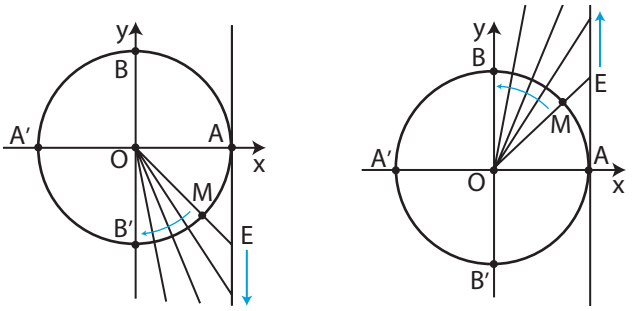
Ας υποθέσουμε ότι η τελική πλευρά της γωνίας x rad τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο M και την ευθεία των εφαπτομένων στο σημείο E.

Όπως έχουμε αναφέρει η εφx ισούται με την τεταγμένη του σημείου E. Επομένως:



• Όταν ο x παίρνει τιμές από $-\frac{\pi}{2}$ προς το $\frac{\pi}{2}$ το M κινείται στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη θετική φορά από το B' προς το B, οπότε η τεταγμένη του σημείου E αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι η f(x) = εφx είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

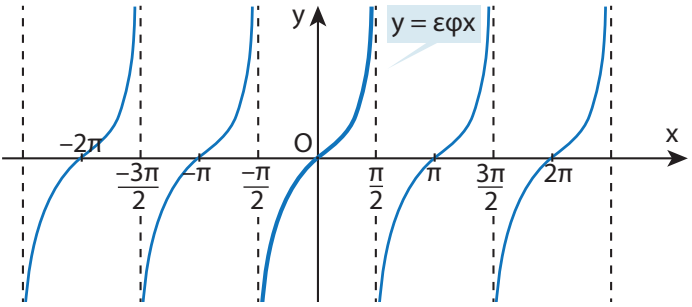
• Όταν ο x «τείνει» στο $-\frac{\pi}{2}$ από μεγαλύτερες τιμές η εφx «τείνει» στο $-\infty$. Γι΄ αυτό λέμε ότι η ευθεία $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f. Επίσης όταν ο x «τείνει» στο $\frac{\pi}{2}$ από μικρότερες τιμές η εφx τείνει στο $+\infty$. Γι΄ αυτό λέμε ότι και η ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.



Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f(x)=εφx συντάσσουμε, με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών πινάκων ή με επιστημονικό κομπιουτεράκι, έναν πίνακα τιμών της:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
εφx	Δεν ορίζεται	$-\sqrt{3}\simeq -1,7$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}\simeq -0,6$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}\simeq 0,6$	1	$\sqrt{3}\simeq 1,7$	Δεν ορίζεται

Στη συνέχεια παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή. Η γραφική παράσταση της f(x)=εφx φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι φανερό ότι η γραφική παράσταση της f(x)=εφx έχει κέντρο συμμετρίας το O, αφού (§ 3.3: εφ(–x) = –εφx είναι περιττή συνάρτηση).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f(x)=3ημx.

ΛΥΣΗ

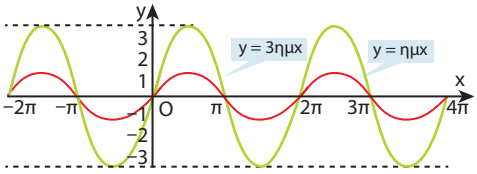
Οι τιμές της συνάρτησης f(x)=3ημx είναι προφανώς τριπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης φ(x)=ημx. Εξάλλου και η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, αφού ισχύει:

$$f(x+2\pi)=3\cdot\eta\mu(x+2\pi)=3\cdot\eta\mu x=f(x)\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

$$\text{και } f(x-2\pi)=3\cdot\eta\mu(x-2\pi)=3\cdot\eta\mu x=f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Έχοντας υπόψη τα στοιχεία αυτά και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f(x)=3ημx.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	–1	0
3ημx	0	3	0	–3	0



2ο Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f(x)=ημ2x.

ΛΥΣΗ

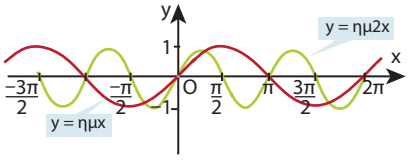
Κάθε τιμή της συνάρτησης f(x)=ημ2x επαναλαμβάνεται, όταν το 2x αυξηθεί κατά 2π, που σημαίνει ότι η τιμή αυτή επαναλαμβάνεται, όταν το x αυξηθεί κατά π. Επομένως, η συνάρτηση f(x)=ημ2x είναι περιοδική με περίοδο π. Πράγματι:

$$f(x+\pi)=\eta\mu 2(x+\pi)=\eta\mu(2x+2\pi)=\eta\mu 2x=f(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και}$$

$$f(x-\pi)=\eta\mu 2(x-\pi)=\eta\mu(2x-2\pi)=\eta\mu 2x=f(x),\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Έχοντας υπόψη το στοιχείο αυτό και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f(x)=ημ2x.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
ημ2x	0	1	0	–1	0



3ο Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f(x)=3ημ2x.

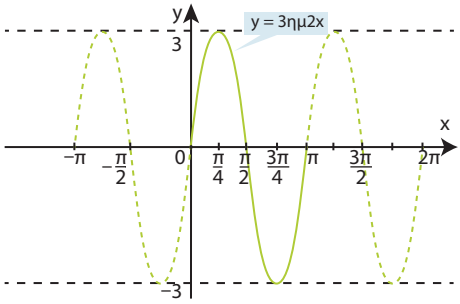
ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τα προηγούμενα παραδείγματα η συνάρτηση αυτή έχει μέγιστο 3, ελάχιστο –3 και είναι περιοδική με περίοδο π.

Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης f(x)=3ημ2x είναι ο εξής:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
3ημ2x	0	3	0	–3	0

Με τη βοήθεια του πίνακα αυτού σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.



ΣΧΟΛΙΟ

Από τα προηγούμενα παραδείγματα γίνεται φανερό ότι σε μια συνάρτηση της μορφής f(x)=ρ ημωx, όπου ρ,ω>0:

(i) Το ρ καθορίζει τη μέγιστη τιμή της, που είναι ίση με ρ και την ελάχιστη τιμή της, που είναι ίση με –ρ.

(ii) Το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης που είναι ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$.

Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για μια συνάρτηση της μορφής

f(x)=ρ συνωx, όπου ρ,ω>0

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, κάθε φορά στο ίδιο σύστημα αξόνων

i) $f(x)=2\eta\mu x,\quad g(x)=0,5\cdot\eta\mu x,\quad h(x)=-2\cdot\eta\mu x,\quad 0\le x\le 2\pi$.

ii) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x,\quad g(x)=0,5\cdot\sigma\upsilon\nu x,\quad h(x)=-2\cdot\sigma\upsilon\nu x,\quad 0\le x\le 2\pi$.

2. Σε ένα σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ και στη συνέχεια τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=1+\eta\mu x \quad \text{και} \quad h(x)=-1+\eta\mu x$$

3. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=\eta\mu x \quad \text{και} \quad g(x)=\eta\mu 3x, \qquad 0\le x\le 2\pi .$$

4. Ομοίως των συναρτήσεων

$$f(x)=\sigma\upsilon\nu x \quad \text{και} \quad g(x)=\sigma\upsilon\nu 3x, \qquad 0\le x\le 2\pi .$$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2\cdot\eta\mu\frac{x}{2}$. Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής; Ποια είναι η περίοδος της εν λόγω συνάρτησης; Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

6. Ομοίως για τη συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$.

7. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

i) $f(x) = \varepsilon\varphi x$ **ii)** $g(x) = 1 + \varepsilon\varphi x$ και **iii)** $h(x) = -1 + \varepsilon\varphi x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

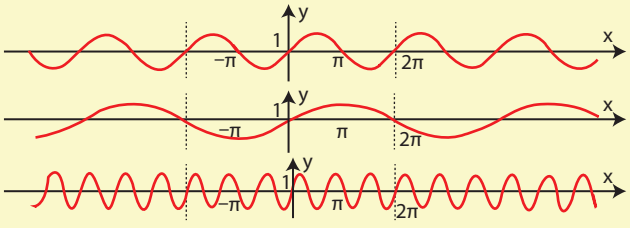
8. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi 2x$.

9. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$.

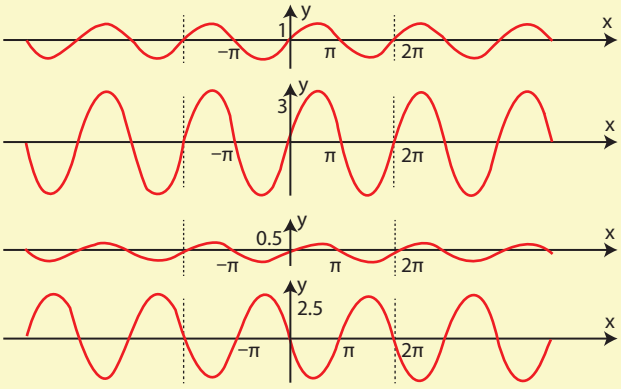
Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των ημιτονοειδών καμπυλών:

i)



ii)

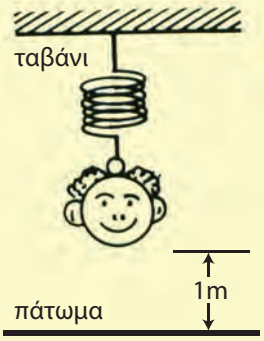


2. Η παλίρροια σε μια θαλάσσια περιοχή περιγράφεται κατά προσέγγιση με τη συνάρτηση $y = 3 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$, όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες.

i) Να βρείτε την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην ψηλότερη πλημμυρίδα και τη χαμηλότερη άμπωτη.

ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 12$.

3. Ένα παιχνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι και απέχει από το πάτωμα 1m. Όταν το παιχνίδι ανεβοκατεβαίνει, το ύψος του από το πάτωμα σε μέτρα είναι $h = 1 + \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3t$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.



i) Να υπολογίσετε τη διαφορά ανάμεσα στο μέγιστο και στο ελάχιστο ύψος.

ii) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 2\pi$.

4. Η απόσταση x του πιστονιού σε μέτρα από το ένα άκρο του κυλίνδρου περιγράφεται με τη συνάρτηση $x(t) = 0{,}1 + 0{,}1 \cdot \eta\mu 3t$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.



i) Να υπολογίσετε το πλάτος της κίνησης του πιστονιού.

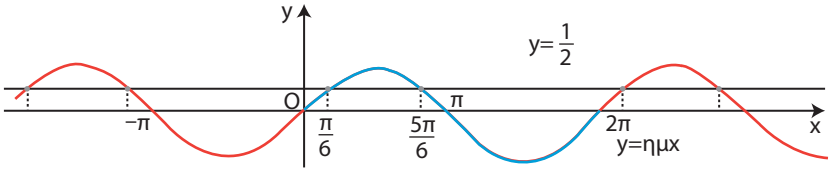
ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $0 \le t \le 2\pi$.

Ποιες στιγμές του χρονικού αυτού διαστήματος η απόσταση είναι 0,15m;

3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η εξίσωση ημx=α

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$. Είναι φανερό ότι ζητάμε να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης $y = \eta\mu x$ και της ευθείας $y = \frac{1}{2}$.

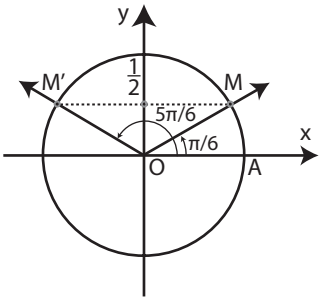


Ζητάμε δηλαδή εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$. Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, για να βρούμε τα ζητούμενα x, που είναι άπειρα σε πλήθος (βλ. σχήμα), αρκεί να βρούμε όσα από αυτά υπάρχουν σε ένα διάστημα πλάτους 2π και σε καθένα να προσθέσουμε το $\kappa \cdot 2\pi$, όπου κ ακέραιος.

Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, είναι οι $\frac{\pi}{6}$ και $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, γιατί $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \eta\mu\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ δίνεται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \quad \text{ή} \quad , \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$



Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = \alpha$, αν δηλαδή ισχύει $\eta\mu\theta = \alpha$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \quad \text{ή} \quad , \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ισχύει $\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Επομένως η εξίσωση γράφεται $\eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, οπότε οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \\ \quad \text{ή} \quad , \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

2ο Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, έχουμε $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6}$, οπότε

$$\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

Ισχύει όμως

$$2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{24}$$

και

$$2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{7\pi}{24}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x=\kappa\pi-\frac{\pi}{24} \\ \text{ή} \\ x=\kappa\pi+\frac{7\pi}{24} \end{cases}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

Η εξίσωση συνx = α

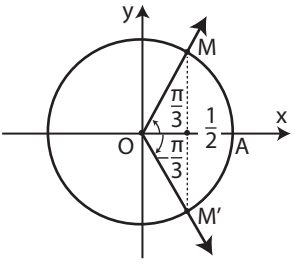
Με ανάλογες σκέψεις, όπως προηγουμένως, εργαζόμαστε για να λύσουμε π.χ. την εξίσωση $\text{συν}x=\frac{1}{2}$.

Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $\text{συν}x=\frac{1}{2}$ στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ είναι οι $\frac{\pi}{3}$ και $-\frac{\pi}{3}$, γιατί

$$\text{συν}\frac{\pi}{3}=\text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}.$$

Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\text{συν}x=\frac{1}{2}$ δίνεται από τους τύπους

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$



Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωση συνx = α, αν δηλαδή ισχύει συνθ = α, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους

$$\begin{array}{c} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \qquad \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{array}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, έχουμε $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \qquad \text{ή} \qquad , \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

2ο Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΣΗ

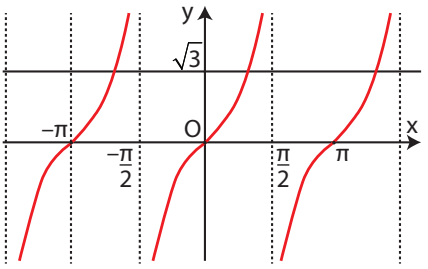
Επειδή $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ισχύει $\sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Έχουμε επομένως $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}$, οπότε

$$\begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \\ \qquad \text{ή} \qquad , \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{cases} x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12} \\ \qquad \text{ή} \qquad , \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = \kappa\pi - \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

Η εξίσωση εφx = α

Έστω η εξίσωση $\text{εφ}x = \sqrt{3}$. Όπως γνωρίζουμε η συνάρτηση εφ είναι περιοδική με περίοδο π. Επομένως, για να λύσουμε την εξίσωση, αρκεί να βρούμε τις λύσεις της σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ. το $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και να προσθέσουμε σε αυτές το κπ, $\kappa \in \mathbb{Z}$.



Όπως φαίνεται όμως και στο σχήμα, μια μόνο λύση της εξίσωσης $\text{εφ}x = \sqrt{3}$ υπάρχει στο διάστημα αυτό. Η λύση αυτή είναι η $\frac{\pi}{3}$, γιατί $\text{εφ}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $\text{εφ}x = \sqrt{3}$ είναι: $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Γενικότερα, αν θ είναι μια λύση της εξίσωσης εφx = α, αν δηλαδή ισχύει εφx = εφθ, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι:

$$x = \kappa\pi + \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ο ίδιος τύπος λύσεων ισχύει και για την εξίσωση σφx = α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να λυθεί η εξίσωση $\text{εφ}x = -1$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\text{εφ}\frac{\pi}{4} = 1$, ισχύει $\text{εφ}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Έχουμε επομένως $\text{εφ}x = \text{εφ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, οπότε

$$x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

2ο Να λυθεί η εξίσωση $\text{σφ}x = \sqrt{3}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\text{σφ}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, έχουμε $\text{σφ}x = \text{σφ}\frac{\pi}{6}$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu x = 0$ ii) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iii) $\sigma\upsilon\nu x = 0$ iv) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$ ii) $\eta\mu x = -1$ iii) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ iv) $\sigma\upsilon\nu x = -1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\varepsilon\varphi x = 0$ ii) $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ iii) $\sigma\varphi x = 1$ iv) $\sigma\varphi x = \sqrt{3}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ii) $\sigma\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(1-\eta\mu x)(2\eta\mu x - \sqrt{3}) = 0$ ii) $(2\eta\mu x + \sqrt{2})(1-\sigma\upsilon\nu x) = 0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(\sqrt{3} + \varepsilon\varphi x)(1 - \varepsilon\varphi x) = 0$ ii) $(2\sigma\upsilon\nu x + 1)(\varepsilon\varphi^2 x - 3)\sigma\varphi x = 0$

7. Χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικούς πίνακες ή επιστημονικό κομπιουτεράκι να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu x = 0{,}951$ ii) $\sigma\upsilon\nu x = -0{,}809$ iii) $\varepsilon\varphi x = 28{,}636$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2\cdot\eta\mu 3x = \sqrt{3}$ ii) $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{5} + 1 = 0$ iii) $3\varepsilon\varphi\frac{2x}{7} - \sqrt{3} = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ ii) $2\sigma\upsilon\nu\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ iii) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{3}$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2\eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega - 1 = 0$

ii) $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ iii) $3\varepsilon\varphi^2 t = 3 + 2\sqrt{3}\varepsilon\varphi t$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x = 4$ ii) $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi 2x = 1$

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του x, καθεμιά από τις επόμενες συναρτήσεις έχει τη μέγιστη και για ποιες την ελάχιστη τιμή της:

i) $f(x) = 3\cdot\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right),\ 0 \le x < 2\pi,$ ii) $g(x) = 7\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right),\ 0 \le x < 2\pi.$

13. Οι μηνιαίες πωλήσεις ενός εποχιακού προϊόντος (σε χιλιάδες κομμάτια) δίνονται κατά προσέγγιση από τον τύπο $S = 75 + 50 \cdot \eta\mu\frac{\pi t}{6}$, όπου t ο χρόνος σε μήνες και με t = 1 να αντιστοιχεί στον Ιανουάριο.

i) Να βρείτε ποιους μήνες οι πωλήσεις φτάνουν τις 100000 κομμάτια.

ii) Να βρείτε ποιο μήνα έχουμε το μεγαλύτερο αριθμό πωλήσεων και πόσες είναι αυτές.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ **ii)** $\varepsilon\varphi 2x - \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\varepsilon\varphi x \cdot \eta\mu x + 1 = \eta\mu x + \varepsilon\varphi x$ **ii)** $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\cdot\varepsilon\varphi x = 4$

3. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\varepsilon\varphi x = 1$ στο διάστημα $(3\pi, 4\pi)$.

*** 4.** Να λύσετε την εξίσωση $1+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x$ στο διάστημα $[0,2\pi)$.

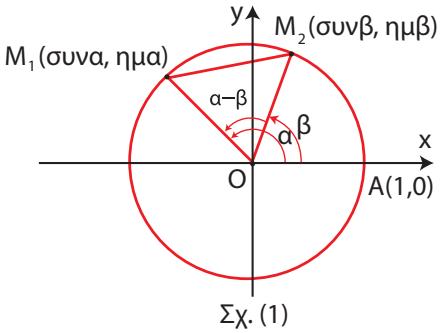
5. Να λύσετε την εξίσωση: $\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ στο διάστημα $[0, 2\pi)$.

3.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

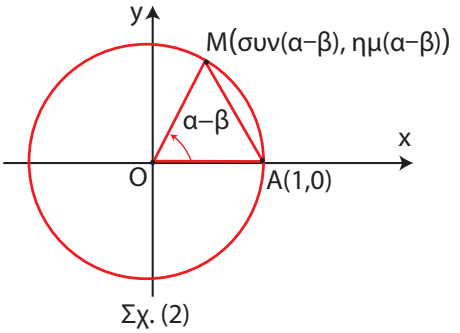
Συνημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες α, β που οι τελικές τους πλευρές τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία M_1, M_2 αντιστοίχως (Σχ. 1).

Έστω επιπλέον και η γωνία $\alpha - \beta$, που η τελική της πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ. (Σχ. 2).



Σχ. (1)



Σχ. (2)

Όπως είναι γνωστό, τα σημεία M_1, M_2 , Α και Μ έχουν συντεταγμένες:

το M_1:	τετμημένη	συνα	και τεταγμένη	ημα
το M_2:	τετμημένη	συνβ	και τεταγμένη	ημβ
το Α:	τετμημένη	1	και τεταγμένη	0
το Μ:	τετμημένη	$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$	και τεταγμένη	$\eta\mu(\alpha-\beta)$

Επειδή $M_2\hat{O}M_1 = A\hat{O}M = \alpha-\beta$, θα είναι και $(M_2M_1) = (AM)$. Άρα:

$$(M_2M_1)^2 = (AM)^2$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό μας τύπο:

$$(P_1P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

που δίνει την απόσταση δύο σημείων $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$, έχουμε:

- $\mathbf{(M_2M_1)^2}$ $= (\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2$
$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta-2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$
$\mathbf{= 2-2(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)}$ και

- $\mathbf{(AM)^2}$ $= [\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-1]^2+[\eta\mu(\alpha-\beta)-0]^2$
$= \sigma\upsilon\nu^2(\alpha-\beta)+1-2\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\eta\mu^2(\alpha-\beta)$
$\mathbf{= 2-2\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta).}$

Έτσι η σχέση $(M_2M_1)^2 = (AM)^2$ γράφεται

$$2-2(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta) = 2-2\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$$

ή $$\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$$

Επομένως:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \qquad (1)$$

Η ισότητα αυτή, που αποδείξαμε για γωνίες α, β με $0 \le \beta < \alpha < 360^0$, ισχύει και για οποιεσδήποτε γωνίες α, β.

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με το $-\beta$ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-(-\beta)) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(-\beta)+\eta\mu\alpha\eta\mu(-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

Επομένως:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta \qquad (2)$$

Με τη βοήθεια των τύπων (1) και (2) μπορούμε να υπολογίσουμε το συνημίτονο ορισμένων γωνιών, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τριγωνομετρικούς πίνακες ή υπολογιστικές μηχανές. Για παράδειγμα, έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu 15^\circ = \sigma\upsilon\nu(45^\circ - 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \eta\mu 45^\circ \eta\mu 30^\circ$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

- $\sigma\upsilon\nu 75^\circ = \sigma\upsilon\nu(45^\circ + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ - \eta\mu 45^\circ \eta\mu 30^\circ$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Με τη βοήθεια του τύπου (1), που βρήκαμε προηγουμένως, θα υπολογίσουμε τώρα το ημίτονο του αθροίσματος δυο γωνιών.

Επειδή $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$, έχουμε:

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

Επομένως:

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta \qquad (3)$$

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με –β βρίσκουμε ότι:

$$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta \qquad (4)$$

Σύμφωνα με τους τύπους αυτούς για παράδειγμα, έχουμε:

- $\eta\mu 15^\circ = \eta\mu(45^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 45^\circ \eta\mu 30^\circ$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

- $\eta\mu 75^\circ = \eta\mu(45^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 45^\circ \eta\mu 30^\circ$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Με τη βοήθεια των προηγούμενων τύπων θα υπολογίσουμε την εφαπτομένη του αθροίσματος α+β δύο γωνιών α, β, αν γνωρίζουμε την εφαπτομένη καθεμιάς.

Όπως ξέρουμε, για να ορίζονται οι: $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)$, $\varepsilon\varphi\alpha$ και $\varepsilon\varphi\beta$, πρέπει $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\alpha\neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu\beta\neq 0$. Με την προϋπόθεση αυτή έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}=\frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}\qquad\left[\begin{array}{l}\text{Διαιρούμε με}\\ \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta\neq 0\end{array}\right]$$

$$=\frac{\dfrac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}-\dfrac{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$$

Επομένως έχουμε:

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}\qquad(5)$$

Αν τώρα στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με το –β, βρίσκουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}\qquad(6)$$

Τέλος, με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}\qquad(7)$$

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}\qquad(8)$$

Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους για παράδειγμα, έχουμε:

- $\varepsilon\varphi15^\circ=\varepsilon\varphi(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\varepsilon\varphi45^\circ-\varepsilon\varphi30^\circ}{1+\varepsilon\varphi45^\circ\varepsilon\varphi30^\circ}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

$$=\frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}$$

- $$\varepsilon\varphi 75^\circ = \varepsilon\varphi(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\varepsilon\varphi 45^\circ + \varepsilon\varphi 30^\circ}{1 - \varepsilon\varphi 45^\circ \varepsilon\varphi 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Αν $\eta\mu\alpha = -\frac{3}{5}$, με $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ και $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{12}{13}$, με $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του α+β.

ΛΥΣΗ

Επειδή $\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ αρκεί να υπολογίσουμε το συνα και το ημβ.

Έχουμε λοιπόν:

$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, αφού $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ και

$\eta\mu^2\beta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$, οπότε $\eta\mu\beta = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$, αφού $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

Επομένως

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5}\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{16}{65}$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \frac{4}{5}\left(-\frac{12}{13}\right) - \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{63}{65},$$

οπότε:

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = -\frac{16}{63} \qquad \text{και} \qquad \sigma\varphi(\alpha+\beta) = -\frac{63}{16}$$

2ο Να αποδειχθεί ότι: $\eta\mu(\alpha+\beta)\cdot\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\eta\mu(\alpha+\beta)\eta\mu(\alpha-\beta) = (\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)$$

$$= \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\alpha(1 - \eta\mu^2\beta) - (1 - \eta\mu^2\alpha)\eta\mu^2\beta$$

$$= \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta - \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$$

3ο Να λυθεί η εξίσωση: $2\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

ΛΥΣΗ

$$2\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu x\eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu x + \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}\eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \qquad [\text{αφού } \sigma\upsilon\nu x \neq 0]$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \qquad \kappa \in \mathbb{Z}$$

4ο Να αποδειχθεί ότι σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο, ορίζονται οι εφΑ, εφΒ, εφΓ. Επειδή επιπλέον $A + B = \pi - \Gamma \neq \frac{\pi}{2}$, ορίζεται η $\varepsilon\varphi(A + B)$ και έχουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon\varphi(A + B) = \varepsilon\varphi(\pi - \Gamma)$$

$$\frac{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B}{1 - \varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B} = -\varepsilon\varphi\Gamma$$

$$\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = -\varepsilon\varphi\Gamma + \varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$$

$$\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$$

5ο Θεωρούμε έναν αγωγό από τον οποίο διέρχονται τρία εναλλασσόμενα ρεύματα της ίδιας κυκλικής συχνότητας ω με στιγμιαίες εντάσεις $I_1 = \eta\mu\omega t$, $I_2 = \eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ **και** $I_3 = \eta\mu\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$. **Να αποδειχθεί ότι η ολική ένταση** $I = I_1 + I_2 + I_3$ **του ρεύματος που διέρχεται από τον αγωγό είναι μηδέν.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι $$\begin{aligned} I &= \eta\mu\omega t + \eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \eta\mu\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \eta\mu\omega t + \eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\omega t\eta\mu\frac{2\pi}{3} + \eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu\omega t\eta\mu\frac{4\pi}{3} \\ &= \eta\mu\omega t + \eta\mu\omega t\left(-\frac{1}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\omega t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \eta\mu\omega t\left(-\frac{1}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\omega t\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \eta\mu\omega t - \frac{1}{2}\eta\mu\omega t - \frac{1}{2}\eta\mu\omega t = 0 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή των παραστάσεων:

i) $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - \eta\mu\frac{\pi}{12}\eta\mu\frac{\pi}{4}$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu 170^\circ\sigma\upsilon\nu 50^\circ + \eta\mu 170^\circ\eta\mu 50^\circ$

iii) $\eta\mu 110^\circ\eta\mu 70^\circ - \sigma\upsilon\nu 110^\circ\sigma\upsilon\nu 70^\circ$ **iv)** $\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{12}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12} + \eta\mu\frac{7\pi}{12}\eta\mu\frac{\pi}{12}$

2. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu 3x\sigma\upsilon\nu(-2x) - \eta\mu 3x\eta\mu(-2x)$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\eta\mu x$

3. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sigma\upsilon\nu^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$

4. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή των παραστάσεων:

i) $\eta\mu\frac{17\pi}{18}\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{9} - \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{18}\eta\mu\frac{4\pi}{9}$ **ii)** $\eta\mu 70^\circ\sigma\upsilon\nu 20^\circ + \sigma\upsilon\nu 70^\circ\eta\mu 20^\circ$

iii) $\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12} - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1 + \varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}$ **iv)** $\dfrac{\varepsilon\varphi 165^\circ + \varepsilon\varphi 15^\circ}{1 - \varepsilon\varphi 165^\circ\varepsilon\varphi 15^\circ}$

5. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x\eta\mu x$ **ii)** $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\eta\mu x$

iii) $\dfrac{\varepsilon\varphi x - \varepsilon\varphi 2x}{1 + \varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi 2x}$ **iv)** $\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}{1 - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}$

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu x$

ii) $(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)(\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\beta)=\eta\mu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$

7. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 105° και 195°.

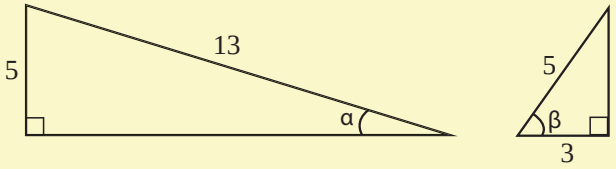
8. Να αποδείξετε ότι:

i) $\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta=\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}$ **ii)** $\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta=\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$

9. Να αποδείξετε ότι για τις γωνίες α, β του διπλανού σχήματος ισχύει:

i) $\eta\mu(\alpha+\beta)=\frac{63}{65}$

ii) $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\frac{16}{65}$



10. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α+β, αν:

i) $\eta\mu\alpha=\frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\beta=-\frac{5}{13}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ και $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

ii) $\sigma\upsilon\nu\alpha=-\frac{3}{5}$, $\eta\mu\beta=-\frac{4}{5}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ **ii)** $\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-2$

iii) $\varepsilon\varphi(x-\alpha)=-2$ αν $\varepsilon\varphi\alpha=-3$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}+\frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma}+\frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha}=0$

2. Αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=0$, να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(\alpha+2\beta)=\eta\mu\alpha$

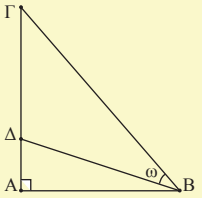
3. Αν $\varepsilon\varphi\alpha=-3$, να λύσετε στο $[0,2\pi]$ την εξίσωση: $\eta\mu(x-\alpha)=-2\eta\mu(x+\alpha)$

4. Αν $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι: $(1+\varepsilon\varphi\alpha)(1+\varepsilon\varphi\beta)=2$

5. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $A\Gamma = 3\cdot A\Delta$, να αποδείξετε ότι:

i) $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{2\varepsilon\varphi B}{3+\varepsilon\varphi^2 B}$, όπου $B = A\hat{B}\Gamma$

ii) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας B, αν $B = 60^\circ$



6. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\dfrac{\eta\mu A+\eta\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)} = \varepsilon\varphi B$, να αποδείξετε ότι $A = \dfrac{\pi}{2}$ και αντιστρόφως.

***7.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

i) $\sigma\varphi A\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\sigma\varphi A = 1$, **ii)** $\dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu\Gamma\eta\mu A}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu A\eta\mu B} = 2$

8. Να λυθεί στο διάστημα $[0,\pi]$ η εξίσωση: $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) = 2\sqrt{3}$

***9.** Αν $0 < x,y,z < \dfrac{\pi}{2}$ με $\varepsilon\varphi x = \dfrac{1}{2}$, $\varepsilon\varphi y = \dfrac{1}{5}$ και $\varepsilon\varphi z = \dfrac{1}{8}$, να αποδείξετε ότι:

$x+y+z = \dfrac{\pi}{4}$

3.7 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

Οι τύποι που εκφράζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α, ως συνάρτηση των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας α, είναι ειδικές περιπτώσεις των τύπων της προηγούμενης παραγράφου. Συγκεκριμένα, αν στους τύπους του $\eta\mu(\alpha+\beta)$, του $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$ και της $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)$ αντικαταστήσουμε το β με το α, έχουμε:

- $\boldsymbol{\eta\mu 2\alpha} = \eta\mu(\alpha+\alpha) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha = \boldsymbol{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$

Επομένως: $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ (1)

- $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \sigma\upsilon\nu(\alpha+\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha\eta\mu\alpha = \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}$

$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha-(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha) = \boldsymbol{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1}$

Επίσης $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha = (1-\eta\mu^2\alpha)-\eta\mu^2\alpha = \boldsymbol{1-2\eta\mu^2\alpha}$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\eta\mu^2\alpha\end{aligned} \qquad (2)$$

- $\boldsymbol{\varepsilon\varphi 2\alpha} = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\alpha} = \boldsymbol{\dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}}$

Επομένως:

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} \qquad (3)$$

Από τους τύπους (2) μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α, αν γνωρίζουμε το συν2α. Πράγματι, έχουμε:

- $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \Leftrightarrow 1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$
- $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\alpha = 1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}$

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}}{\dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} = \boldsymbol{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}}$$

Επομένως:

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \qquad (4)$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \qquad (5)$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \qquad (6)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω τύπων μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του μισού μιας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής. Για παράδειγμα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $22,5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$ υπολογίζονται ως εξής:

$$\eta\mu^2 22,5^\circ = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \quad \text{οπότε} \quad \eta\mu 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 22,5^\circ = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad \text{οπότε} \quad \sigma\upsilon\nu 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Επομένως $\varepsilon\varphi 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1$ και $\sigma\varphi 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{2}+1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να αποδειχθεί ότι:

i) $\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

i) $\eta\mu 3\alpha = \eta\mu(2\alpha+\alpha) = \eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha\eta\mu\alpha$
$= 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha + (1-2\eta\mu^2\alpha)\eta\mu\alpha$
$= 2\eta\mu\alpha(1-\eta\mu^2\alpha) + (1-2\eta\mu^2\alpha)\eta\mu\alpha$
$= 2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = \mathbf{3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha}$

ii) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu(2\alpha+\alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 2\alpha\eta\mu\alpha$
$= (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1)\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$
$= (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1)\sigma\upsilon\nu\alpha - 2(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$
$= 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha = \mathbf{4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha}$

2ο Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία α με $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$ **ισχύει:**

i) $\eta\mu 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$, έχουμε:

i) $\eta\mu 2\alpha = 2\cdot\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{2\cdot\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha} = \dfrac{\dfrac{2\cdot\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \dfrac{2\cdot\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

ii) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha} = \dfrac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

3ο Αν $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{3}{4}$ και $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, να βρεθεί η εφα.

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο (3) έχουμε:

$$\frac{3}{4} = \frac{2\cdot\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha} \Leftrightarrow 8\cdot\varepsilon\varphi\alpha = 3-3\cdot\varepsilon\varphi^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 3\varepsilon\varphi^2\alpha+8\cdot\varepsilon\varphi\alpha-3=0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \frac{-8\pm 10}{6} \qquad [\text{αφού } \Delta=100]$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi\alpha = -3$$

Από τις τιμές της εφα που βρήκαμε δεκτή είναι μόνο η -3, αφού $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

4ο Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\varphi^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) = \dfrac{1-\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{1+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)} = \frac{1-\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x}, \quad \text{αφού} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) = \eta\mu 2x$$

5ο Να λυθεί η εξίσωση: $2-\eta\mu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο (5) έχουμε:

$$2-\eta\mu^2 x = 2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2-\eta\mu^2 x = 1+\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow 2-(1-\sigma\upsilon\nu^2 x) = 1+\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

6ο Να εκφρασθεί το $8\cdot\sigma\upsilon\nu^4\alpha$ ως συνάρτηση του συν2α και του συν4α

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με τον τύπο (5) έχουμε:

$$8\cdot\sigma\upsilon\nu^4\alpha = 8\cdot(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2 = 8\cdot\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}\right)^2 = 8\cdot\frac{1+2\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha}{4} =$$

$$= 2+4\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\cdot\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha = 2+4\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 1 + \sigma\upsilon\nu 4\alpha = 3+4\cdot\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 4\alpha$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $2\eta\mu\frac{3\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$ **ii)** $1-2\eta\mu^2\frac{\pi}{12}$ **iii)** $2\sigma\upsilon\nu^2 135^\circ - 1$ **iv)** $\frac{2\varepsilon\varphi 75^\circ}{1-\varepsilon\varphi^2 75^\circ}$

2. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $2\cdot\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ **ii)** $2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-1$ **iii)** $\frac{2\cdot\varepsilon\varphi 3\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2 3\alpha}$

3. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ **ii)** $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1-\eta\mu^2\alpha} = 2\varepsilon\varphi\alpha$

iii) $\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = 2\cdot\sigma\varphi 2\alpha$ **iv)** $\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \frac{2}{\eta\mu 2\alpha}$

4. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του 2α, αν:

i) $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{4}{5}$ και $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ **ii)** $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

5. Να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi(\alpha+2\beta)$, αν $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{4}$ και $\varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{3}$

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^3\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu^3\alpha\eta\mu\alpha=\frac{1}{2}\cdot\eta\mu2\alpha$ **ii)** $\eta\mu2\alpha\varepsilon\varphi\alpha+2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha=2$

iii) $\frac{\eta\mu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$ **iv)** $\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha+\eta\mu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha+\eta\mu2\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu2x-\eta\mu x-1=0$ **ii)** $\eta\mu2x-2\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x-1=0$

8. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\pi}{16}$.

9. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $\frac{\alpha}{2}$,αν:

i) $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{5}{13}$ και $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{3}{5}$ και $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu2x+2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}=0$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu x-2\cdot\eta\mu^2\frac{x}{2}=0$

iii) $2-\sigma\upsilon\nu^2x=4\cdot\eta\mu^2\frac{x}{2}$ **iv)** $\sigma\upsilon\nu^2x-1=2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $0\le\alpha<\frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha=\sqrt{1-\eta\mu2\alpha}$.

2. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu^2\alpha+1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}=2\cdot\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

3. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\frac{\pi}{8}-\sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{8}$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi2\alpha}{2}$ **ii)** $\frac{3-4\cdot\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu4\alpha}{3+4\cdot\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu4\alpha}=\varepsilon\varphi^4\alpha$

5. Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi(45^\circ-\alpha)=\frac{\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\eta\mu2\alpha}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu2\alpha}-\varepsilon\varphi2\alpha$

και με τη βοήθεια αυτού του τύπου να υπολογίσετε την εφ 15°.

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\varepsilon\varphi2x=2\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **ii)** $\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi2x=-3$

7. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu4\alpha=8\cdot\sigma\upsilon\nu^4\alpha-8\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha+1$

8. Να αποδείξετε ότι:

i) $\text{συν}^4\frac{\pi}{8}+\text{συν}^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}$ **ii)** $\text{ημ}^4\frac{\pi}{8}+\text{ημ}^4\frac{3\pi}{8}=\frac{3}{4}$

iii) $8\cdot\text{ημ}^2\alpha\text{συν}^2\alpha=1-\text{συν}4\alpha$

9. Αν $\text{συν}x=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $\text{συν}y=\frac{\beta}{\gamma+\alpha}$ και $\text{συν}z=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}+\varepsilon\varphi^2\frac{y}{2}+\varepsilon\varphi^2\frac{z}{2}=1$$

3.8 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Σε αρκετές εφαρμογές της Τριγωνομετρίας χρειάζεται το γινόμενο τριγωνομετρικών αριθμών να μετασχηματισθεί σε άθροισμα ή αντιστρόφως το άθροισμα σε γινόμενο.

Στην παράγραφο αυτή θα αναζητήσουμε τύπους με τους οποίους γίνονται οι παραπάνω μετασχηματισμοί.

Μετασχηματισμός γινομένου σε άθροισμα

Από τις γνωστές μας ισότητες:

$$\text{ημ}(\alpha+\beta)=\text{ημασυνβ}+\text{συναημβ}$$

$$\text{ημ}(\alpha-\beta)=\text{ημασυνβ}-\text{συναημβ}$$

με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$\text{ημ}(\alpha+\beta)+\text{ημ}(\alpha-\beta)=2\text{ημασυνβ}$$

δηλαδή:

$$2\text{ημασυνβ}=\text{ημ}(\alpha+\beta)+\text{ημ}(\alpha-\beta) \quad (1)$$

ενώ από τις:

$$\text{συν}(\alpha-\beta)=\text{συνασυνβ}+\text{ημαημβ}$$
$$\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συνασυνβ}-\text{ημαημβ}$$

με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$2\text{συνασυνβ}=\text{συν}(\alpha-\beta)+\text{συν}(\alpha+\beta) \quad (2)$$

$$2\text{ημαημβ}=\text{συν}(\alpha-\beta)-\text{συν}(\alpha+\beta) \quad (3)$$

Μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο

Με τη βοήθεια των προηγούμενων τριών τύπων μπορούμε να μετασχηματίσουμε το άθροισμα τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενο. Πράγματι, αν θέσουμε

$$\alpha+\beta=A \qquad \text{και} \qquad \alpha-\beta=B\,,$$

τότε έχουμε $A+B=\alpha+\beta+\alpha-\beta=2\alpha,$ οπότε $\alpha=\dfrac{A+B}{2}$

$A-B=\alpha+\beta-\alpha+\beta=2\beta,$ οπότε $\beta=\dfrac{A-B}{2}$

Έτσι ο παραπάνω τύπος (1) γράφεται $2\eta\mu\dfrac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{A-B}{2}=\eta\mu A+\eta\mu B.$ Δηλαδή έχουμε:

$$\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \tag{4}$$

Αν τώρα στον τύπο (4) αντικαταστήσουμε το B με $-B,$ βρίσκουμε:

$$\eta\mu A-\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2} \tag{5}$$

Ομοίως, από τον τύπο (2), βρίσκουμε:

$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B=2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \tag{6}$$

ενώ από τον τύπο (3) βρίσκουμε $2\eta\mu\dfrac{A+B}{2}\eta\mu\dfrac{A-B}{2}=\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A,$ οπότε

$$\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B=-2\eta\mu\frac{A-B}{2}\eta\mu\frac{A+B}{2} \tag{7}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° Να λυθεί η εξίσωση: ημ6xσυν3x=ημ5xσυν4x (1)

ΛΥΣΗ

Έχουμε: (1) $\Leftrightarrow 2\cdot \eta\mu 6x\sigma\upsilon\nu 3x = 2\cdot \eta\mu 5x\sigma\upsilon\nu 4x$

$\Leftrightarrow \eta\mu 9x + \eta\mu 3x = \eta\mu 9x + \eta\mu x$

$\Leftrightarrow \eta\mu 3x = \eta\mu x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + x \\ \quad \text{ή} \qquad\quad ,\kappa\in\mathbb{Z} \\ 3x = 2\kappa\pi + \pi - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi \\ \quad \text{ή} \quad ,\kappa\in\mathbb{Z} \\ x = \dfrac{2\kappa\pi+\pi}{4} \end{cases}$$

2° Να λυθεί η εξίσωση: συν3x+συνx=ημ2x (1)

ΛΥΣΗ

Έχουμε: (1) $\Leftrightarrow 2\cdot \sigma\upsilon\nu\dfrac{3x+x}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{3x-x}{2} = 2\cdot \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow 2\cdot \sigma\upsilon\nu 2x\sigma\upsilon\nu x = 2\cdot \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu x) = 0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0$ (2) ή $\sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu x$ (3)

Αλλά (2) $\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{2}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

και $(3) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \\ \quad \text{ή} \qquad\qquad , \quad \kappa\in\mathbb{Z} \\ 2x = 2\kappa\pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \quad \text{ή} \qquad , \quad \kappa\in\mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4\kappa\pi+\pi}{6} \\ \quad \text{ή} \qquad\qquad , \quad \kappa\in\mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

3° Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=2\cdot\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+2\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

$$=2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\quad\left(\text{γιατί }\frac{A+B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\right]$$

$$=2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}2\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τα γινόμενα:

i) $\sigma\upsilon\nu75^\circ\sigma\upsilon\nu15^\circ$ **ii)** $\eta\mu105^\circ\sigma\upsilon\nu15^\circ$

iii) $\eta\mu\frac{13\pi}{12}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}$ **iv)** $\eta\mu\frac{11\pi}{12}\eta\mu\frac{7\pi}{12}$

2. Να μετατρέψετε σε αθροίσματα τριγωνομετρικών αριθμών τα παρακάτω γινόμενα:

i) $2\cdot\eta\mu x\sigma\upsilon\nu2x$ **ii)** $2\cdot\eta\mu4x\eta\mu2x$ **iii)** $2\cdot\sigma\upsilon\nu3x\sigma\upsilon\nu5x$

iv) $\sigma\upsilon\nu6x\eta\mu2x$ **v)** $\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu3x\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu6x\sigma\upsilon\nu2x$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu3x\sigma\upsilon\nu2x=\eta\mu2x\eta\mu x$

4. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τα αθροίσματα:

i) $\eta\mu75^\circ+\eta\mu15^\circ$ **ii)** $\eta\mu\frac{11\pi}{12}-\eta\mu\frac{5\pi}{12}$

iii) $\sigma\upsilon\nu40^\circ+\sigma\upsilon\nu80^\circ+\sigma\upsilon\nu160^\circ$

5. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τριγωνομετρικών αριθμών τα παρακάτω αθροίσματα:

i) $\eta\mu4x+\eta\mu2x$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu5x-\sigma\upsilon\nu3x$ **iii)** $\sigma\upsilon\nu3x+\sigma\upsilon\nu x$

iv) $1+\eta\mu x$ **v)** $1+\sigma\upsilon\nu x$

6. Αν Β και Γ είναι οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 2\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)$ **ii)** $\eta\mu B - \eta\mu\Gamma = \sqrt{2}\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}$

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha}{\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$ **ii)** $\dfrac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha} = \varepsilon\varphi 3\alpha$

iii) $\dfrac{\eta\mu\alpha\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha\eta\mu 6\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 6\alpha} = \varepsilon\varphi 5\alpha$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu 3x - \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu 2x$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu 5x - \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 3x$

iii) $\eta\mu 3x + \eta\mu 6x + \eta\mu 9x = 0$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $2\cdot\eta\mu 50^\circ - \dfrac{1}{2\cdot\sigma\upsilon\nu 20^\circ} = 1$

ii) $2\cdot\eta\mu 52^\circ\eta\mu 68^\circ - 2\cdot\eta\mu 47^\circ\sigma\upsilon\nu 77^\circ - 2\cdot\sigma\upsilon\nu 65^\circ\sigma\upsilon\nu 81^\circ = 1$

2. Αν για τις οξείες γωνίες Β και Γ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $4\cdot\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma = 1$, να αποδείξετε ότι Β = 30°.

3. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu\alpha\eta\mu\beta \le \eta\mu^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \le \sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta}{2} \le \eta\mu\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, για οποιαδήποτε $\alpha,\beta\in[0,\pi]$

ii) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta}{2} \le \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, για οποιαδήποτε $\alpha,\beta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

i) $\eta\mu A + \eta\mu(B-\Gamma) = 2\cdot\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$

ii) $\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma) - \sigma\upsilon\nu A = 2\cdot\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$

iii) $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=1+4\cdot\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$

6. Να αποδείξετε ότι για τις οξείες γωνίες Β, Γ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:

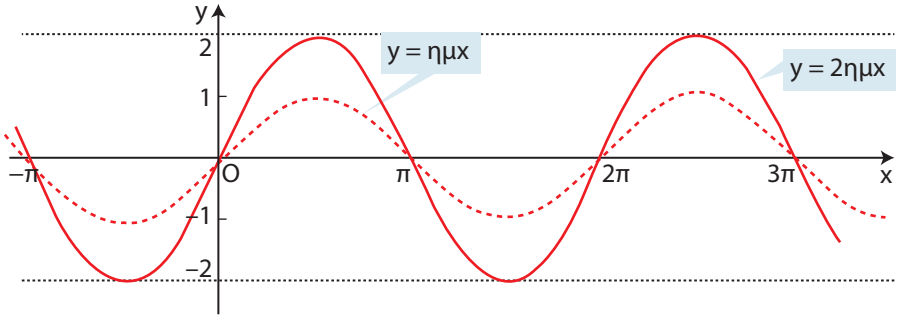
$$2\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}-1=\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$$

7. Αν για τις γωνίες Α, Β, Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu A=\sigma\upsilon nB+\sigma\upsilon n\Gamma$, να αποδείξετε ότι $B=90^\circ$ ή $\Gamma=90^\circ$ και αντιστρόφως.

3.9 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x)=αημx+βσυνx

Στην προηγούμενη τάξη είδαμε ότι μια συνάρτηση της μορφής f(x)=ρημx, ρ > 0 είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με ρ και ελάχιστο ίσο με −ρ. Η γραφική της παράσταση είναι μια **ημιτονοειδής καμπύλη**.

Μια τέτοια συνάρτηση είναι, π.χ., και η f(x)=2·ημx, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Η συνάρτηση f(x)=ρημ(x+φ)

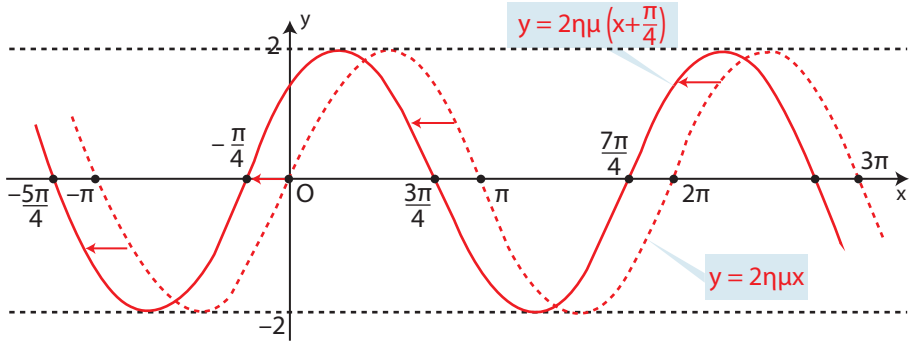
Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=2\cdot\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή προκύπτει από την $g(x)=2\cdot\eta\mu x$ αν, όπου x, θέσουμε $x+\frac{\pi}{4}$, δηλαδή ισχύει $f(x)=g\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες, προς τα αριστερά.

Όμως η συνάρτηση $g(x)=2\cdot\eta\mu x$ έχει περίοδο 2π, μέγιστο ίσο με 2 και ελάχιστο ίσο με −2.

Επομένως η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με 2 και ελάχιστο ίσο με -2.

Ο σταθερός αριθμός $\frac{\pi}{4}$ λέγεται **διαφορά φάσεως** των καμπυλών $y = 2\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ και $y = 2\eta\mu x$. Οι καμπύλες αυτές φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Γενικότερα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho\eta\mu(x+\varphi)$, $\rho>0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \rho\eta\mu x$. Επομένως:

Η συνάρτηση f(x)=ρημ(x+φ) είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με ρ και ελάχιστο ίσο με $-\rho$.

Η συνάρτηση f(x)=αημx+βσυνx, α, β ≠ 0

Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση f(x)=ημx+συνx. Για να τη μελετήσουμε θα προσπαθήσουμε να τη μετατρέψουμε σε άλλη συνάρτηση γνωστής μορφής.

Έχουμε:

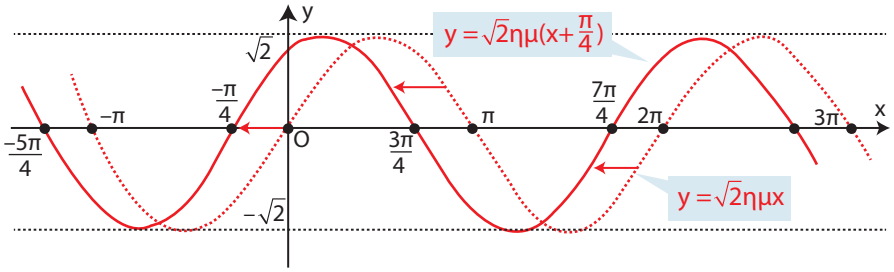
$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu x$$

$$= \eta\mu x + \frac{\eta\mu\frac{\pi}{4}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}\sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Επομένως $f(x) = \sqrt{2}\cdot\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με $\sqrt{2}$ και ελάχιστο ίσο με $-\sqrt{2}$.

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\sqrt{2}\cdot\eta\mu x$ κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες προς τα αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



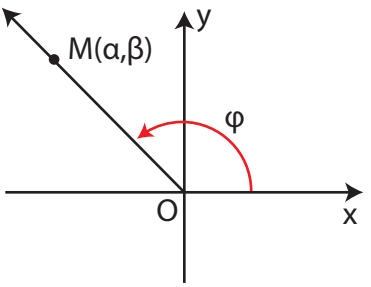
Γενικότερα θα αποδείξουμε ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν $\alpha,\beta\neq 0$, τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\rho\eta\mu(x+\varphi)$$

όπου $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ και $\varphi\in\mathbb{R}$ με $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\alpha}{\rho}\\ \eta\mu\varphi=\frac{\beta}{\rho}\end{cases}$

Έστω το σημείο Μ(α,β) και φ μια από τις γωνίες με αρχική πλευρά Ox και τελική πλευρά ΟΜ. Τότε έχουμε:



$$\rho=(OM)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

και $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{\alpha}{\rho} & \text{ή} \quad \alpha=\rho\sigma\upsilon\nu\varphi\\ \eta\mu\varphi=\frac{\beta}{\rho} & \text{ή} \quad \beta=\rho\eta\mu\varphi\end{cases}$

Επομένως $\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=\rho\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu x+\rho\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu x$

$=\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu x+\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu x)$

$=\rho\eta\mu(x+\varphi)$

Η μελέτη λοιπόν της συνάρτησης f(x)=αημx+βσυνx, $\alpha,\beta\neq 0$ μπορεί να γίνει με τη μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\rho\eta\mu(x+\varphi)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° i) Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=2\cdot\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

ii) Ομοίως η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu 2x-\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x.$

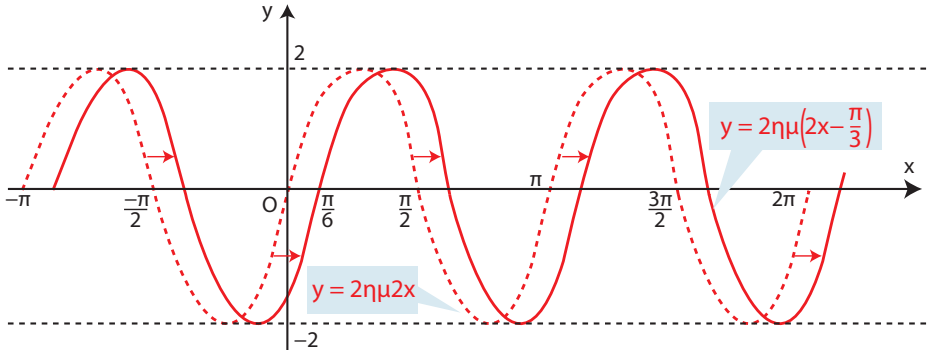
ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση f γράφεται $f(x)=2\cdot\eta\mu\left(2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή προκύπτει από τη συνάρτηση $g(x)=2\cdot\eta\mu 2x$ αν, όπου x θέσουμε $x-\frac{\pi}{6}$.

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $\frac{\pi}{6}$ μονάδες προς τα δεξιά.

Όμως η συνάρτηση $g(x)=2\cdot\eta\mu 2x$ έχει περίοδο $\frac{2\pi}{2}=\pi$, μέγιστο 2 και ελάχιστο -2.

Άρα και η f είναι περιοδική με περίοδο π, μέγιστο 2 και ελάχιστο -2. Οι γραφικές παραστάσεις των f και g φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ii) Η παράσταση $\eta\mu 2x-\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x$ είναι της μορφής $\alpha\eta\mu t+\beta\sigma\upsilon\nu t$ με α=1, $\beta=-\sqrt{3}$ και όπου t το 2x. Επομένως παίρνει τη μορφή $\rho\eta\mu(2x+\varphi)$.

Έχουμε $\rho=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$ και $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{1}{2}\\ \eta\mu\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$, οπότε ένα $\varphi=-\frac{\pi}{3}$

Άρα $$f(x)=\eta\mu 2x-\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x=2\cdot\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Τη συνάρτηση αυτή όμως τη μελετήσαμε προηγουμένως.

2° Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu 4x+\sigma\upsilon\nu 4x=\sqrt{2}$

ΛΥΣΗ

Το 1ο μέλος της εξίσωσης είναι της μορφής $\alpha\eta\mu t+\beta\sigma\upsilon\nu t$ με $\alpha=\sqrt{3}$, β=1 και όπου t το 4x. Επομένως παίρνει τη μορφή ρημ(4x+φ).

Έχουμε $\rho=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ και $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \eta\mu\varphi=\dfrac{1}{2}\end{cases}$, οπότε ένα $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

Άρα $\sqrt{3}\cdot\eta\mu 4x+\sigma\upsilon\nu 4x=2\cdot\eta\mu\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ και η εξίσωση γίνεται

$$2\cdot\eta\mu\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\eta\mu\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\eta\mu\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x+\dfrac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{4}\\ \quad\text{ή}\qquad\qquad,\quad\kappa\in\mathbb{Z}\\ 4x+\dfrac{\pi}{6}=2\kappa\pi+\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\kappa\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{48}\\ \quad\text{ή}\quad,\quad\kappa\in\mathbb{Z}\\ x=\kappa\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{7\pi}{48}\end{cases}$$

3° Δυο ρεύματα με την ίδια κυκλική συχνότητα ω και με εντάσεις $I_1=2\cdot\eta\mu\omega t$ και $I_2=2\cdot\eta\mu\left(\omega t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ διαρρέουν έναν αγωγό. Να δειχθεί ότι το άθροισμά τους έχει την ίδια κυκλική συχνότητα.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $I_{ολ}=I_1+I_2=2\cdot\eta\mu\omega t+2\cdot\eta\mu\left(\omega t+\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$=2\cdot\eta\mu\omega t+2\cdot\left(\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu\omega t\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=2\cdot\eta\mu\omega t+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\eta\mu\omega t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t\right)$$

$$= \eta\mu\omega t + \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t$$
$$= 2\cdot\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right),$$

που σημαίνει ότι το $I_{ολ}$ έχει την ίδια κυκλική συχνότητα ω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή των παρακάτω συναρτήσεων και στη συνέχεια να τις παραστήσετε γραφικά:

i) $f(x) = 2\cdot\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **ii)** $f(x) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

2. Να γράψετε στη μορφή $f(x) = \rho\eta\mu(x+\varphi)$ τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = \sqrt{3}\cdot\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ **ii)** $f(x) = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

iii) $f(x) = -\eta\mu x - \sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **iv)** $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις της άσκησης 2.

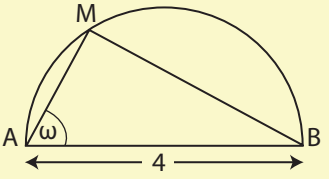
4. Να λύσετε τις εξισώσεις: **i)** $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 2$,

ii) $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 1$, **iii)** $\sqrt{2}\cdot\eta\mu x + \sqrt{6}\cdot\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τη γωνία ω του διπλανού σχήματος, έτσι ώστε να ισχύει:

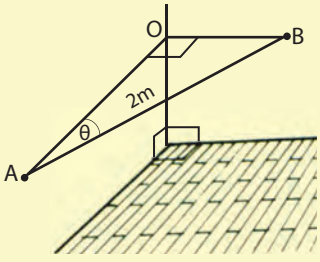
$(MA) + (MB) = 2\sqrt{6}$



2. Μια μπάρα ΑΒ μήκους 2m τοποθετείται οριζόντια μεταξύ δυο κάθετων τοίχων. Για μεγαλύτερη αντοχή πρέπει να τοποθετηθεί, έτσι ώστε το (ΟΑ)+(ΟΒ) να γίνει μέγιστο.

i) Να εκφράσετε το (ΟΑ)+(ΟΒ) ως συνάρτηση του θ.

ii) Να βρείτε την τιμή του θ για την οποία το (ΟΑ)+(ΟΒ) γίνεται μέγιστο και να προσδιορίσετε το μέγιστο αυτό.

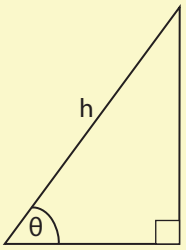


3. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

i) $f(x)=5\cdot\eta\mu x+12\cdot\sigma\upsilon\nu x+3$ **ii)** $f(x)=4\cdot\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$

4. Να λύσετε την εξίσωση: $2\cdot\eta\mu x(\sqrt{3}\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)=\sqrt{2}-1$

5. Με συρματόπλεγμα μήκους 40m περιφράσσουμε τμήμα γης σχήματος ορθογωνίου τριγώνου. Αν η υποτείνουσα είναι h m και η μια οξεία γωνία θrad (Σχήμα).



i) Να αποδείξετε ότι:

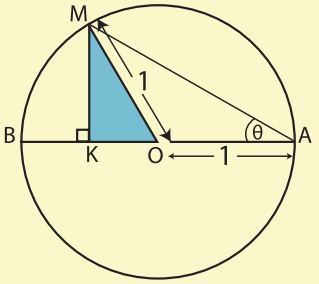
$$h=\frac{40}{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta+1}$$

ii) Για ποια τιμή του θ το h παίρνει τη μικρότερη τιμή και ποια είναι αυτή;

6. Στο διπλανό σχήμα:

i) Να δείξετε ότι η περίμετρος P του τριγώνου ΜΚΟ ισούται με $P=1+\eta\mu2\theta+\sigma\upsilon\nu2\theta$.

ii) Για ποια τιμή του θ το P παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή και ποια είναι αυτή;



3.10 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Το κλασικό πρόβλημα της Τριγωνομετρίας, από το οποίο πήρε και το όνομά της, είναι η **επίλυση** τριγώνου, δηλαδή ο υπολογισμός των άγνωστων κύριων στοιχείων ενός τριγώνου, όταν δίνονται επαρκή στοιχεία του.

Η επίλυση τριγώνου μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των παρακάτω δυο βασικών θεωρημάτων, που είναι γνωστά το ένα ως **νόμος των ημιτόνων** και το άλλο ως **νόμος των συνημιτόνων**.

Νόμος των ημιτόνων

ΘΕΩΡΗΜΑ Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

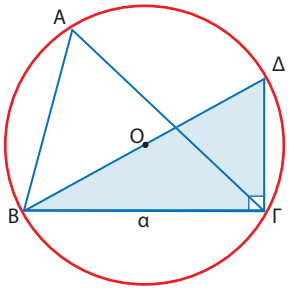
$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R$$

όπου R, η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

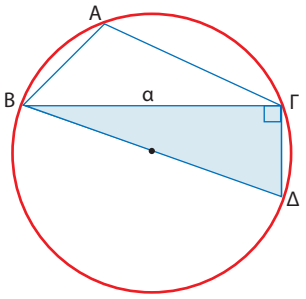
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω (O,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ. Αν φέρουμε τη διάμετρο ΒΔ και τη χορδή ΓΔ, τότε σχηματίζεται τρίγωνο ΓΒΔ που είναι ορθογώνιο στο Γ. Επομένως έχουμε:

$$\eta\mu\Delta = \frac{(B\Gamma)}{(B\Delta)} = \frac{\alpha}{2R}, \quad \text{οπότε} \quad \frac{\alpha}{\eta\mu\Delta} = 2R \qquad (1)$$



Σχήμα 1

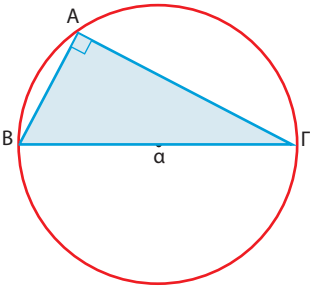


Σχήμα 2

Είναι όμως Δ=Α (Σχ. 1) ή $\Delta + A = 180^\circ$ (Σχ. 2), οπότε ημΔ = ημΑ. Επομένως η (1) γράφεται

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R$$

Αν $A = 90^\circ$ τότε έχουμε: ημΑ=1 και α=2R (Σχ. 3). Επομένως και στην περίπτωση αυτή ισχύει ισότητα $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R.$



Σχήμα 3

Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = 2R \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R$$

Επομένως: $$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R$$

ΣΧΟΛΙΟ Με το νόμο των ημιτόνων μπορούμε εύκολα να επιλύσουμε ένα τρίγωνο, όταν δίνονται:

i) Μια πλευρά και δυο γωνίες του ή

ii) Δυο πλευρές και μια από τις μη περιεχόμενες γωνίες του.

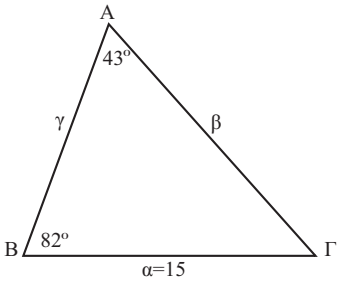
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με α = 15, Α = 43° και Β = 82°.

ΛΥΣΗ

Επειδή $A+B+\Gamma=180^\circ$, έχουμε: $\Gamma=180^\circ-A-B=180^\circ-43^\circ-82^\circ=55^\circ$

Έτσι, σύμφωνα με το νόμο των ημιτόνων έχουμε:



$$\frac{15}{\eta\mu 43^\circ}=\frac{\beta}{\eta\mu 82^\circ}=\frac{\gamma}{\eta\mu 55^\circ}$$

οπότε:

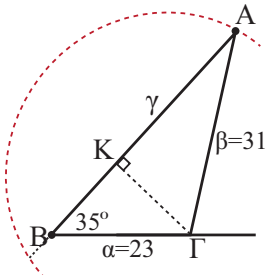
$$\beta=\frac{15\cdot\eta\mu 82^\circ}{\eta\mu 43^\circ}\simeq\frac{15\cdot 0,9903}{0,6820}\simeq 22$$

$$\gamma=\frac{15\cdot\eta\mu 55^\circ}{\eta\mu 43^\circ}\simeq\frac{15\cdot 0,8192}{0,6820}\simeq 18$$

2° Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με α = 23, β = 31 και Β = 35°

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το νόμο των ημιτόνων έχουμε:



$$\frac{23}{\eta\mu A}=\frac{31}{\eta\mu 35^\circ}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}\qquad(1)$$

οπότε $\eta\mu A=\frac{23\cdot\eta\mu 35^\circ}{31}\simeq\frac{23\cdot 0,5736}{31}\simeq 0,4255$

Άρα

$$A\simeq 25^\circ \quad \text{ή} \quad A\simeq 155^\circ$$

Επειδή όμως α < β, θα είναι και Α < Β. Επομένως από τις παραπάνω τιμές της Α δεκτή είναι μόνο η $A\simeq 25^\circ$.

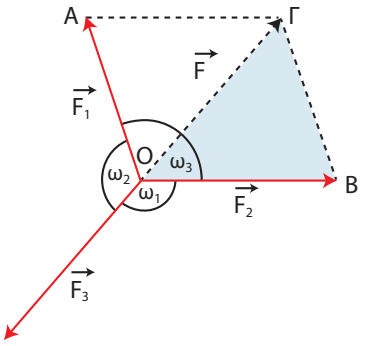
Έτσι έχουμε

$$\Gamma=180^\circ-A-B\simeq 180^\circ-25^\circ-35^\circ=120^\circ$$

οπότε, λόγω της (1), ισχύει

$$\frac{31}{\eta\mu 35^\circ}=\frac{\gamma}{\eta\mu 120^\circ}\Leftrightarrow\gamma=\frac{31\cdot\eta\mu 120^\circ}{\eta\mu 35^\circ}\simeq\frac{31\cdot 0,8660}{0,5736}\simeq 47$$

3° Σε ένα υλικό σημείο Ο εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις που έχουν μέτρα F_1, F_2 και F_3 αντιστοίχως και σχηματίζουν ανά δύο γωνίες ω_1, ω_2 και ω_3, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν το υλικό σημείο ισορροπεί, να αποδειχθεί ότι:



$$\frac{F_1}{\eta\mu\omega_1}=\frac{F_2}{\eta\mu\omega_2}=\frac{F_3}{\eta\mu\omega_3}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή το σημείο Ο ισορροπεί, η συνισταμένη $\vec{F}$ των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ θα έχει ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και ίδιο μέτρο με την $\vec{F}_3$. Επομένως από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΟΒΓ έχουμε:

$$\frac{(B\Gamma)}{\eta\mu B\hat{O}\Gamma}=\frac{(OB)}{\eta\mu B\hat{\Gamma}O}=\frac{(O\Gamma)}{\eta\mu O\hat{B}\Gamma}\Leftrightarrow\frac{F_1}{\eta\mu\omega_1}=\frac{F_2}{\eta\mu\omega_2}=\frac{F_3}{\eta\mu\omega_3},$$

αφού $B\hat{O}\Gamma=180^\circ-\omega_1$, $B\hat{\Gamma}O=180^\circ-\omega_2$ και $O\hat{B}\Gamma=180^\circ-\omega_3$.

Νόμος των συνημιτόνων

Όταν είναι γνωστές οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου ή οι δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία τους δεν μπορούμε εύκολα με μόνο το νόμο των ημιτόνων να υπολογίσουμε τα άλλα στοιχεία του. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως **νόμος των συνημιτόνων**.

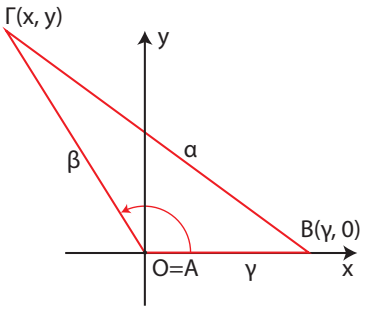
ΘΕΩΡΗΜΑ Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$
$$\beta^2=\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ*

Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη ισότητα. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ισότητες.

Στο επίπεδο του τριγώνου θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Α και θετικό ημιάξονα των x την ημιευθεία ΑΒ. Έτσι οι συντεταγμένες του Β θα είναι (γ,0), ενώ για τις συντεταγμένες (x, y) του Γ θα ισχύει



$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{x}{\beta} \quad \text{και} \quad \eta\mu A = \frac{y}{\beta}$$

ή ισοδύναμα

$$x = \beta\sigma\upsilon\nu A \ \text{ και } \ y = \beta\eta\mu A \qquad (1)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τύπο της απόστασης για τα σημεία Β(γ,0) και Γ(x,y), βρίσκουμε ότι:

$$\alpha = (B\Gamma) = \sqrt{(x-\gamma)^2 + (y-0)^2}$$

οπότε, λόγω της (1), έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^2 = (x-\gamma)^2 + y^2 &= (\beta\sigma\upsilon\nu A - \gamma)^2 + (\beta\eta\mu A)^2 \\ &= \beta^2\sigma\upsilon\nu^2 A + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A + \beta^2\eta\mu^2 A \\ &= \beta^2(\sigma\upsilon\nu^2 A + \eta\mu^2 A) + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \\ &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A.\end{aligned}$$

ΣΧΟΛΙΟ Είναι φανερό ότι με το νόμο των συνημιτόνων μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε μια οποιαδήποτε πλευρά ενός τριγώνου, αρκεί να δοθούν οι άλλες δύο και η περιεχόμενή τους γωνία. Με τον ίδιο νόμο μπορούμε επιπλέον να υπολογίσουμε και τις γωνίες ενός τριγώνου, του οποίου είναι γνωστές και οι τρεις πλευρές, αφού οι παραπάνω ισότητες γράφονται:

$$\sigma\upsilon\nu A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}, \quad \sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\gamma\alpha}, \quad \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με α = 35, β = 20 και γ = 42

ΛΥΣΗ

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

- $35^2 = 20^2 + 42^2 - 2\cdot 20\cdot 42\,\text{συν}A$, οπότε $\text{συν}A = \dfrac{20^2+42^2-35^2}{2\cdot 20\cdot 42} \simeq 0{,}5589$

  Άρα $A \simeq 56^\circ$

- $20^2 = 35^2 + 42^2 - 2\cdot 35\cdot 42\,\text{συν}B$, οπότε $\text{συν}B = \dfrac{35^2+42^2-20^2}{2\cdot 35\cdot 42} \simeq 0{,}8806$

  Άρα $B \simeq 28^\circ$. Άρα $\Gamma \simeq 96^\circ$

2° Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με β= 20, γ = 42 και Α = 56°

ΛΥΣΗ

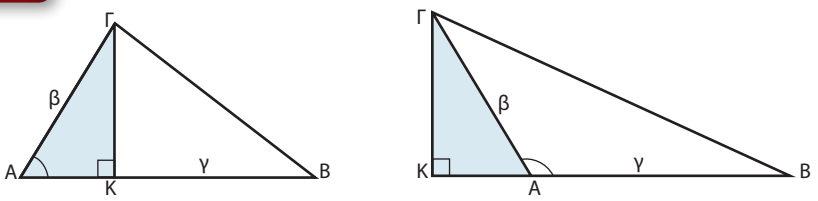
Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$\alpha^2 = 20^2 + 42^2 - 2\cdot 20\cdot 42\,\text{συν}56^\circ \simeq 1225$, οπότε $\alpha \simeq 35$

Έτσι γνωρίζουμε και τις τρεις πλευρές του τριγώνου, οπότε αναγόμαστε στο προηγούμενο πρόβλημα.

3° Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο: $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Αν φέρουμε το ύψος ΓΚ του τριγώνου, έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}(AB)\cdot(\Gamma K) = \frac{1}{2}(AB)\cdot(A\Gamma)\cdot\eta\mu A$$

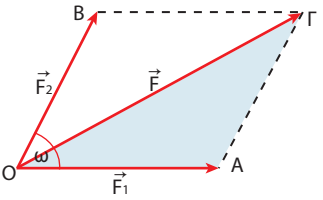
$$= \frac{1}{2}\gamma\cdot\beta\cdot\eta\mu A$$

$$\left[\text{γιατί } \eta\mu A = \frac{(\Gamma K)}{(A\Gamma)}\right]$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που Α = 90°.

4° Σε ένα υλικό σημείο Ο εφαρμόζονται δύο δυνάμεις που έχουν μέτρα F_1 και F_2 αντίστοιχα και σχηματίζουν γωνία ω. Να αποδειχθεί ότι το μέτρο F της συνισταμένης τους δίνεται από τον τύπο:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\text{συν}\omega$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

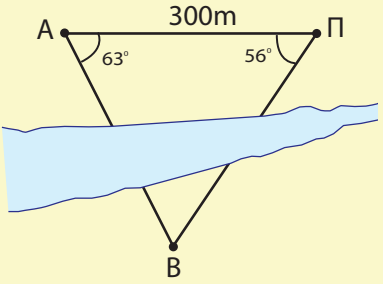
Επειδή $(OA)=F_1$, $(A\Gamma)=F_2$ και $(O\Gamma)=F$, στο τρίγωνο ΟΑΓ έχουμε:

$$\begin{aligned} F^2=(O\Gamma)^2 &= (OA)^2+(A\Gamma)^2-2(OA)(A\Gamma)\text{συν}A \\ &= F_1^2+F_2^2-2F_1\cdot F_2\cdot\text{συν}(180^\circ-\omega) \\ &= F_1^2+F_2^2+2F_1\cdot F_2\cdot\text{συν}\omega \end{aligned}$$

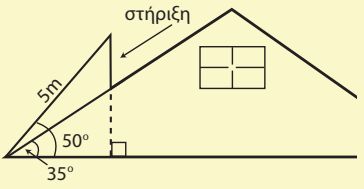
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δυο πύργοι Α και Β βρίσκονται εκατέρωθεν ενός ποταμού. Ένας παρατηρητής Π βρίσκεται προς το ίδιο μέρος του ποταμού με τον πύργο Α. Αν στο τρίγωνο ΠΑΒ είναι ΠΑ = 300m, Α = 63° και Π = 56°, να βρείτε την απόσταση των πύργων Α και Β.



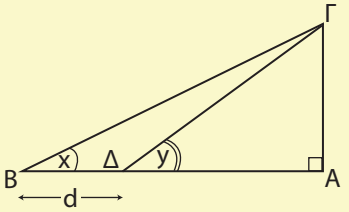
2. Ένας συλλέκτης ηλιακής ακτινοβολίας μήκους 5 m είναι τοποθετημένος στην οροφή ενός κτιρίου, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του βραχίονα με τον οποίο στηρίζεται ο συλλέκτης.



3. Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι:

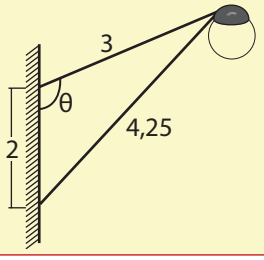
i) $\Gamma\Delta=\dfrac{d\eta\mu x}{\eta\mu(y-x)}$,

ii) $A\Gamma=\dfrac{d\eta\mu x\cdot\eta\mu y}{\eta\mu(y-x)}$

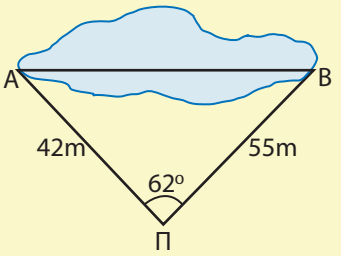


4. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με α = 30, β=10 και $\hat{B}=31^\circ$.

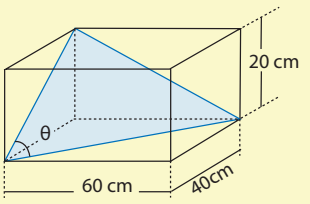
5. Να υπολογίσετε τη γωνία θ του διπλανού σχήματος.



6. Να υπολογίσετε το μήκος του έλους του διπλανού σχήματος.



7. Να υπολογίσετε τη γωνία θ του ορθογώνιου κουτιού του διπλανού σχήματος:



8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα

$$\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta}+\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

9. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα:

$$\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma\sigma\upsilon\nu B=\alpha$$

10. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα βσυνΓ = γσυνΒ, να αποδείξετε ότι β=γ και αντιστρόφως.

11. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα α = 2βσυνΓ, να αποδείξετε ότι β = γ και αντιστρόφως.

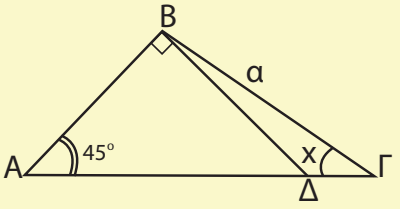
Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

*** 1.** Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα Β = 2Α, να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta}{2\alpha}$ **ii)** $\beta^2-\alpha^2=\alpha\gamma$

2. Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι:

$$\Gamma\Delta=\alpha(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$$



3. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει μια από τις ισότητες:

i) $\beta=\alpha\eta\mu B$, **ii)** $\alpha\eta\mu A=\beta\eta\mu B+\gamma\eta\mu\Gamma$,

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

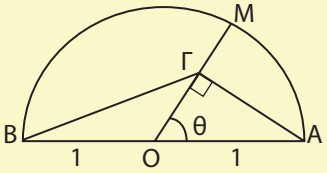
4. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα ασυνΑ = βσυνΒ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ ισχύει η ισότητα:

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

6. Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι:

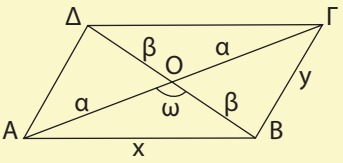
$$(B\Gamma)^2=\frac{5+3\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}$$



7. Να αποδείξετε ότι για το διπλανό παραλληλόγραμμο ισχύουν οι ισότητες:

i) $x^2+y^2=2\alpha^2+2\beta^2$

ii) $(AB\Gamma\Delta)=2\alpha\beta\eta\mu\omega$



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ' ΟΜΑΔΑΣ)

1. Σε τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ το ύψος του ΑΔ είναι ίσο με το μισό της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=2\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$ και $\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma=2$.

2. Αν για τις γωνίες ενός τριγώνου $A\hat{B}\Gamma$ ισχύει $\frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma}=\frac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2\Gamma}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

3. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ (x,y) του επιπέδου με $x=1+2\sigma\upsilon\nu t$, $y=3+2\eta\mu t$ βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Κ(1,3) και ακτίνας ρ = 2.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

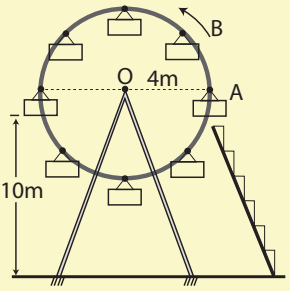
i) $\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}=4$ **ii)** $\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\varphi x}{1-\eta\mu x}=3$

5. i) Αν $0<x<\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x\geq 2$

ii) Αν $0\leq\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta}<\varepsilon\varphi\beta$

6. Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=1$ στο διάστημα (4π, 5π).

7. Σε ένα λούνα-παρκ ο περιστρεφόμενος τροχός έχει ακτίνα 4m, το κέντρο του απέχει από το έδαφος 10m και όταν αρχίζει να κινείται εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 8 δευτερόλεπτα με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε το ύψος του βαγονιού Α από το έδαφος ύστερα από χρόνο 1sec, 2sec, 5sec και γενικότερα ύστερα από χρόνο t sec. Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα για το βαγόνι Β.



8. Να αποδείξετε ότι

i) $\sigma\varphi x - \varepsilon\varphi x = 2\cdot\sigma\varphi 2x$ **ii)** $\sigma\varphi x - 2\cdot\varepsilon\varphi 2x - 4\cdot\varepsilon\varphi x - 8\cdot\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x$

9. Με τη βοήθεια του τύπου $\eta\mu 3\alpha = 3\cdot\eta\mu\alpha - 4\cdot\eta\mu^3\alpha$ να λύσετε τις εξισώσεις: **i)** $8x^3 - 6x + \sqrt{2} = 0$ **ii)** $8x^3 - 6x - 1 = 0$

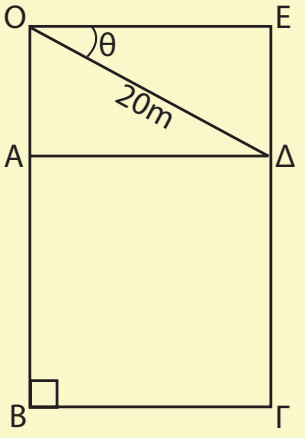
10. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων Μ(x,y), με x=συνθ και y = συν2θ+1, όπου $\theta \in [0,\pi]$, είναι το τόξο της παραβολής $y = 2x^2$, με $x \in [-1,1]$.

11. Με τη βοήθεια των τύπων $\eta\mu 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ και $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+\eta\mu x}{5+4\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in (-\pi,\pi)$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0,\dfrac{10}{9}]$.

12. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \dfrac{\eta\mu 2x}{\sqrt{2}+1} = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$

13. Ένα γκαράζ σχήματος ορθογωνίου έχει σχεδιασθεί, έτσι ώστε να αποτελείται από ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ και ένα ορθογώνιο ΟΑΔΕ με ΟΔ = 20m, όπως περιγράφει το διπλανό σχήμα. Για ποια τιμή της γωνίας θ rad το εμβαδό S m^2 του γκαράζ γίνεται μέγιστο;



Υπόδειξη

i) Να δείξετε ότι $S = 400\sigma\upsilon\nu^2\theta + 400\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$

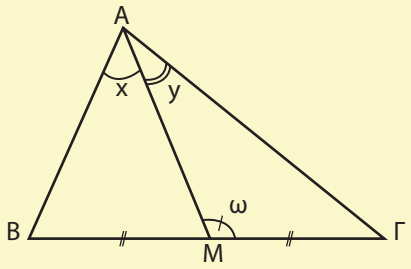
ii) Να εκφράσετε το S στη μορφή

$$S = \rho\eta\mu(2\theta + \varphi) + c$$

iii) Να βρείτε την τιμή του θ, για την οποία το S παίρνει τη μέγιστη τιμή, την οποία και να προσδιορίσετε.

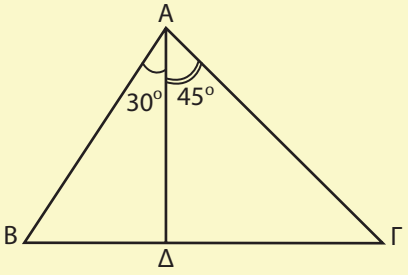
14. Δίνεται ένα τρίγωνο $A\hat{B}\Gamma$ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν $M\hat{A}B = x$, $M\hat{A}\Gamma = y$ και $A\hat{M}\Gamma = \omega$, να αποδείξετε ότι:

$$2\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi x - \sigma\varphi y$$



15. Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του διπλανού σχήματος, αν ισχύει

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \sqrt{3}.$$



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ενώ είναι κοινώς παραδεκτό ότι η γεωμετρία είναι δημιούργημα της κλασικής περιόδου της αρχαίας Ελλάδας, εντούτοις δεν είναι εξίσου γνωστό ότι η τριγωνομετρία είναι δημιούργημα της ελληνιστικής περιόδου με πρωταγωνιστές τον 'Ιππαρχο, τον Μενέλαο και τον Πτολεμαίο.

Η τριγωνομετρία ξεπήδησε στην προσπάθεια να θεμελιωθεί μια ποσοτική αστρονομία η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να προβλεφθούν οι θέσεις των ουρανίων σωμάτων, ο υπολογισμός του ημερολογίου και να εφαρμοσθεί στη ναυσιπλοΐα και στη γεωγραφία. Θεμελιωτής της αστρονομίας υπήρξε ο Ίππαρχος που έζησε στη Ρόδο και στην Αλεξάνδρεια και πέθανε γύρω στο 125 π.Χ. Για την προσωπική του ζωή ξέρουμε πολύ λίγα και τα περισσότερα που ξέρουμε γι' αυτόν προέρχονται από τα βιβλία του Πτολεμαίου. Ο Ίππαρχος συνέβαλε αποφασιστικά στη διαμόρφωση της θεωρίας των επικύκλων, και ήταν σε θέση να υπολογίσει εκλείψεις της σελήνης με ακρίβεια μιας έως δύο ωρών. Διέθετε επίσης και μια θεωρία για μια ικανοποιητική εξήγηση του φαινομένου των εποχών.

Η σημαντικότερη ανακάλυψη του ήταν ότι τα σημεία που ο άξονας περιστροφής της γης τέμνει την ουράνια σφαίρα μετακινούνται και διαγράφουν κύκλο με περίοδο 2600 χρόνια. Το μεγαλύτερο μέρος της τριγωνομετρίας του Ίππαρχου αναφέρεται σε αυτό που σήμερα ονομάζουμε σφαιρική τριγωνομετρία. Και αυτό είναι μοιραίο, αφού τον ενδιέφεραν κυρίως τρίγωνα που σχηματίζονται πάνω στον ουράνιο θόλο. Όμως ανέπτυξε και βασικά σημεία της επιπέδου τριγωνομετρίας.

Το έργο του Ίππαρχου συνέχισε ο Μενέλαος που έζησε γύρω στο 98 μ.Χ. και του οποίου το βασικό έργο είναι τα «σφαιρικά».

Η ανάπτυξη της ελληνικής τριγωνομετρίας και των εφαρμογών της στην αστρονομία ολοκληρώνεται με το έργο του Πτολεμαίου που έζησε στην Αλεξάνδρεια γύρω στο 168 μ.Χ. και του οποίου το κύριο σύγγραμμα είναι η Αλμαγέστη (αραβική παραφθορά της λέξης «Μεγίστη»).

Το βιβλίο Α της Αλμαγέστης περιέχει όλα τα αναγκαία θεωρήματα για την κατασκευή ενός πίνακα ημιτόνων και συνημιτόνων. Το Βασικό θεώρημα για την κατασκευή αυτού του πίνακα είναι το εξής:

«Έστω ΑΒΓΔ είναι κυρτό τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τότε ισχύει: $\text{ΑΒ}\cdot\text{ΓΔ}+\text{ΑΔ}\cdot\text{ΒΓ}=\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΔ}$ *».*

Στο θεώρημα αυτό στηρίχτηκε και ο Πτολεμαίος για να βρει διάφορους τριγωνομετρικούς τύπους μεταξύ των οποίων και αυτού που σήμερα εκφράζουμε ως

$$\text{ημ}(\alpha-\beta)=\text{ημα}\cdot\text{συν}\beta-\text{συν}\alpha\cdot\text{ημ}\beta$$

Η Αλμαγέστη έκανε για την τριγωνομετρία ότι έκαναν τα «Στοιχεία του Ευκλείδη» για τη Γεωμετρία: Τη διετύπωσαν στη μορφή που παρέμεινε για τα επόμενα 1000 χρόνια.

Μετά το 200 μ.Χ. με την τριγωνομετρία ασχολήθηκαν και οι Ινδοί με κίνητρο επίσης την αντιμετώπιση αστρονομικών προβλημάτων. Δεν είχαν σημαντική συνεισφορά και αξίζει να σημειωθεί ότι για διάφορους τριγωνομετρικούς και αστρονομικούς όρους όπως κέντρο, λεπτό κτλ., χρησιμοποιούσαν τις ελληνικές λέξεις.

Κατά τα χρόνια του Μεσαίωνα με την τριγωνομετρία ασχολούνται και οι Άραβες, χωρίς να συνεισφέρουν σε αυτήν κάτι σημαντικό δικό τους. Συνέβαλαν όμως στο να μεταδώσουν την Ελληνική τριγωνομετρία στην Ευρώπη.

Κεφάλαιο 4ο
ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Η έννοια του πολυωνύμου

Έστω x μια **μεταβλητή** που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

- Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής αx^{ν}, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος.
  Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

Για παράδειγμα, οι παραστάσεις: $2x^3$, $-\frac{3}{5}x^5$, $0x^4$, $2x$ και οι αριθμοί: 2, -3, 0 είναι μονώνυμα του x.

- Καλούμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και α_0, α_1, ..., α_{ν} είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τα μονώνυμα $\alpha_{\nu}x^{\nu}$, $\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}$, ..., $\alpha_1 x$, α_0 λέγονται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί α_{ν}, $\alpha_{\nu-1}$, ..., α_1, α_0 **συντελεστές** αυτού. Ειδικότερα ο α_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

Τα πολυώνυμα της μορφής α_0, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται **σταθερά πολυώνυμα**. Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο.**

Έτσι για παράδειγμα, οι παραστάσεις $3x^3 + 2x^2 - x + 2$, $0x^2 - 5x + 1$, $5x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 0x + \frac{1}{3}$ και οι αριθμοί 2, 0 κτλ. είναι πολυώνυμα του x.

Η ισότητα μεταξύ δυο πολυωνύμων ορίζεται ως εξής:

Δυο πολυώνυμα

$\alpha_\mu x^\mu + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $\beta_\nu x^\nu + \ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_1 x + \beta_0$, με $\mu \geq \nu$

θα λέμε ότι είναι ίσα όταν:

$\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, ..., $\alpha_\nu = \beta_\nu$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \ldots = \alpha_\mu = 0$

Για παράδειγμα τα πολυώνυμα $0x^4 + 0x^3 + 2x^2 - x + 1$ και $2x^2 - x + 1$ είναι ίσα. Επίσης τα πολυώνυμα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και $2x + 3$ είναι ίσα αν και μόνο αν γ=3, β=2 και α=0.

Τα πολυώνυμα τα συμβολίζουμε συνήθως με P(x), Q(x), κτλ.

Έστω τώρα ένα πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

• Αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με μηδέν, τότε το P(x) είναι ίσο με το πολυώνυμο 0 (μηδενικό πολυώνυμο).

• Αν όμως ένας από τους συντελεστές του είναι διαφορετικός από το μηδέν, τότε το P(x) παίρνει τη μορφή:

$$\alpha_\kappa x^\kappa + \alpha_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0, \text{ με } \alpha_\kappa \neq 0$$

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός κ λέγεται **βαθμός** του πολυωνύμου P(x). Είναι φανερό ότι κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

Έτσι για παράδειγμα το πολυώνυμο $P(x) = -4x^3 + 3x - 7$ είναι $3^{ου}$ βαθμού, ενώ το Q(x) = 7 είναι μηδενικού βαθμού.

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Έστω ένα πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Αν αντικαταστήσουμε το x με έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό ρ, τότε ο πραγματικός αριθμός $P(\rho) = \alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_1 \rho + \alpha_0$ που προκύπτει λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** του πολυωνύμου για x=ρ.

Αν είναι **P(ρ)=0,** τότε ο ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου. Για παράδειγμα, η τιμή του πολυωνύμου $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 1$,

για x=1 είναι $P(1) = -1^3 + 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = 6$, ενώ

για $x = -1$ είναι $P(-1) = -(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1 = 0$, που σημαίνει ότι ο -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

Είναι φανερό ότι:

• Το σταθερό πολυώνυμο c έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x και

• Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x(*)

(*) Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι:

• Αν ένα πολυώνυμο έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x, τότε αυτό είναι το σταθερό πολυώνυμο c και

• Αν δύο πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x, τότε τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

Πράξεις με πολυώνυμα

Μπορούμε να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε, ή να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα:

1. i) $(x^3+2x^2-5x+7)+(4x^3-5x^2+3)=x^3+2x^2-5x+7+4x^3-5x^2+3$

$=(1+4)x^3+(2-5)x^2-5x+(7+3)$

$=5x^3-3x^2-5x+10$ [Πολυώνυμο 3ου βαθμού]

ii) $(2x^3-x^2+1)+(-2x^3+2x-3)=2x^3-x^2+1-2x^3+2x-3$

$=-x^2+2x-2$ [Πολυώνυμο 2ου βαθμού]

iii) $(x^3-3x^2-1)+(-x^3+3x^2+1)=x^3-3x^2-1-x^3+3x^2+1=0$ [Μηδενικό Πολυώνυμο]

2. $(x^3+2x^2-5x+7)-(4x^3-5x^2+3)=x^3+2x^2-5x+7-4x^3+5x^2-3$

$=-3x^3+7x^2-5x+4$

3. $(x^2+5x)(2x^3+3x-1)=x^2(2x^3+3x-1)+5x(2x^3+3x-1)$

$=2x^5+3x^3-x^2+10x^4+15x^2-5x$

$=2x^5+10x^4+3x^3+14x^2-5x$ [Πολυώνυμο 5ου βαθμού]

Για το βαθμό του αθροίσματος και του γινομένου δύο πολυωνύμων αποδεικνύεται ότι:

• Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.

• Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° i) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-1)x^3+(\lambda^2-3\lambda+2)x+\lambda-1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ii) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $Q(x)=\lambda^2x^3+(\lambda-2)x^2+3$ και $R(x)=(5\lambda-6)x^3+(\lambda^2-4)x^2+\lambda+1$ είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

i) Το P(x) θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο, για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:

$$\lambda^2-1=0,\ \ \lambda^2-3\lambda+2=0 \text{ και } \lambda-1=0$$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η λ = 1. Επομένως για λ = 1 το πολυώνυμο P(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ii) Τα Q(x) και R(x) θα είναι ίσα για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:

$$\lambda^2 = 5\lambda - 6, \qquad \lambda - 2 = \lambda^2 - 4 \qquad \text{και} \qquad 3 = \lambda + 1$$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η λ=2. Επομένως για λ=2 τα πολυώνυμα Q(x) και R(x) είναι ίσα.

2° Αν $P(x) = x^2 + 3x + \alpha^2 - 1$, να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $P(-1) = 1$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $P(-1) = 1 \Leftrightarrow (-1)^2 + 3(-1) + \alpha^2 - 1 = 1$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -2 \quad \text{ή} \quad \alpha = 2$$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι οι: –2, 2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x:

i) $1 - x^3$ **ii)** $\alpha^3 - 3\alpha^2 x + 3\alpha x^2 - x^3$

iii) $x + \frac{1}{x}$ **iv)** $x^4 - 2x^{\frac{1}{3}} + 4x - 1$

2. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 5x + 2$ και $Q(x) = x^3 + 3x + 1$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα:

i) $P(x) + Q(x)$ **ii)** $2P(x) - 3Q(x)$ **iii)** $P(x) \cdot Q(x)$ **iv)** $[P(x)]^2$

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, το πολυώνυμο

$$P(x) = (4\mu^3 - \mu)x^3 + 4\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)x - 2\mu + 1$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2 x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$ είναι ίσα.

5. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς, που δίνονται με τα παρακάτω πολυώνυμα, είναι ρίζες τους.

i) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$ $x = -1,$ x=1

ii) $Q(x) = -x^4 + 1$ $x = -1,$ x=1, x=3.

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = x^3 - kx^2 + 5x + k.$$

7. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, η τιμή του πολυωνύμου $P(x)=5x^2+3\alpha x+\alpha^2-2$ για $x=-1$ είναι ίση με 1.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, για τους οποίους το πολυώνυμο $f(x)=3x^2-7x+5$ παίρνει τη μορφή $f(x)=\alpha x(x+1)+\beta x+\gamma$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x)=3x^3+\alpha x^2+\beta x-6$ έχει ρίζες το –2 και το 3.

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ, για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\lambda x^2+\mu x+6$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $P(-2)=-12$.

4. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x)=(9\lambda^3-4\lambda)x^3+(9\lambda^2-4)x-3\lambda+2$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Να βρείτε πολυώνυμο P(x), για το οποίο ισχύει $(2x+1)P(x)=2x^3-9x^2-3x+1$

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Αλγοριθμική διαίρεση

Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο την έννοια της Ευκλείδειας ή αλγοριθμικής διαίρεσης μεταξύ θετικών ακέραιων αριθμών. Συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι:

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών Δ και δ με $\delta \neq 0$, υπάρχουν δύο μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και υ, τέτοιοι ώστε

$$\Delta=\delta\pi+\upsilon, \qquad 0 \leq \upsilon < \delta \tag{1}$$

Η ισότητα αυτή είναι γνωστή ως **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**. Ο Δ λέγεται **διαιρετέος**, ο δ **διαιρέτης**, ο π **πηλίκο** και ο υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Η έννοια της διαίρεσης των πολυωνύμων είναι ανάλογη με την Ευκλείδεια διαίρεση που αναφέραμε παραπάνω. Συγκεκριμένα ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x), τέτοια ώστε:

$$\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x), \tag{2}$$

όπου το υ(x) ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).

Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών το Δ(x) λέγεται **διαιρετέος**, το δ(x) **διαιρέτης**, το π(x) **πηλίκο** και το υ(x) **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Για να προσδιορίσουμε το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) της διαίρεσης ενός πολυωνύμου Δ(x) με ένα πολυώνυμο δ(x), ακολουθούμε μια διαδικασία, ανάλογη με εκείνη της διαίρεσης των θετικών ακεραίων. Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφεται βήμα προς βήμα η διαδικασία της διαίρεσης του πολυωνύμου $x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ με το πολυώνυμο $x - 3$.

1. Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα δύο πολυώνυμα.

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 \,\big|\, x - 3$$

2. Βρίσκουμε τον πρώτο όρο x^2 του πηλίκου διαιρώντας τον πρώτο όρο x^3 του διαιρετέου με τον πρώτο όρο x του διαιρέτη.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & x - 3 \\ & x^2 \end{array}$$

3. Πολλαπλασιάζουμε το x^2 με x – 3 και το γινόμενο $x^3 - 3x^2$ το αφαιρούμε από το διαιρετέο. Βρίσκουμε έτσι το πρώτο μερικό υπόλοιπο $-2x^2 + 2x - 1$.

$$\begin{array}{rl|l} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & & x^2 \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 & & \end{array}$$

4. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το $-2x^2 + 2x - 1$. Βρίσκουμε έτσι το δεύτερο μερικό υπόλοιπο $-4x - 1$.

$$\begin{array}{rl|l} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & & x^2 - 2x \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 & & \\ 2x^2 - 6x & & \\ \hline -4x - 1 & & \end{array}$$

5. Τέλος επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το –4x – 1. Βρίσκουμε έτσι το τελικό υπόλοιπο –13 και το πηλίκο $x^2 - 2x - 4$.

$$\begin{array}{rl|l} x^3 - 5x^2 + 2x - 1 & & x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 & & x^2 - 2x - 4 \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 & & \\ 2x^2 - 6x & & \\ \hline -4x - 1 & & \\ 4x - 12 & & \\ \hline -13 & & \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα:

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = (x-3) \cdot (x^2 - 2x - 4) + (-13)$$

(διαιρετέος) = (διαιρέτης) · (πηλίκο) + (υπόλοιπο)

που εκφράζει την ταυτότητα της διαίρεσης.

Αν ακολουθήσουμε την παραπάνω διαδικασία για τα πολυώνυμα $4x^4 + x^2 - 3x - 1$ και $2x^2 + x$, έχουμε:

$$\begin{array}{rl|l} 4x^4 + 0x^3 + x^2 - 3x - 1 & & 2x^2 + x \\ -4x^4 - 2x^3 & & 2x^2 - x + 1 \\ \hline -2x^3 + x^2 - 3x - 1 & & \\ 2x^3 + x^2 & & \\ \hline 2x^2 - 3x - 1 & & \\ -2x^2 - x & & \\ \hline -4x - 1 & & \end{array}$$

Παρατηρήστε ότι συμπληρώσαμε τη δύναμη x^3 με συντελεστή το μηδέν.

Ομοίως για τα πολυώνυμα $2x^3+2x^2-x-1$ και $2x^2-1$ έχουμε

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+2x^2-x-1 & 2x^2-1 \\ \cline{2-2} -2x^3\qquad +x & x+1 \\ \cline{1-1} \quad 2x^2\quad -1 & \\ -2x^2\quad +1 & \\ \cline{1-1} \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Παρατηρήστε ότι στα παραπάνω παραδείγματα η διαίρεση τελειώνει, όταν το υπόλοιπο γίνει μηδέν ή ο βαθμός του γίνει μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη.

Στο τελευταίο παράδειγμα βλέπουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 0. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η διαίρεση είναι **τέλεια**.

Γενικά, αν σε μια διαίρεση είναι $\upsilon(x)=0$, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται

$$\Delta(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\delta(x)$ **διαιρεί** το $\Delta(x)$ ή ότι το $\delta(x)$ είναι **παράγοντας** του $\Delta(x)$ ή ότι το $\Delta(x)$ **διαιρείται με το** $\delta(x)$ ή ακόμη ότι το $\delta(x)$ είναι **διαιρέτης** του $\Delta(x)$. Έτσι για παράδειγμα το $2x^2-1$ είναι παράγοντας ή διαιρέτης του $2x^3+2x^2-x-1$.

Διαίρεση πολυωνύμου με x–ρ.

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-\rho$ γράφεται. $P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon(x)$

Επειδή ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε:

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon$$

και, αν θέσουμε $x=\rho$, παίρνουμε

$$P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)+\upsilon=0+\upsilon=\upsilon$$

Επομένως

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$

Για παράδειγμα, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=x^3+3x^2-13x-15$ με το $x-2$ είναι $\upsilon=P(2)=2^3+3\cdot 2^2-13\cdot 2-15=-21$, ενώ με το x+1 που γράφεται $x-(-1)$, είναι $\upsilon=P(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2-13\cdot(-1)-15=0$. Παρατηρούμε ότι:

- $P(-1)=0$, δηλαδή ότι το –1 είναι **ρίζα** του P(x) και
- $P(x)=(x+1)\pi(x)+0=(x+1)\pi(x)$, δηλαδή ότι το x+1 είναι **παράγοντας** του P(x).

Γενικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x–ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι το x–ρ είναι παράγοντας του P(x). Τότε

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για x = ρ παίρνουμε

$$P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)=0,$$

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του P(x).

Αντιστρόφως: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή ισχύει P(ρ) = 0. Τότε από τη σχέση

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$$

παίρνουμε

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x),$$

που σημαίνει ότι το x–ρ είναι παράγοντας του P(x).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα x+2 και x – 1 είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x)=x^3+x^2-x+2$.

ΛΥΣΗ

Το x+2 γράφεται $x-(-2)$. Επειδή $P(-2)=(-2)^3+(-2)^2-(-2)+2=0$, το –2 είναι ρίζα του P(x). Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, το x+2 είναι παράγοντας του P(x).

Επειδή $P(1)=1^3+1^2-1+2=3\neq 0$, το 1 δεν είναι ρίζα του P(x). Επομένως το x – 1 δεν είναι παράγοντας του P(x).

2° Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=x^3-3x^2+3x-1$ με το $x+\lambda$ είναι το μηδέν.

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)=\lambda^2x^4+3\lambda x^2-3$ με το $x-1$ είναι το 1.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $x+\lambda = x-(-\lambda)$, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+\lambda$ είναι $\upsilon = P(-\lambda)$. Επομένως, για να είναι $\upsilon = 0$ αρκεί:

$$\begin{aligned} P(-\lambda)=0 &\Leftrightarrow (-\lambda)^3-3(-\lambda)^2+3(-\lambda)-1=0\\ &\Leftrightarrow -\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=0\\ &\Leftrightarrow \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0\\ &\Leftrightarrow (\lambda+1)^3=0\\ &\Leftrightarrow \lambda=-1 \end{aligned}$$

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x-1$ είναι $\upsilon = Q(1)$. Επομένως, για να είναι $\upsilon = 1$ αρκεί:

$$\begin{aligned} Q(1)=1 &\Leftrightarrow \lambda^2 1^4+3\lambda 1^2-3=1\\ &\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda-4=0\\ &\Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-4 \end{aligned}$$

Σχήμα Horner (Χόρνερ)

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου, π.χ. του $P(x)=3x^3-8x^2+7x+2$, με ένα πολυώνυμο της μορφής $x-\rho$. Η Ευκλείδεια διαίρεση του $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι η ακόλουθη:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-8x^2+7x+2 & x-\rho \\ \cline{2-2} -3x^3+3\rho x^2 & 3x^2+(3\rho-8)x+\rho(3\rho-8)+7 \\ \cline{1-1} (3\rho-8)x^2+7x+2 & \\ -(3\rho-8)x^2+\rho(3\rho-8)x & \\ \cline{1-1} [\rho(3\rho-8)+7]x+2 & \\ -[\rho(3\rho-8)+7]x-\rho[\rho(3\rho-8)+7] & \\ \cline{1-1} \underbrace{\rho[\rho(3\rho-8)+7]+2}_{P(\rho)} & \end{array}$$

Η παραπάνω διαίρεση μπορεί να παρουσιασθεί εποπτικά με τον ακόλουθο πίνακα που είναι γνωστός ως σχήμα του Horner.

Συντελεστές του P(x)

3	−8	7	2	ρ
	3ρ	(3ρ−8)ρ	[(3ρ−8)ρ+7]ρ	
3	3ρ−8	(3ρ−8)ρ+7	[(3ρ−8)ρ+7]ρ+2	

Συντελεστές Πηλίκου Υπόλοιπο

Για την κατασκευή του πίνακα αυτού εργαζόμαστε ως εξής:

— Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου P(x) και στην πρώτη θέση της τρίτης γραμμής τον πρώτο συντελεστή του P(x).
Στη συνέχεια ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

— Κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής προκύπτει με πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της τρίτης γραμμής επί ρ.

— Κάθε άλλο στοιχείο της τρίτης γραμμής προκύπτει ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης και δεύτερης γραμμής.

Το τελευταίο στοιχείο της τρίτης γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $(x-\rho)$, δηλαδή η τιμή του πολυωνύμου P(x) για $x=\rho$. Τα άλλα στοιχεία της τρίτης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.

Ας εργασθούμε τώρα με το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=3x^5+3x^4+6x-13$ με το $x-2$.

3	3	0	0	6	−13	ρ=2
	6	18	36	72	156	
3	9	18	36	78	143	

[Συμπληρώστε με 0 τους συντελεστές των δυνάμεων του x που δεν υπάρχουν.]

Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x)=3x^4+9x^3+18x^2+36x+78$ και το υπόλοιπο υ = P(2) = 143

ΣΧΟΛΙΟ Στο παραπάνω παράδειγμα, αν αντί για το σχήμα Horner εκτελέσουμε τη διαίρεση, θα διαπιστώσουμε ότι οι πράξεις που απαιτούνται είναι αρκετά πιο επίπονες. Το ίδιο θα συμβεί, αν δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το P(2) θέτοντας όπου x το 2. Το σχήμα Horner είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στις περιπτώσεις όπου το ρ ή ο βαθμός του P(x) είναι μεγάλος αριθμός. Για το λόγο αυτό, τόσο στις διαιρέσεις με το x−ρ όσο και στον υπολογισμό της τιμής P(ρ), θα χρησιμοποιούμε συνήθως το σχήμα Horner.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(4x^2-8\alpha x+4\alpha^2):(x-\alpha)$

ΛΥΣΗ

Το σχήμα Horner με διαιρετέο το $4x^2-8\alpha x+4\alpha^2$ και διαιρέτη το $x-\alpha$ δίνει:

4	-8α	$4\alpha^2$	α
	4α	$-4\alpha^2$	
4	-4α	0	

Άρα $\pi(x)=4x-4\alpha$ και $\upsilon(x)=0$

2° Αν ν είναι ένας θετικός ακέραιος, να αποδειχθεί η ταυτότητα:

$$x^\nu-\alpha^\nu=(x-\alpha)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\alpha+x^{\nu-3}\alpha^2+.....+\alpha^{\nu-1})$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το σχήμα Horner με διαιρετέο το $x^\nu-\alpha^\nu$ και διαιρέτη το $x-\alpha$ δίνει

1	0	0	.....	0	$-\alpha^\nu$	$\rho=\alpha$
	α	α^2	.....	$\alpha^{\nu-1}$	α^ν	
1	α	α^2	.....	$\alpha^{\nu-1}$	0	

Επομένως το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^\nu-\alpha^\nu):(x-\alpha)$ είναι μηδέν, ενώ το πηλίκο είναι το πολυώνυμο

$$\pi(x)=x^{\nu-1}+\alpha x^{\nu-2}+\alpha^2x^{\nu-3}+.....+\alpha^{\nu-1}$$

Τέλος, από την ταυτότητα της διαίρεσης προκύπτει ότι:

$x^\nu-\alpha^\nu=(x-\alpha)\pi(x)+0$ ή $x^\nu-\alpha^\nu=(x-\alpha)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\alpha+x^{\nu-3}\alpha^2+.....+\alpha^{\nu-1})$

3° Να εξεταστεί για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού ν το x+α είναι παράγοντας του $x^\nu+\alpha^\nu$, $\alpha\neq 0$. Γι' αυτές τις τιμές του ν, το $x^\nu+\alpha^\nu$ να γίνει γινόμενο της μορφής (x+α) π(x).

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε $P(x)=x^\nu+\alpha^\nu$, τότε $P(-\alpha)=(-\alpha)^\nu+\alpha^\nu$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

• Αν **ν άρτιος**, τότε $P(-\alpha)=\alpha^\nu+\alpha^\nu=2\alpha^\nu\neq 0$, που σημαίνει ότι το $-\alpha$ δεν είναι ρίζα του P(x). Επομένως το x+α δεν είναι παράγοντας του $x^\nu+\alpha^\nu$.

• Αν **ν περιττός**, τότε $P(-\alpha)=-\alpha^\nu+\alpha^\nu=0$, που σημαίνει ότι το $-\alpha$ είναι ρίζα του P(x).

Επομένως το x+α είναι παράγοντας του $x^\nu+\alpha^\nu$.

Στη συνέχεια, αν εργαστούμε όπως στο παράδειγμα 2 για ν περιττό βρίσκουμε την ταυτότητα: $x^\nu+\alpha^\nu=(x+\alpha)(x^{\nu-1}-x^{\nu-2}\alpha+x^{\nu-3}\alpha^2-.....+\alpha^{\nu-1})$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

i) $(3x^3+6x^2-17x+20):(x+3)$ **ii)** $(x^4-81):(x-3)$

iii) $(24x^5+20x^3-16x^2-15):(6x^2+5)$ **iv)** $(2x^4+4x^3-5x^2+3x-2):(x^2+2x-3)$

v) $x^4:(x-1)^3$ **vi)** $(x^5+7):(x^3-1)$

2. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $(18x^{80}-6x^{50}+4x^{20}-2):(x+1)$.

3. Να βρείτε τις τιμές του k, για τις οποίες το x–1 είναι παράγοντας του $g(x)=k^2x^4+3kx^2-4$.

4. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i) $(-x^3+75x-250):(x+10)$ **ii)** $(x^3+512):(x+8)$

iii) $(x^5+1):(x-1)$ **iv)** $-3x^4:(x-2)$

v) $(4x^3+16x^2-23x-15):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

5. Αν $P(x)=-2x^3-2x^2-x+2409$, να βρείτε το $P(-11)$.

6. Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα της μορφής $x-\rho$ που δίνονται σε κάθε περίπτωση είναι παράγοντες του $P(x)$.

i) $P(x)=x^4-25x^2+144$, x+3

ii) $P(x)=16x^4-8x^3+9x^2+14x-4$, $x-\frac{1}{4}$

iii) $P(x)=x^3-3x^2+2$, $x-1-\sqrt{3}$

7. Αν ν είναι ένας άρτιος θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι το x+y είναι παράγοντας του $x^\nu-y^\nu$.

8. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

i) $P(x)=4x^4+7x^2+12$ **ii)** $Q(x)=-5x^6-3x^2-4$

9. Αν ο ν είναι περιττός θετικός ακέραιος, τότε το x+1 είναι παράγοντας του $x^\nu+1$. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $(x^\nu+1):(x+1)$.

10. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

i) $(3x^2-2\alpha x-8\alpha^2):(x-2\alpha)$ **ii)** $(x^3+\alpha x^2-\alpha^2x-\alpha^3):(x+\alpha)$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι, αν το ν είναι παράγοντας του μ, τότε και το $x^{\nu}-\alpha^{\nu}$ είναι παράγοντας του $x^{\mu}-\alpha^{\mu}$, (μ, ν θετικοί ακέραιοι).

2. i) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το αx+β, $\alpha\neq 0$ είναι $\upsilon = P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

ii) Να βρείτε τις συνθήκες, για τις οποίες το πολυώνυμο $\alpha x^3+\beta$ διαιρείται με το αx+β.

3. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=2x^4-6x^3+5x^2-3x+2$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και να βρείτε το πηλίκο.

4. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(x+1)^{2\nu}-x^{2\nu}-2x-1,\ \nu\neq 0$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $2x^3+3x^2+x$.

5. Να υπολογίσετε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τους οποίους το $P(x)=\alpha x^{\nu+1}+\beta x^{\nu}+1$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Σε προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων

$$\alpha x+\beta=0,\quad \alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \text{ και } \alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0, \text{ με } \alpha\neq 0$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι ειδικές περιπτώσεις μιας κατηγορίας εξισώσεων της μορφής P(x) = 0, όπου P(x) πολυώνυμο, οι οποίες λέγονται **πολυωνυμικές εξισώσεις.** Συγκεκριμένα:

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+.....+\alpha_1 x+\alpha_0=0,\qquad \alpha_{\nu}\neq 0$$

Για παράδειγμα, οι εξισώσεις $2x^3-5x^2+x-2=0$ και $-3x^6+5x^2+1=0$ είναι πολυωνυμικές εξισώσεις 3ου και 6ου βαθμού αντιστοίχως.

Ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου $P(x)=\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+.....+\alpha_1 x+\alpha_0$, δηλαδή κάθε αριθμό ρ, για τον οποίο ισχύει P(ρ) = 0.

Όπως για τις πολυωνυμικές εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού, έτσι και για τις πολυωνυμικές εξισώσεις 3ου και 4ου βαθμού έχουν βρεθεί γενικοί τρόποι επίλυσής τους. Οι τρόποι αυτοί όμως απαιτούν γνώσεις που είναι έξω από το σκοπό αυτού του βιβλίου και δε θα αναπτυχθούν εδώ. Τέλος, έχει αποδειχθεί ότι γενικός

τρόπος επίλυσης για πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του 4 δεν υπάρχει. Για τους λόγους αυτούς, για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου από 2, θα περιοριστούμε στη γνωστή μας παραγοντοποίηση.

Η επίλυση μια εξίσωσης με τη μέθοδο αυτή στηρίζεται στην ισοδυναμία

$$P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot .....\cdot P_k(x)=0 \Leftrightarrow (P_1(x)=0 \quad \text{ή} \quad P_2(x)=0 \quad \text{ή} \quad ... \text{ ή} \quad P_k(x)=0)$$

Δηλαδή, για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση P(x) = 0, παραγοντοποιούμε το P(x) και αναγόμαστε έτσι στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων μικρότερου βαθμού.

Για παράδειγμα, ας λύσουμε την εξίσωση $x^3-3x+2=0$. Αυτή γράφεται:

$$\begin{aligned} x^3-3x+2=0 &\Leftrightarrow x^3-x-2x+2=0\\ &\Leftrightarrow x(x^2-1)-2(x-1)=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)[x(x+1)-2]=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0\\ &\Leftrightarrow x-1=0 \quad \text{ή} \quad x^2+x-2=0\\ &\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x=-2 \end{aligned}$$

Παράγοντας της μορφής x – ρ

Το θεώρημα που ακολουθεί μας βοηθά σε ορισμένες περιπτώσεις, στην εύρεση πρωτοβάθμιων παραγόντων.

ΘΕΩΡΗΜΑ **(ακέραιων ριζών)** Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+.....+\alpha_1 x+\alpha_0=0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ο $\rho\neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+.....+\alpha_1\rho+\alpha_0=0 &\Leftrightarrow \alpha_0=-\alpha_\nu\rho^\nu-\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}-.....-\alpha_1\rho\\ &\Leftrightarrow \alpha_0=\rho(-\alpha_\nu\rho^{\nu-1}-\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2}-.....-\alpha_1) \end{aligned}$$

Επειδή οι ρ, α_1, α_2,..., α_ν είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο $-\alpha_\nu\rho^{\nu-1}-\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2}-.....-\alpha_1$ είναι ακέραιος. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° Να λυθεί η εξίσωση $x^3-3x^2+x+2=0$

ΛΥΣΗ

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες ±1, ±2 του σταθερού όρου. Με το σχήμα Horner εξετάζουμε αν κάποιος από αυτούς μηδενίζει το πολυώνυμο $P(x)=x^3-3x^2+x+2$.

Έχουμε:

1	−3	1	2	ρ =1
	1	−2	−1	
1	−2	−1	1	

$$P(1)=1\neq 0$$

Άρα το 1 δεν είναι ρίζα του P(x)

1	−3	1	2	ρ=−1
	−1	4	−5	
1	−4	5	−3	

$$P(-1)=-3\neq 0$$

Άρα το -1 δεν είναι ρίζα του P(x)

1	−3	1	2	ρ=2
	2	−2	−2	
1	−1	−1	0	

$$P(2)=0$$

Άρα το 2 είναι ρίζα του P(x)

Επομένως το x–2 είναι παράγοντας του P(x). Συγκεκριμένα από το τελευταίο σχήμα έχουμε

$$P(x)=(x-2)(x^2-x-1)$$

οπότε η εξίσωση γράφεται $(x-2)(x^2-x-1)=0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς 2, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ και $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

ΣΧΟΛΙΟ Από το παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι το αντίστροφο του θεωρήματος δεν αληθεύει. Με άλλα λόγια μπορεί ένας ακέραιος ρ να είναι διαιρέτης του α_0, χωρίς αυτός να είναι κατ' ανάγκη και ρίζα της εξίσωσης π.χ. ο ρ =1.

2° Να λυθεί η εξίσωση $x^4+5x^3+9x^2+8x+4=0$.

ΛΥΣΗ

Οι διαιρέτες του 4 είναι οι: ±1, ±2, ±4. Επειδή όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι θετικοί, οι διαιρέτες 1, 2, και 4 αποκλείεται να είναι ρίζες της. Επομένως οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι –1, –2, και – 4.

Αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε $P(-1)=1\neq 0$, ενώ για $\rho=-2$ έχουμε:

1	5	9	8	4	$\rho=-2$
	-2	-6	-6	-4	
1	3	3	2	0	

$$P(-2)=0$$

Άρα το -2 είναι ρίζα του $P(x)$

Η εξίσωση τότε γράφεται

$$(x+2)(x^3+3x^2+3x+2)=0$$

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για το $Q(x)=x^3+3x^2+3x+2$ και $\rho=-2$ έχουμε

1	3	3	2	$\rho=-2$
	-2	-2	-2	
1	1	1	0	

$$Q(-2)=0$$

Άρα το -2 είναι ρίζα του $Q(x)$

Επομένως είναι $x^3+3x^2+3x+2=(x+2)(x^2+x+1)$ και η αρχική εξίσωση γράφεται

$$(x+2)^2(x^2+x+1)=0$$

Η τελευταία έχει μια μόνο διπλή ρίζα τον αριθμό -2.

Πρόσημο γινομένου

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x)=A(x)\cdot B(x)\cdot\ldots\cdot\Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x),B(x),\ldots,\Phi(x)$ είναι της μορφής $\alpha x+\beta$ (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (τριώνυμα).

Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου

$$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1).$$

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά ως εξής:

✔ Επειδή

$$x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1,$$

το $x-1$ είναι θετικό για $x>1$, μηδέν για $x=1$ και αρνητικό για $x<1$.

✔ Επειδή $x^2+x-6\geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -3$ ή $x\geq 2$, το x^2+x-6 είναι θετικό για $x<-3$ και για $x>2$, μηδέν για $x=-3$ και για $x=2$ και αρνητικό για $-3<x<2$.

✔ Επειδή το $2x^2+x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=1-8=-7<0$, το τριώνυμο αυτό είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ο προσδιορισμός, τώρα, του προσήμου του γινομένου P(x) γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα, εφαρμόζοντας τον κανόνα των προσήμων.

x	$-\infty$		-3		1		2	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$		0	$+$		$+$
x^2+x-6	$+$	0	$-$		$-$		0	$+$
$2x^2+x+1$	$+$		$+$		$+$		$+$	$+$
P(x)	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ώστε το γινόμενο P(x) είναι θετικό για $-3<x<1$ και για $x>2$, ενώ είναι αρνητικό για $x<-3$ και για $1<x<2$. Τέλος είναι μηδέν για $x=-3$, για $x=1$ και για $x=2$.

Ανισώσεις της μορφής $A(x)\cdot B(x)\cdot \ldots \cdot \Phi(x)>0$ (<0)

Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $A(x)\cdot B(x)\cdot \ldots \cdot \Phi(x)>0$ (<0), όπως είναι για παράδειγμα η ανίσωση

$$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)<0$$

Προκειμένου να λύσουμε την ανίσωση αυτή αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες το γινόμενο $P(x)=(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)$ είναι αρνητικό.

Από την πρώτη και την τελευταία γραμμή του πίνακα προσήμου του P(x) διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $x\in(-\infty,-3)\cup(1,2)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η ανίσωση $x^3-3x^2+x+2>0$

ΛΥΣΗ

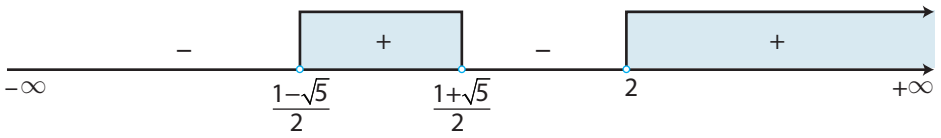
Αν εργαστούμε όπως στο παράδειγμα 1, η ανίσωση γράφεται

$$(x-2)(x^2-x-1)>0 \quad \text{ή} \quad (x-2)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)>0.$$

Τοποθετούμε τις ρίζες του $P(x)=x^3-3x^2+x+2$ σε άξονα και παρατηρούμε ότι:

Στο 1ο από δεξιά διάστημα $(2,+\infty)$ το P(x) είναι θετικό, αφού όλοι οι παράγοντες εί-

ναι θετικοί. Στο επόμενο διάστημα $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$ το P(x) είναι αρνητικό, αφού ένας μόνο παράγοντας, ο $x-2$, είναι αρνητικός. Αν συνεχίσουμε έτσι, βρίσκουμε το πρόσημο του P(x) σε όλα τα διαστήματα όπως φαίνεται στο σχήμα.



Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in \mathbb{R}$, με $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $x>2$.

Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση

Όταν ο ακριβής προσδιορισμός των ριζών μιας εξίσωσης είναι δύσκολος ή αδύνατος, τότε χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι για να προσδιοριστούν με προσέγγιση οι ρίζες αυτές. Μια τέτοια προσεγγιστική μέθοδος, που παρουσιάζεται βήμα προς βήμα στο παράδειγμα που ακολουθεί, στηρίζεται στο παρακάτω θεώρημα:

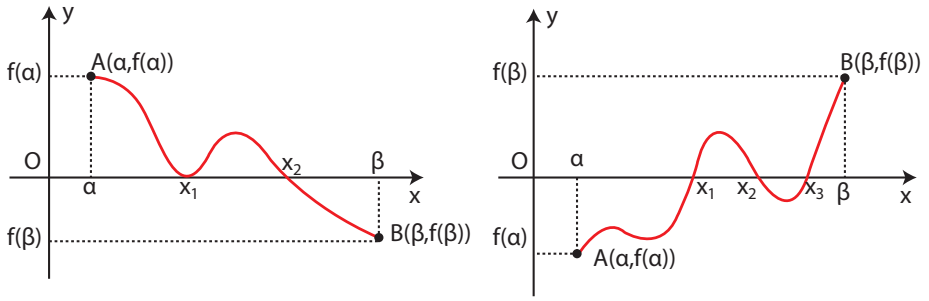
ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Αν για δυο πραγματικούς αριθμούς α, β με α<β οι τιμές f(α), f(β) της συνάρτησης είναι ετερόσημες, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 μεταξύ των α, β.

Το παραπάνω θεώρημα ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής:
Αν η γραφική παράσταση της f περνάει από δυο σημεία A (α, f(α)) και B(β,f(β)) που βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x'x, τότε αυτή τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη μεταξύ των α και β.



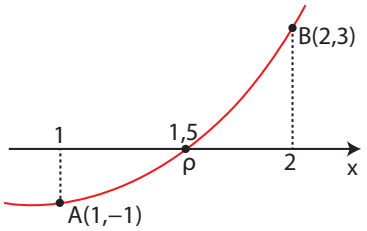
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα μεταξύ των αριθμών 1 και 2. Στη συνέχεια να βρεθεί μια ρίζα με προσέγγιση δεκάτου.

ΛΥΣΗ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+1$

1ο βήμα: Έχουμε $\begin{cases} f(1)=-1<0 \\ f(2)=3>0 \end{cases}$



Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα (1,2).

2ο βήμα: Βρίσκουμε τις τιμές της συνάρτησης στα ενδιάμεσα σημεία 1,1, 1,2, ... 1,9 και παρατηρούμε ότι:

$$\begin{cases} f(1,5)\simeq -0,13<0 \\ f(1,6)\simeq 0,30>0 \end{cases}$$

Επομένως, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,5 , 1,6).

3ο βήμα: Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία στο διάστημα (1,5 , 1,6) και έχουμε:

$$\begin{cases} f(1,53)\simeq -0,01<0 \\ f(1,54)\simeq 0,03>0 \end{cases}$$

Επομένως, υπάρχει μια ρίζα ρ στο διάστημα (1,53 , 1,54) δηλαδή ισχύει $1,53<\rho<1,54$.
Άρα με προσέγγιση δεκάτου είναι $\rho=1,5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις.

i) $5x^4=6x^2$

ii) $x^3+2x^2-9x-18=0$

iii) $3x^5+5x^4=3x^3+5x^2$

iv) $x^6-64=0$

v) $x^3+x^2-2=0$

vi) $x^3-7x+6=0$

vii) $(x+1)^3+1=0$

viii) $7(3x+2)^2(1-x)^2-(3x+2)(1-x)^3=0$

ix) $x^3+8=7(x^2+5x+6)+9x^2-36$

x) $x^4-3x^3+6x-4=0$

2. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων

i) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ **ii)** $3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$

iii) $x^3 - 10x - 12 = 0$ **iv)** $x^3 + 2x^2 + 7x + 6 = 0$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες.

i) $x^4 + 3x - 2 = 0$ **ii)** $2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 24x + 5 = 0$

4. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων, για τις διάφορες τιμές του x.

i) $P(x) = (2 - 3x)(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1)$

ii) $Q(x) = (-x^2 + 4)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1)$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2x^5 - 162x \le 0$ **ii)** $(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0$

iii) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$ **iv)** $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \le 0$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 > 0$ **ii)** $x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13 \le 0$

iii) $x^3 - 3x + 2 < 0$ **iv)** $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 \ge 0$

7. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x'x και της γραφικής παράστασης καθεμίας από τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ **ii)** $g(x) = 4x^3 - 3x - 1$

8. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ **ii)** $(x-1)^6 - 9(x-1)^3 + 8 = 0$

iii) $6\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$

10. Να βρεθεί μια ρίζα της εξίσωσης $x^3 + 5x - 3 = 0$ στο διάστημα $(0,1)$ με προσέγγιση δεκάτου.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{1}{10}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}=0,$ **ii)** $x^3-\frac{5}{6}x^2-\frac{22}{3}x+\frac{5}{2}=0$

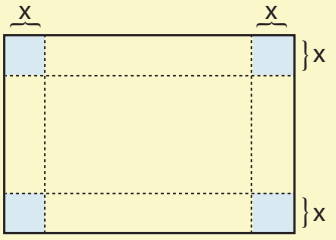
2. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ το $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-16x-12$ έχει παράγοντες τους $x+1$ και $x-2$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

3. Να βρείτε τις τιμές του $k\in\mathbb{Z}$ για τις οποίες, η εξίσωση $x^3-x^2+kx+3=0$ έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

*** 4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^\nu+2\lambda x-2=0,\ \nu\in\mathbb{N},\ \nu\geq 2,\ \lambda\in\mathbb{Z}^*$, δεν έχει ακέραιες ρίζες.

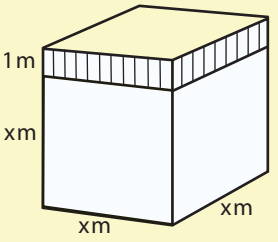
5. Αν $P(x)=x^6-5x^4-10x^2+k$, να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες το $x-1$ είναι παράγοντας του P(x). Για αυτές τις τιμές του k να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

6. Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5dm και 9dm, κόβουμε ίσα τετράγωνα από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές του. Να βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού, αν είναι γνωστό ότι αυτές εκφράζονται σε dm με ακέραιους αριθμούς και ακόμη ότι ο όγκος του είναι 21dm^3.



7. Η συγκέντρωση μιας χημικής ουσίας στο αίμα t ώρες μετά από ενδομυϊκή ένεση δίνεται από τον τύπο $c=\frac{3t^2+t}{t^3+50}$. Η συγκέντρωση είναι μέγιστη, όταν $3t^4+2t^3-300t-200=0$. Να υπολογίσετε με προσέγγιση δεκάτου το χρόνο t καθώς και τη μέγιστη συγκέντρωση.

8. Αν ο όγκος του διπλανού σχήματος είναι 36m^3, να βρείτε το x.



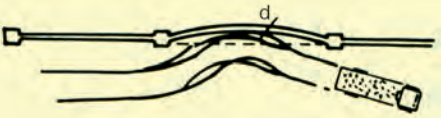
9. Ένα παγόβουνο σύρεται από την Ανταρκτική προς την Αφρική. Αν ο όγκος του V, μετά από ν ημέρες δίνεται από τον τύπο

$$V = \frac{500\pi}{3}(2000 - 100\nu + 20\nu^2 - \nu^3),$$

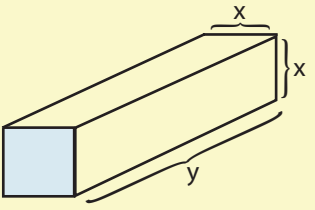


να βρείτε μετά πόσο χρόνο το παγόβουνο θα λιώσει τελείως.

10. Σε χρόνο t δευτερολέπτων μετά την πρόσκρουση του φορτηγού στο κιγκλίδωμα του δρόμου, η παραμόρφωση σε mm του κιγκλιδώματος δίνεται από τον τύπο $d = 15t(t^2 - 6t - 9)$. Σε πόσο χρόνο μετά την πρόσκρουση η μπάρα του κιγκλιδώματος θα επανέλθει στην αρχική της θέση;



11. Ένα πακέτο σχήματος παραλληλεπιπέδου, για να σταλεί με το ταχυδρομείο, πρέπει το άθροισμα του μήκους του με την περίμετρο μιας κάθετης τομής του να μην υπερβαίνει τα 108cm (βλέπε σχήμα). Να βρεθούν οι διαστάσεις του πακέτου, αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι 11664 cm^3.



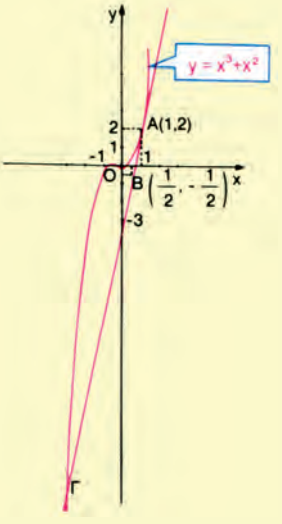
12. **i)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία A (1,2) και

$$B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

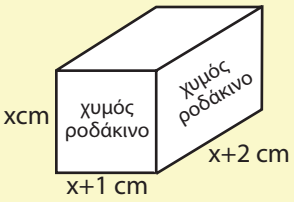
ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία αυτή τέμνει την καμπύλη $y = x^3 + x^2$ για τα x που είναι ρίζες της εξίσωσης.

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση και να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.

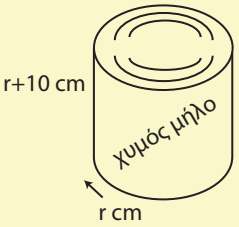


13. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει μικρά δοχεία για χυμούς φρούτων. Το τμήμα σχεδιασμού του εργοστασίου έλαβε τρεις παραγγελίες:

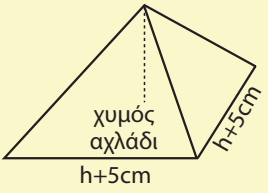


α) Ο πρώτος πελάτης θέλει κουτιά που να χωρούν 200ml χυμού και με διαστάσεις, που να διαφέρουν κατά 1cm, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδειχθεί ότι το τμήμα έχει να λύσει την εξίσωση $x^3+3x^2+2x-200=0$. Μπορείτε να τους βοηθήσετε να βρουν το x με προσέγγιση ενός mm.

β) Ο δεύτερος πελάτης θέλει τενεκεδάκια κυλινδρικά που να χωρούν 1lit και να έχουν ύψος 10cm μεγαλύτερο από το μήκος της ακτίνας τους. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή τη φορά είναι $r^3+10r^2-318=0$ και να βρεθεί το r με προσέγγιση ενός mm. (Να πάρετε $\frac{1000}{\pi}\simeq 318$).



γ) Ο τρίτος πελάτης ζήτησε κουτιά σε σχήμα τετραγωνικής πυραμίδας, που να χωρούν 250ml, με πλευρά βάσης 5cm μεγαλύτερη από το ύψος.
Να βρεθεί η εξίσωση και στη συνέχεια μια κατά προσέγγιση τιμή του ύψους h (προσέγγιση χιλιοστού).



4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Υπάρχουν εξισώσεις, οι οποίες δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά με κατάλληλη διαδικασία η λύση τους ανάγεται στη λύση πολυωνυμικών. Τέτοιες εξισώσεις επιλύονται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° Να λυθεί η εξίσωση $x^2+\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x(2x-1)}=0$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $x\neq 0$ και $x\neq\frac{1}{2}$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$x^2+\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x(2x-1)}=0 \Leftrightarrow x(2x-1)x^2+x(2x-1)\frac{2}{2x-1}-x(2x-1)\frac{1}{x(2x-1)}=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^4-x^3+2x-1=0$$
$$\Leftrightarrow x^3(2x-1)+2x-1=0$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)(x^3+1)=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{2}$ και -1. Λόγω των περιορισμών δεκτή είναι μόνο η $x=-1$.

2° Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x}=x-2$.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για $x\geq 0$. Αν υψώσουμε και τα δυο μέλη της στο τετράγωνο, προκύπτει η εξίσωση $x=x^2-4x+4$, η οποία γράφεται $x^2-5x+4=0$ και έχει ως ρίζες τις $x_1=4$ και $x_2=1$. Οι τιμές αυτές του x, αν και ικανοποιούν τον περιορισμό $x\geq 0$ δεν είναι και οι δύο ρίζες της αρχικής εξίσωσης. Πράγματι αν θέσουμε τις τιμές αυτές στην αρχική εξίσωση, παίρνουμε:

Για $x=4$: $\sqrt{4}=4-2$ που είναι αληθής ισότητα
Για $x=1$: $\sqrt{1}=1-2$ που δεν είναι αληθής ισότητα.
Αρα η αρχική εξίσωση έχει ως μοναδική ρίζα την x=4.

ΣΧΟΛΙΟ Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει ότι, αν υψώσουμε τα μέλη μιας εξίσωσης στο τετράγωνο, τότε η εξίσωση που προκύπτει μπορεί να έχει και άλλες ρίζες εκτός από τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης. Είναι λοιπόν απαραίτητο σε τέτοιες περιπτώσεις να κάνουμε επαλήθευση των ριζών που βρίσκουμε και να απορρίπτουμε όσες από αυτές δεν επαληθεύουν την αρχική εξίσωση.

3° Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2x+7}-x=2$.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $x\geq -\frac{7}{2}$. Γι' αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:

$$\sqrt{2x+7}=x+2 \qquad \text{(απομονώνουμε το ριζικό)}$$
$$(\sqrt{2x+7})^2=(x+2)^2 \qquad \text{(υψώνουμε στο τετράγωνο)}$$
$$2x+7=x^2+4x+4$$
$$x^2+2x-3=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς -3 και 1. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η x=1 είναι ρίζα της αρχικής.

4° Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1.$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για τα $x\in\mathbb{R}$, για τα οποία ισχύουν $2x+6\geq 0$ και $x+4\geq 0$, δηλαδή για τα $x\geq -3$. Γι' αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:

$$\sqrt{2x+6}=1+\sqrt{x+4} \qquad \text{(απομονώνουμε το ριζικό)}$$

$$(\sqrt{2x+6})^2=(1+\sqrt{x+4})^2 \qquad \text{(υψώνουμε στο τετράγωνο)}$$

$$2x+6=1+2\sqrt{x+4}+x+4$$

$$x+1=2\sqrt{x+4}$$

$$(x+1)^2=4(x+4) \qquad \text{(υψώνουμε στο τετράγωνο)}$$

$$x^2-2x-15=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς -3 και 5. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η x = 5 είναι ρίζα της αρχικής.

ΣΧΟΛΙΟ Εξισώσεις όπως αυτές των παραδειγμάτων 2, 3 και 4, όπου παραστάσεις του x βρίσκονται κάτω από ριζικά, ανήκουν σε μια κατηγορία εξισώσεων που λέγονται **άρρητες**.

Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)}>0\ (<0)$

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)}>0\Leftrightarrow A(x)\cdot B(x)>0 \quad \text{και} \quad \frac{A(x)}{B(x)}<0\Leftrightarrow A(x)\cdot B(x)<0,$$

αφού, καμία από τις λύσεις της $A(x)\cdot B(x)>0$ και της $A(x)\cdot B(x)<0$ δεν μηδενίζει το B(x).

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση

$$\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2+x-6}>0.$$

Η ανίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)>0,$$

δηλαδή με την P(x)> 0 , η οποία, από τον πίνακα προσήμου του P(x) αληθεύει όταν $x\in(-3,1)\cup(2,+\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ Μία ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ αληθεύει για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως

$$A(x) \cdot B(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad B(x) \neq 0$$

Έστω για παράδειγμα η ανίσωση $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} \geq 0$. Έχουμε:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-4x+3)(x^2+3x-4) \geq 0 \quad \text{και} \quad x^2+3x-4 \neq 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-4x+3 είναι οι 1 και 3 , ενώ του τριωνύμου x^2+3x-4 είναι οι 1 και -4.

Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου του γινομένου:

$$P(x) = (x^2-4x+3)(x^2+3x-4)$$

x	$-\infty$		-4		1		3	$+\infty$
x^2-4x+3	+		+	0	–	0	+	
x^2+3x-4	+	0	–	0	+		+	
$P(x)$	+		–		–		+	

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty,-4) \cup [3,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} = \frac{x^2-3x+2}{x}$ **ii)** $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}$

2. Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x - 2 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{x^3} = -4x$ **ii)** $\sqrt{3x-2} = 4$ **iii)** $\sqrt{5x-1} = -4$

iv) $\sqrt{x+3} = x+1$ **v)** $\sqrt{x+3} = \sqrt{10-x}+1$ **vi)** $\sqrt{x} + \sqrt{x-20} = 10$

vii) $\sqrt{x} = \frac{x-8}{2\sqrt{x}} + 3$ **viii)** $\sqrt{1+2\sqrt{x}} = \sqrt{x+1}$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-2}{x+1} > 0$ **ii)** $\frac{2x+1}{x-3} \leq 0$ **iii)** $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \leq 0$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{2x+3}{x-1} > 4$ **ii)** $\frac{x-2}{3x+5} \le 4$ **iii)** $\frac{x^2-3x-10}{x-1} + 2 \le 0$

iv) $\frac{x}{3x-5} \le \frac{2}{x-1}$ **v)** $\frac{x}{2x-1} \ge \frac{3}{x+2}$

6. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + \frac{2}{2x-1} \ge \frac{1}{x(2x-1)}$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\sqrt{2x+3} < \sqrt{1-3x}$ **ii)** $\sqrt{x-3} > x-5$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$ **ii)** $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 6 = 0$

3. Ομοίως τις εξισώσεις:

i) $x^2 + x - 4 = \sqrt{x^2 + x - 2}$ **ii)** $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x+4}$

4. Ομοίως τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{x-1} = \alpha$ **ii)** $\sqrt{4x^2+1} = 2x - \lambda$

5. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^4 x - 3\eta\mu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\eta\mu x + 4 = 0$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ)

1. Με τη βοήθεια της $(x^2 + x + 1)(x-1) = x^3 - 1$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^{3\nu} + x^{3\mu+1} + x^{3\rho+2}$ διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+x+1 (ν, μ, ρ θετικοί ακέραιοι).

2. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

i) $f(x) = \nu x^{\nu+1} - (\nu+1)x^{\nu} + 1$ διαιρείται με το $(x-1)^2$. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης.

ii) $g(x) = (\nu-2)x^{\nu} - \nu x^{\nu-1} + \nu x - \nu + 2$ διαιρείται με το $(x-1)^3$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^4 + 2x^3 + 2x + 1 = 0$ **ii)** $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

(Οι εξισώσεις αυτές είναι της μορφής $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$, $\alpha \neq 0$. Εξισώσεις της μορφής αυτής ανήκουν σε μια κατηγορία εξισώσεων που λέγονται **αντίστροφες**).

Υπόδειξη: Να διαιρέσετε τα μέλη των εξισώσεων με x^2 και στη συνέχεια να θέσετε $x+\frac{1}{x}=y$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^4+x^3-16x^2-2x+4=0$ **ii)** $x^4+8x^3+13x^2-8x+1=0$

5. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2+2x-1)^2-3(x^2+2x+3)+14=0$

Υπόδειξη: Να θέσετε $x^2+2x-1=y$.

6. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο $x^5+3x^2+\alpha x+\beta$, διαιρούμενο με το x^2-2, δίνει υπόλοιπο 5x+8.

7. Αν $P(x)=x^{17}-12x^{16}+12x^{15}-12x^{14}+...+12x-1$, να υπολογιστούν οι τιμές P(11) και P(13).

8. Ο ήλιος ενός πλανητικού συστήματος με την πάροδο του χρόνου γίνεται άλλοτε θερμότερος και άλλοτε ψυχρότερος. Έχει εκτιμηθεί ότι η θερμοκρασία T σε °C στην επιφάνεια ενός πλανήτη του συστήματος, μετά από x εκατομμύρια χρόνια θα είναι $T=10x^3-100x^2+270x-180$.



i) Μετά πόσο χρόνο θα έρθει το τέλος των παγετώνων στον πλανήτη;

ii) Πότε θα αρχίσει ο επόμενος παγετώνας και πόσο θα διαρκέσει;

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι ιστορικές ρίζες της μελέτης των πολυωνύμων βαθμού κυρίως 1 και 2 βρίσκονται στην κοιλάδα του Τίγρη και του Ευφράτη, τη Μεσοποταμία όπως λεγόταν, που βρίσκεται στο σημερινό Ιράκ. Οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι που ζούσαν στην περιοχή αυτή και δημιούργησαν έναν από τους αρχαιότερους πολιτισμούς γύρω στο 2000 π.Χ. ήξεραν να βρίσκουν τις ρίζες πολυωνύμων 1ου και 2ου βαθμού και ήξεραν να υπολογίζουν προσεγγιστικά τετραγωνικές ρίζες αριθμών. Ο συμβολισμός τους ήταν πρωτόγονος και οι διατυπώσεις των προβλημάτων και των λύσεών τους γινόταν κυρίως με λόγια. Αξίζει να σημειωθεί ότι για τα Μαθηματικά επιτεύγματα των Βαβυλωνίων, που ήταν πολύ αξιόλογα για τα μέτρα εκείνης της εποχής, υπήρχε σχεδόν απόλυτη άγνοια μέχρι πολύ τελευταία και μόλις γύρω στο 1930 μελέτες του Otto Neugebauer μας διαφώτισαν γύρω από τα μαθηματικά εκείνης της περιόδου.

Το επόμενο μεγάλο βήμα οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες. Οι Πυθαγόρειοι στον 5° αιώνα π.Χ. αποδεικνύουν ότι οι τετραγωνικές ρίζες, που συναντιώνται αναγκαστικά στη μελέτη πολυωνύμων 2ου βαθμού, οδηγούν σε ένα νέο είδος αριθμών, που κανείς μέχρι τότε δεν υποπτευόταν την ύπαρξή τους. Οι Βαβυλώνιοι είχαν βρει την πολύ ακριβή προσέγγιση ότι $\sqrt{2}=1,414213,$ όμως δεν είχαν διερωτηθεί αν υπάρχει ο $\sqrt{2}$, δηλαδή αν υπάρχει κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, τέτοιο ώστε $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=2$. Αυτό είναι ένα πολύ βαθύτερο ερώτημα στο οποίο δεν μπορούμε να απαντήσουμε οσοδήποτε ακριβείς υπολογισμούς και να κάνουμε. Η ανακάλυψη των Πυθαγορείων, ότι δεν υπάρχει τέτοιο κλάσμα, είναι μια από τις πρώτες μαθηματικές αποδείξεις όπου η αυστηρή λογική μας δείχνει ότι η απλή εμπειρία και διαίσθηση είναι δυνατόν να μας εξαπατήσουν. Σε βιβλία του Ευκλείδη δίνεται η γεωμετρική λύση εξισώσεων 1ου και 2ου βαθμού, δηλαδή η κατασκευή των ριζών με κανόνα και διαβήτη. Η άλλη μεγάλη ελληνική συνεισφορά προς την κατεύθυνση αυτή ήταν η βελτίωση του αλγεβρικού συμβολισμού που εκτίθεται στα Αριθμητικά του Διόφαντου (περί το 250 π.Χ.). Τα Αριθμητικά του Διόφαντου είναι για την Άλγεβρα ότι είναι τα Στοιχεία του Ευκλείδη για τη Γεωμετρία και η επίδρασή τους στους επόμενους αιώνες ήταν πολύ μεγάλη.

Από τους αρχαίους Έλληνες τη σκυτάλη παρέλαβαν οι Άραβες, οι οποίοι βελτίωσαν αποφασιστικά τον Αλγεβρικό λογισμό, δεν έλυσαν όμως εξισώσεις 3ου βαθμού παρ' όλο που εργάσθηκαν προς την κατεύθυνση αυτή με βασικό κίνητρο τη μελέτη τριγωνομετρικών ζητημάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η λέξη Άλγεβρα προέρχεται από παραφθορά του τίτλου ενός βιβλίου του αστρονόμου Mohammed ibn Musa al-khowarizmi (περί το 825), που ήταν Al-jabr w'almuqabala.

Όπως γνωρίζουμε, οι ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δίνονται από τον τύπο $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ που βρίσκεται σχετικά εύκολα και με πολλούς τρόπους (βλέπε ιστορικό σημείωμα του 3ου Κεφαλαίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου). Ο σκοπός των μαθηματικών ήταν να βρουν ανάλογους τύπους για εξισώσεις 3ου και μεγαλύτερου βαθμού. Μετά από άκαρπες προσπάθειες αιώνων ο Scipio del Ferro και ο Niccolo Fontana στις αρχές του 16ου αιώνα εργαζόμενοι ανεξάρτητα, βρήκαν ως τύπο επίλυσης της εξίσωσης $x^3+\alpha x=\beta$ (*) τον

$$x=\sqrt[3]{\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^3+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}}+\sqrt[3]{\frac{\beta}{2}-\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^3+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}}$$

Ο τύπος αυτός φέρει το όνομα του Cardano που τον δημοσίευσε στην εργασία του Ars Magna το 1545 και τον αποδίδει στον Fontana. Στην ίδια εργασία υπάρχει μια μέθοδος αναγωγής μιας εξίσωσης 4ου βαθμού σε επίλυση εξίσωσης 3ου βαθμού. Έχει μείνει ιστορική η διαμάχη των Cardano, του Niccolo del Ferro και του Ludovico Ferrari για την πατρότητα των τύπων αυτών.

Όλες οι προσπάθειες που έγιναν στη συνέχεια και για τρεις περίπου αιώνες, με σκοπό να βρεθούν τύποι για εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του 4, απέτυχαν. Είναι χαρακτηριστικό ότι με το πρόβλημα αυτό ασχολήθηκαν οι μεγάλοι μαθηματικοί της εποχής εκείνης, όπως ο Lagrange και ο Gauss. Αυτοί, μολονότι δεν έφθασαν σε συμπέρασμα για το αν οι ρίζες τέτοιων εξισώσεων μπορούν να εκφρασθούν με τύπους όπως οι παραπάνω, εν τούτοις στην προσπάθειά τους αυτή έκαναν σημαντικές ανακαλύψεις στην Άλγεβρα.

---

* Κάθε εξίσωση 3ου βαθμού: $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x=y-\frac{\alpha}{3}$ παίρνει τη μορφή $x^3+Ax=B$.

Η μεγαλύτερη συμβολή στην τελική επίλυση του προβλήματος των αλγεβρικών εξισώσεων δόθηκε τελικά στις αρχές του 19ου αιώνα από τους νεαρούς μαθηματικούς Abel και Galois. Ο Νορβηγός Niels H. Abel (1802-1829) απέδειξε το 1824, σε ηλικία 22 ετών, ότι δεν υπάρχουν τύποι, όπως στην περίπτωση 2ου, 3ου και 4ου βαθμού, που να δίνουν τις ρίζες μιας γενικής εξίσωσης 5ου βαθμού. Οπωσδήποτε χρησιμοποίησε τα αποτελέσματα των προηγουμένων του και κυρίως του Lagrange. Το γενικό πρόβλημα που παρέμενε ήταν να βρεθούν οι συνθήκες, ώστε μια εξίσωση να μπορεί να επιλυθεί. Ο Abel πέθανε το 1829 σε ηλικία 27 ετών από τις κακουχίες και τη φυματίωση, χωρίς να ολοκληρώσει τη λύση του προβλήματος. Κατά τους βιογράφους του ταξίδευε στην Ευρώπη πεζός, για να συναντήσει τους μεγάλους μαθηματικούς της εποχής.

Το γενικό πρόβλημα έλυσε λίγο αργότερα ο νεαρός Γάλλος μαθηματικός Evariste Galois (1811-1832), που έδωσε τις συνθήκες, ώστε μια εξίσωση να έχει ρίζες που να εκφράζονται με τους συντελεστές.

Η ζωή του Galois απασχόλησε πολλούς ιστορικούς και οι βιογραφίες του είναι μεταξύ μύθου και πραγματικότητας. Ο Galois έζησε σε μια εποχή που η Γαλλία ταραζόταν από πολιτικές αναταραχές. Αφού απέτυχε στις εισαγωγικές εξετάσεις για την École Polytechnique το 1829 λόγω ελλιπούς προπαρασκευής, γράφτηκε στην École Preparatoire. Εκεί η ζωή του σημαδεύτηκε από αποβολές, ασθένειες και φυλακίσεις για πολιτικούς λόγους. Τελικά έλαβε μέρος σε μια μονομαχία, όπου τραυματίσθηκε θανάσιμα και πέθανε στις 31 Μαΐου του 1832, πριν συμπληρώσει τα 21 χρόνια του. Τις ανακαλύψεις του ο Galois τις έγραψε την τελευταία νύχτα της ζωής του πριν από τη μονομαχία σε ένα δυσανάγνωστο χειρόγραφο 31 σελίδων, το οποίο έμεινε στην αφάνεια, μέχρι που ο Γάλλος ακαδημαϊκός Joseph Liouville το παρουσίασε στη Γαλλική Ακαδημία στις 4 Ιουλίου 1843.

Κεφάλαιο 5ο
ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Σε προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε την έννοια της δύναμης με **βάση** έναν πραγματικό αριθμό και **εκθέτη** ακέραιο. Συγκεκριμένα:

— Στην αρχή ορίσαμε τη δύναμη ενός πραγματικού αριθμού με εκθέτη θετικό ακέραιο, ως εξής:

$$\alpha^{\nu}=\begin{cases}\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot....\cdot\alpha}_{\nu\ \ \text{παράγοντες}} & ,\alpha\nu\quad \nu>1\\ \alpha & ,\alpha\nu\quad \nu=1\end{cases},\ \alpha\in\mathbb{R}\ \text{και}\ \nu\in\mathbb{N}^{*}$$

Για παράδειγμα:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$$

— Στη συνέχεια με τη βοήθεια των ισοτήτων:

$$\alpha^{0}=1\ \text{και}\ \alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu},\ \ \alpha\neq 0\ \text{και}\ \nu\in\mathbb{N}^{*}$$

επεκτείναμε την έννοια της δύναμης ενός πραγματικού αριθμού και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ακέραιος. Για παράδειγμα:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε παραστάσεις της μορφής $2^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{4}}$ και γενικά της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\alpha\geq 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος. Τις παραστάσεις αυτές θα ονομάσουμε **δυνάμεις με ρητό εκθέτη**. Ο ορισμός θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούνται οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων. Τι θα πρέπει να σημαίνει π.χ. το $3^{\frac{2}{5}}$; Αν απαιτήσουμε να ισχύει η ιδιότητα $(\alpha^{p})^{q}=\alpha^{pq}$ και για τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη, τότε θα είναι:

$$(3^{\frac{2}{5}})^{5}=3^{\frac{2}{5}\cdot 5}=3^{2}$$

Αρα πρέπει ο $3^{\frac{2}{5}}$ να είναι λύση της εξίσωσης $x^5 = 3^2$, δηλαδή ο αριθμός $\sqrt[5]{3^2}$.

Πρέπει δηλαδή να είναι $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$.

Γενικά

Αν α>0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Επιπλέον, αν μ, ν, θετικοί ακέραιοι, ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

Έτσι π.χ. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

$$27^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{27^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{3^4}$$

Αποδεικνύεται ότι, όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ρητό.

Το γεγονός αυτό διευκολύνει το λογισμό με τα ριζικά. Έτσι είναι π.χ.

$$\sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{4}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{\alpha^7}$$

Οι δυνάμεις αυτές υπολογίζονται εύκολα με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης ως εξής:

ΔΥΝΑΜΗ		ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΚΤΡΩΝ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
$2^{1,4}$	2	x^y 1.4 =	2.6390158
$1,4^{-3,21}$	1.4	x^y 3.21 +/– =	0.3395697
$5^{\frac{7}{3}}$	5	x^y (7 ÷ 3) =	42.749398

Δυνάμεις με άρρητο εκθέτη

Γεννιέται τώρα το ερώτημα:

Μπορούμε να ορίσουμε δυνάμεις της μορφής α^x με x άρρητο, κατά τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούνται οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ρητό εκθέτη;

Μπορούμε για παράδειγμα να ορίσουμε την $3^{\sqrt{2}}$;

Όπως είδαμε (βιβλίο Β' Γυμνασίου σελ. 45) οι δεκαδικές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ κατά προσέγγιση ακέραιας μονάδας, δεκάτου, εκατοστού κτλ. είναι

1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, 1,414213,.... (1)

Ας πάρουμε τώρα την ακολουθία αυτή των δεκαδικών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$ και την αντίστοιχη ακολουθία των δυνάμεων του 3:

$3^{1}, \quad 3^{1,4}, \quad 3^{1,41}, \quad 3^{1,414}, \quad 3^{1,4142}, \quad 3^{1,41421}, \quad 3^{1,414213}, \ldots$ (2)

Με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε ότι:

$$3^{1} = 3$$
$$3^{1,4} \simeq 4,6555367$$
$$3^{1,41} \simeq 4,7069650$$
$$3^{1,414} \simeq 4,72776950$$
$$3^{1,4142} \simeq 4,7287339$$
$$3^{1,41421} \simeq 4,7287839$$
$$3^{1,414213} \simeq 4,7288015$$

Αν παρατηρήσουμε τους αριθμούς αυτούς μας δίνεται η εξής εντύπωση: Όταν το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων της ακολουθίας (1) αυξάνει, οι όροι της ακολουθίας (2) φαίνεται να προσεγγίζουν έναν ορισμένο αριθμό, που λέγεται **οριακή τιμή** ή **όριο** της ακολουθίας αυτής. Είναι επομένως λογικό να ορίσουμε τη δύναμη $3^{\sqrt{2}}$ ως την πιο πάνω οριακή τιμή. Έτσι με προσέγγιση τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων είναι $3^{\sqrt{2}} \cong 4,7288$.

Γενικά αποδεικνύεται ότι:

Αν $\alpha > 0$, x άρρητος και ρ_v η δεκαδική προσέγγιση του x με ν δεκαδικά ψηφία, τότε καθώς το ν αυξάνει τείνοντας στο $+\infty$, οι όροι της ακολουθίας (α^{ρ_v}) «προσεγγίζουν» έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό, τον οποίο στο εξής θα ονομάζουμε όριο της ακολουθίας (α^{ρ_v}).

Το όριο αυτό συμβολίζεται με α^{x} και λέγεται **δύναμη του α με εκθέτη x**. Συμβολικά γράφουμε:

$$\alpha^{x} = \lim_{v \to \infty} \alpha^{\rho_v}$$

Επιπλέον, για κάθε $x > 0$, ορίζουμε $0^{x} = 0$.

Ο υπολογισμός δυνάμεων με άρρητο εκθέτη γίνεται με υπολογιστή τσέπης όπως στα παρακάτω παραδείγματα:

ΔΥΝΑΜΗ		ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΚΤΡΩΝ				ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
$3^{\sqrt{2}}$	3	x^y	2	$\sqrt{x}$	=	4.728801
2^{π}	2	x^y		exp	=	8.824977

Οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων, γνωστές από την Α΄ Λυκείου, αποδεικνύεται ότι ισχύουν και για δυνάμεις με εκθέτη πραγματικό αριθμό.

Συγκεκριμένα:

Αν α, β είναι **θετικοί** πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1+x_2} \qquad \alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \alpha^{x_1-x_2}$$

$$(\alpha^{x_1})^{x_2} = \alpha^{x_1 x_2}$$

$$(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$$

Εκθετική συνάρτηση

Έστω α ένας **θετικός** αριθμός. Όπως είδαμε προηγουμένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η δύναμη α^x. Επομένως αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη δύναμη α^x, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = \alpha^x,$$

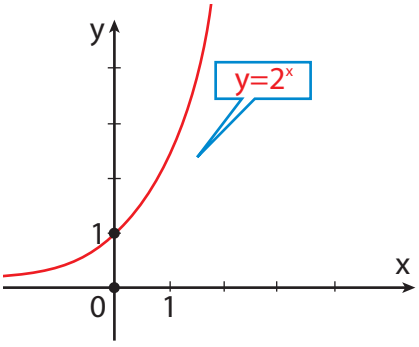
η οποία, στην περίπτωση που είναι $\alpha \neq 1$, λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση α**.

Αν είναι $\alpha = 1$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

Έστω τώρα η εκθετική συνάρτηση $f(x) = 2^x$. Για να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$y=2^x$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

Τοποθετώντας τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα στο καρτεσιανό επίπεδο και ενώνοντάς τα με συνεχή καμπύλη έχουμε το διπλανό σχήμα.



Η συνάρτηση αυτή, καθώς και κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \alpha^x \text{ με } \alpha > 1,$$

αποδεικνύεται ότι:

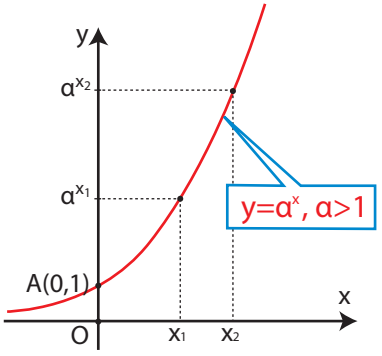
• Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

• Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.

• Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\textbf{αν } x_1 < x_2, \textbf{ τότε } \alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$$

• Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο A(0,1) και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των x.



Έστω επιπλέον και η εκθετική συνάρτηση $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Για να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών:

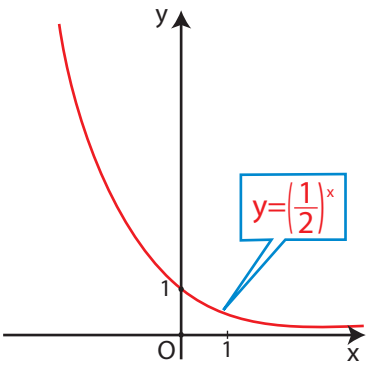
x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

Τοποθετώντας τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα στο καρτεσιανό επίπεδο και ενώνοντάς τα με συνεχή καμπύλη έχουμε το διπλανό σχήμα.

Η συνάρτηση αυτή, καθώς και κάθε συνάρτηση της μορφής

$$\textbf{f(x)} = \alpha^x \textbf{ με } 0<\alpha<1,$$

αποδεικνύεται ότι:



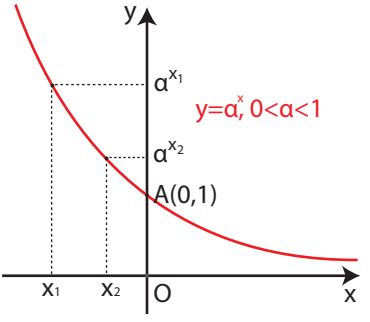
• Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

• Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0,+\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.

• Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\textbf{αν } x_1 < x_2, \textbf{ τότε } \alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$$

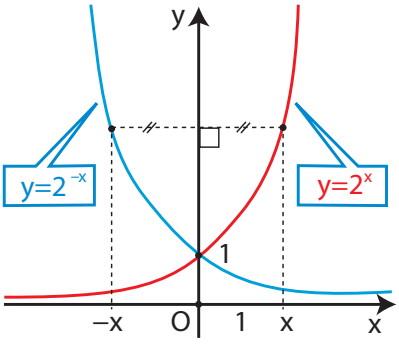
• Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο A(0,1) και έχει ασύμπτωτο το θετικό ημιάξονα των x.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Για τις συναρτήσεις $f(x)=2^x$ και $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}=2^{-x}=f(-x)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις τους είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y'y.



ΣΧΟΛΙΟ Από τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, με $0<\alpha\neq 1$, προκύπτει ότι:

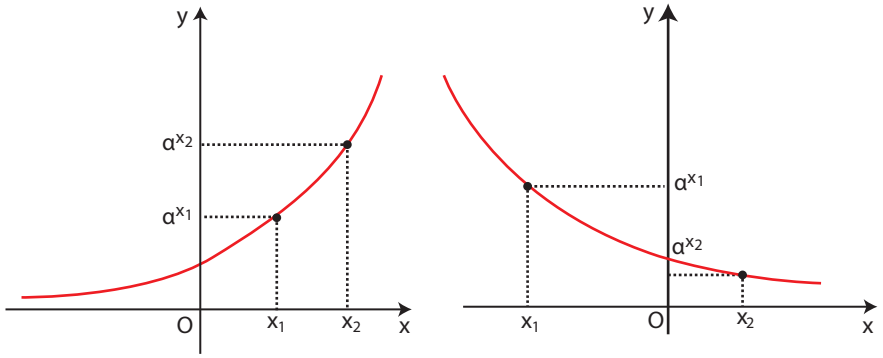
$$\text{αν } x_1\neq x_2, \text{ τότε } \alpha^{x_1}\neq\alpha^{x_2}$$

οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι:

$$\text{αν } \alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}, \text{ τότε } x_1=x_2.$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha^{x_1}=\alpha^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$$



Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την επίλυση εξισώσεων, όπου ο άγνωστος εμφανίζεται στον εκθέτη. Οι εξισώσεις αυτές λέγονται **εκθετικές εξισώσεις**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2^{3x}=\frac{1}{64}$ **ii)** $9^x-8\cdot 3^x-9=0$

ΛΥΣΗ

i) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$2^{3x}=\frac{1}{64}\Leftrightarrow 2^{3x}=2^{-6}$$
$$\Leftrightarrow 3x=-6$$
$$\Leftrightarrow x=-2$$

[Επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι 1–1]

ii) Η εξίσωση γράφεται

$$3^{2x}-8\cdot 3^x-9=0\Leftrightarrow (3^x)^2-8\cdot 3^x-9=0$$

Αν θέσουμε $3^x=y$, αυτή γίνεται $y^2-8y-9=0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς -1 και 9. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως λύσεις τις λύσεις των εξισώσεων:

$$3^x=-1 \text{ και } 3^x=9$$

Απ' αυτές η πρώτη είναι αδύνατη, αφού $3^x>0$, ενώ η δεύτερη γράφεται $3^x=3^2$ και έχει ρίζα το x=2, που είναι και μοναδική ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

2° Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases}2\cdot 3^x-3\cdot 2^y=-22\\ 5\cdot 3^x+\frac{1}{2}\cdot 2^y=9\end{cases}$$

(εκθετικό σύστημα)

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε $3^x=\omega$ και $2^y=\varphi$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases}2\omega-3\varphi=-22\\ 5\omega+\frac{1}{2}\varphi=9\end{cases}$$

Το γραμμικό αυτό σύστημα έχει λύση $\omega=1$ και $\varphi=8$, οπότε το αρχικό σύστημα γράφεται

$$\begin{cases}3^x=1\\ 2^y=8\end{cases} \text{ ή ισοδύναμα } \begin{cases}3^x=3^0\\ 2^y=2^3\end{cases}$$

από το οποίο παίρνουμε x = 0 και y = 3.

3° Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $3^{x^2-3x} > \frac{1}{9}$ **ii)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \frac{1}{4}$

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $3^{x^2-3x} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x^2-3x} > 3^{-2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x > -2$ $\quad [\text{αφού } 3 > 1]$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 2$

ii) Έχουμε $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + x > 2$ $\quad \left[\text{αφού } \frac{1}{2} < 1\right]$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0$

$\Leftrightarrow x < -2 \quad \text{ή} \quad x > 1$

4° Να γίνουν οι γραφικές πραστάσεις των συναρτήσεων:

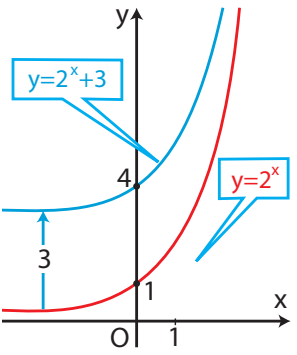
i) $f(x) = 2^x + 3$ **ii)** $g(x) = 2^{x-3}$ **iii)** $h(x) = 2^{x-3} + 2$

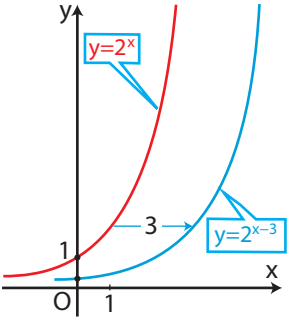
ΛΥΣΗ

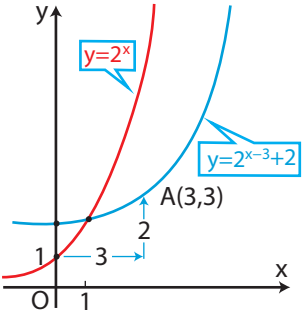
i) Η γραφική πράσταση της f προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $\varphi(x) = 2^x$ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

ii) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $\varphi(x) = 2^x$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά.

iii) Τέλος η γραφική παράσταση της h προκύπτει από δύο μετατοπίσεις της $\varphi(x) = 2^x$
– μιας οριζόντιας κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και
– μιας κατακόρυφης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.







Ο αριθμός e

Μια Τράπεζα για να διαφημιστεί κάνει μια πολύ ειδική προσφορά. Όποιος καταθέσει την επόμενη μέρα ποσό 1 εκατομμυρίου ευρώ, αυτό θα τοκιστεί με ετήσιο επιτόκιο 100% και με δυνατότητα ανατοκισμού του 1, 2, 3, ... ή ν φορές το χρόνο, σε ίσα χρονικά διαστήματα, ανάλογα με την επιθυμία του καταθέτη.
Έχει σημασία για τον καταθέτη το πόσες φορές το χρόνο θα ανατοκιστεί το κεφάλαιο:

Από το γνωστό τύπο του ανατοκισμού $\alpha_\nu = \alpha_0(1+\tau)^\nu$, όπου $\tau = \frac{\varepsilon}{100}$.

- για ν=1, είναι τ=1 και $\alpha_1 = 1(1+1)^1 = 2$ εκατομμύρια ευρώ.
- για ν=2, είναι τ= $\frac{1}{2}$ και $\alpha_2 = 1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$ εκατομμύρια ευρώ.
- για ν=3, είναι τ= $\frac{1}{3}$ και $\alpha_3 = 1\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2,44$ εκατομμύρια ευρώ.

.....

- για ν=ν, είναι τ= $\frac{1}{\nu}$ και $\alpha_\nu = 1\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ εκατομμύρια ευρώ.

Αν χρησιμοποιήσουμε υπολογιστή τσέπης κατασκευάζουμε τον πίνακα:

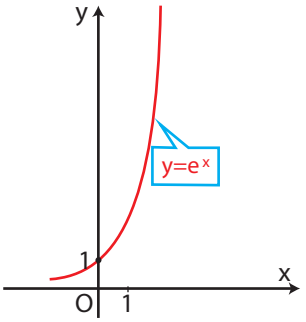
ν	1 (ανά έτος)	2 (ανά εξάμηνο)	4 (ανά εποχή)	12 (ανά μήνα)	52 (ανά εβδομάδα)
$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$	2	2,25	2,441406	2,613035	2,704813

1000	10000	100000	1000000
2,716923	2,718145	2,718268	2,718280

Παρατηρούμε ότι, καθώς το ν αυξάνει, αυξάνει και το $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ και προσεγγίζει έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και συμβολίζεται με e. Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στο μεγάλο Ελβετό, μαθηματικό Leohard Euler (1707-1783). Ο αριθμός e με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων είναι e = 2,71828.
Συμβολικά γράφουμε $e = \lim\limits_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι οι τιμές του ν έχουν μεγάλη σημασία όσο αυτές παραμένουν «μικρές». Από μια τιμή όμως και μετά, όσο και αν αυξάνει το ν, το τελικό ποσό δεν μεταβάλλεται ουσιαστικά.

Σε πολλές πραγματικές εφαρμογές εμφανίζονται εκθετικές συναρτήσεις με βάση τον αριθμό e. Η απλούστερη τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = e^x$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται απλώς **εκθετική** και η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής

Μία ακόμη εκθετική συνάρτηση με βάση το e είναι η

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{c\,t} \qquad (1)$$

Αυτή εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με το χρόνο t. Το Q_0 είναι η **αρχική τιμή** του Q (για t = 0) και είναι $Q_0 > 0$, ενώ το c είναι μια σταθερά που εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως **νόμος της εκθετικής μεταβολής.** Αν $c > 0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής αύξησης**, ενώ αν $c<0$ η Q είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής απόσβεσης**. Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής αποτελεί ένα ικανοποιητικό μοντέλο για πάρα πολλές εφαρμογές της Φυσικής, της Βιολογίας, της Στατιστικής και άλλων επιστημών. Για παράδειγμα ο αριθμός των γραμμαρίων μιας ραδιενεργού ουσίας κατά τη χρονική στιγμή t (σε δευτερόλεπτα) δίνεται από τον τύπο $Q(t) = 200 \cdot e^{-0,3t}$. Αυτό σημαίνει ότι η ουσία που παραμένει αδιάσπαστη μετά από 7 δευτερόλεπτα είναι:

$$Q(7) = 200e^{-0,3\cdot 7} \simeq 200(2,718)^{-2,1} \simeq 24,5 \text{ γραμμάρια.}$$

Ο χρόνος που χρειάζεται για να διασπασθεί ή να εξαφανισθεί η μισή ποσότητα μιας ραδιενεργού ουσίας λέγεται **ημιζωή** ή **χρόνος υποδιπλασιασμού** της ραδιενεργού ουσίας.

Στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρεται η ημιζωή ορισμένων ραδιενεργών ισοτόπων:

ΙΣΟΤΟΠΟ	**ΗΜΙΖΩΗ**
Άνθρακας (C^{14})	5730 έτη
Ράδιο (Ra^{226})	1600 έτη
Πολώνιο (Po^{210})	138 ημέρες
Φώσφορος (P^{32})	14 ημέρες

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 5 χρόνια, να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού είναι $Q(t)=Q_0 2^{-\frac{t}{5}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού η ημιζωή είναι 5 χρόνια, από το νόμο της εκθετικής απόσβεσης $Q(t)=Q_0\cdot e^{c\cdot t}$ έχουμε:

$$\frac{Q_0}{2}=Q_0\cdot e^{c\cdot 5}\Leftrightarrow e^{5c}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{c}=\sqrt[5]{\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{5}}$$

Άρα $Q(t)=Q_0 2^{-\frac{t}{5}}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=3^x$ και $f_1(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

ii) $f(x)=3^x$, $f_2(x)=3^x+2$ και $f_3(x)=3^x-3$

iii) $f(x)=3^x$, $f_4(x)=3^{x-2}$ και $f_5(x)=3^{x+2}$

iv) $f(x)=3^x$ και $f_6(x)=3^{x-2}+1$

v) $g(x)=e^x$, $g_1(x)=e^{x+2}$, $g_2(x)=e^{-x}$ και $g_3(x)=e^{-x}+2$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^x=64$ **ii)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{8}$ **iii)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$ **iv)** $3^{-x}=\frac{1}{81}$

v) $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\frac{64}{27}$ **vi)** $27^{4x}=9^{x+1}$ **vii)** $32^x=16^{1-x}$ **viii)** $3^{x^2-x-2}=1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{2x+1}-4\cdot 2^x=0$ ii) $2\cdot 4^x-5\cdot 2^x+2=0$

iii) $3^{2x+1}-26\cdot 3^x-9=0$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $5^{x^2-5x+6}<1$ **ii)** $7^{2x-4}>7^{x+1}$ **iii)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-4}$

5. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases}8^{2x+1}=32\cdot 4^{4y-1}\\ 5\cdot 5^{x-y}=5^{2y+1}\end{cases}$ **ii)** $\begin{cases}3^x+2^y=11\\ 3^x-2^y=7\end{cases}$

6. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} e^x : e^y = 1 \\ e^x \cdot e^y = e^2 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 8 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$

7. Να λύσετε την ανίσωση $w^2 - 101w + 100 < 0$ και στη συνέχεια την ανίσωση

$$10^{2x} - 101 \cdot 10^x + 100 < 0.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση: $f(x) = \left(\frac{2-\alpha}{2\alpha - 1}\right)^x$. Για ποιες από αυτές τις τιμές η συνάρτηση είναι:

i) γνησίως φθίνουσα **ii)** γνησίως αύξουσα

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $4^{x-1} - 5\sqrt{4^{x-2}} + 1 = 0$ **ii)** $3^x + 3^{x-1} = \frac{45}{3^{x+2}} + \frac{7}{3^x}$

iii) $21 \cdot 3^x + 5^{x+3} = 3^{x+4} + 5^{x+2}$ **iv)** $3^{2x} + 9^x = 11 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1}$

v) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

3. Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3^y + 16 \cdot 2^{-x} = 11 \end{cases}$ **ii)** $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 250 \\ 2^y \cdot 5^x = 40 \end{cases}$

4. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3^{|x|}$ **ii)** $f(x) = 3^{-|x|}$

5. Αν $f(x) = \frac{1}{2}(\alpha^x + \alpha^{-x})$ και $g(x) = \frac{1}{2}(\alpha^x - \alpha^{-x})$, να αποδείξετε ότι

$$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$$

6. Αν αφήσουμε το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου με βενζίνη ανοικτό, η βενζίνη εξατμίζεται με ρυθμό 20% ανά εβδομάδα.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες.

ii) Να κάνετε τη γραφική της παράσταση

iii) Με τη χρήση υπολογιστή τσέπης να διαπιστώσετε ότι μετά 40 εβδομάδες μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.



7. Το ραδιενεργό Ράδιο έχει χρόνο υποδιπλασιασμού 1600 χρόνια. Αν η αρχική ποσότητα είναι 5 γραμμάρια,

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση, η οποία δίνει την ποσότητα του Ραδίου μετά t χρόνια είναι $Q(t) = 5(0,5)^{\frac{t}{1600}}$

ii) να υπολογίσετε την ποσότητα που θα έχει απομείνει μετά 600 χρόνια με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων.

iii) να αποδείξετε ότι μετά 20000 χρόνια μόλις 0,001 γραμμάρια θα έχουν απομείνει.

8. Ένας πωλητής αυτοκινήτων βεβαιώνει τους πελάτες του ότι η αξία ενός αυτοκινήτου 40.000 ευρώ ελαττώνεται κατά 15% το χρόνο στα πρώτα 6 χρόνια από την πώλησή του.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση που δίνει την τιμή του αυτοκινήτου μέσα στα 6 χρόνια.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή του αυτοκινήτου στο τέλος του έκτου χρόνου.

9. Η ένταση του ηλιακού φωτός σε βάθος x μέτρα μιας θολής λίμνης, ελαττώνεται εκθετικά ως προς το x, σύμφωνα με τον τύπο

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-0,5x} \quad (x \geq 0),$$

όπου I_0 είναι η ένταση στην επιφάνεια του νερού.

i) Να υπολογίσετε το $e^{-0,5x}$ για x = 0, 1 , 2 , 3 , 4 , 5 .

ii) Να βρείτε την τιμή του x, στον πλησιέστερο ακέραιο, για την οποία ο λόγος είναι $\frac{I(x)}{I_0}$ είναι

(α) 1 (β) 0,1.



iii) Να επιβεβαιώσετε και γραφικά την τιμή που θα βρείτε.

10. Η θερμοκρασία T(t) (σε °C) ενός βραστήρα, κατέρχεται μέχρι να φτάσει την θερμοκρασία T_0 του δωματίου, σύμφωνα με τον τύπο

$$T(t) = T_0(1 + e^{-2t}) \quad (t \geq 0)$$

i) Να υπολογίσετε το e^{-2t} για t = 0, 1, 2, 3

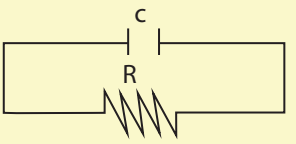
ii) Να βρείτε την τιμή του t, στον πλησιέστερο ακέραιο, για την οποία ο λόγος $\frac{T(t)}{T_0}$ είναι

(α) 1,1 (β) 2.



11. Πυκνωτής χωρητικότητας C (σε F) έχει φορτίο q_0 (σε Cb). Αν συνδέσουμε τον πυκνωτή με αντίσταση R (σε ohm), το φορτίο του πυκνωτή ελαττώνεται σύμφωνα με τον τύπο.

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \text{ σε δευτερόλεπτα})$$



i) Με μια «πρόχειρη» γραφική παράσταση να δείξετε πώς μεταβάλλεται το φορτίο q ως προς το χρόνο t.

ii) Να βρείτε τις τιμές του t της μορφής kRC (k ακέραιος) μετά τις οποίες το φορτίο γίνεται μικρότερο από:

α) $\frac{1}{2}q_0$ β) $\frac{1}{10}q_0$

5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Η έννοια του λογάριθμου

ΠΡΟΒΛΗΜΑ **Ο πληθυσμός της γης αυξάνει με ετήσιο ρυθμό 1,7%. Το 1987 ήταν 5 δισεκατομμύρια κάτοικοι. Αν συνεχίζει να αυξάνει με τον ίδιο ρυθμό, πότε θα διπλασιαστεί;**

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^\nu$ (βλ. ανατοκισμός βιβλίο Άλγεβρας Α' Λυκείου σ. 141) ο πληθυσμός της γης μετά από t χρόνια θα είναι:

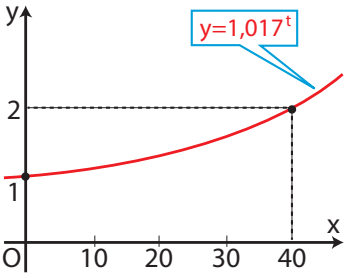
$$N(t) = 5\cdot 10^9 \cdot 1{,}017^t \text{ κάτοικοι}$$

Σύμφωνα με το πρόβλημα ζητάμε εκείνη την τιμή του t για την οποία ισχύει $N(t) = 2\cdot 5\cdot 10^9$ κάτοικοι, ζητάμε δηλαδή τη λύση της εξίσωσης

$$5\cdot 10^9 \cdot 1{,}017^t = 2\cdot 5\cdot 10^9$$

ή ισοδύναμα της: $1{,}017^t = 2$ (1)

Την εξίσωση αυτή, με τις γνώσεις που έχουμε μέχρι τώρα, μόνο με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(t) = 1{,}017^t$ μπορούμε να τη λύσουμε. Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι $t \simeq 41$. Επομένως ο πληθυσμός της γης θα διπλασιαστεί σε 41 περίπου χρόνια από το 1987, δηλαδή το 2028.



Με ανάλογο τρόπο, όπως στο παραπάνω πρόβλημα, μπορούμε να βρούμε κατά προσέγγιση τη λύση της εξίσωσης:

$$\alpha^x = \theta, \quad \text{όπου } \alpha > 0 \text{ με } \alpha \neq 1 \text{ και } \theta > 0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση, αφού η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι γνησίως μονότονη και ο θ ανήκει στο σύνολο τιμών της. Τη μοναδική αυτή λύση τη συμβολίζουμε με $\log_\alpha \theta$ και την ονομάζουμε **λογάριθμο του θ ως προς βάση α.**

Ώστε, αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε:

$$\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

> Ο $\log_\alpha \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ

Για παράδειγμα:

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{, γιατί} \quad 8 = 2^3$$
$$\log_4 2 = \frac{1}{2} \quad \text{, γιατί} \quad 2 = 4^{\frac{1}{2}}$$
$$\log_{10} 0{,}001 = -3 \quad \text{, γιατί} \quad 0{,}001 = 10^{-3}$$
$$\log_{0,5} 0{,}25 = 2 \quad \text{, γιατί} \quad 0{,}25 = 0{,}5^2$$

Από τον παραπάνω ορισμό του λογαρίθμου προκύπτει αμέσως ότι, αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\theta > 0$ ισχύει:

$$\log_\alpha \alpha^x = x \quad \text{και} \quad \alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$$

Εξάλλου, επειδή $1 = \alpha^0$ και $\alpha = \alpha^1$, ισχύει:

$$\log_\alpha 1 = 0 \quad \text{και} \quad \log_\alpha \alpha = 1$$

Ιδιότητες των λογαρίθμων

Οι ιδιότητες που ακολουθούν και είναι γνωστές ως **ιδιότητες των λογαρίθμων**, είναι πολύ σημαντικές για το λογισμό με λογάριθμους θετικών αριθμών. Οι ιδιότητες αυτές, όπως θα δούμε, προκύπτουν από αντίστοιχες ιδιότητες των δυνάμεων, πράγμα φυσικό άλλωστε, αφού και οι λογάριθμοι χρησιμοποιούνται ως εκθέτες δυνάμεων.

Αν $\alpha>0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

1. $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
2. $\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
3. $\log_\alpha \theta^k = k \log_\alpha \theta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Εστω ότι είναι:

$$\log_\alpha \theta_1 = x_1 \quad \text{και} \quad \log_\alpha \theta_2 = x_2 \tag{1}$$

Τότε έχουμε

$$\alpha^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_2} = \theta_2$$

οπότε

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1\theta_2, \quad \text{δηλαδή} \quad \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1\theta_2$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = x_1 + x_2$$

από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά:

$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

2. Εργαζόμασθε με τον ίδιο τρόπο.

3. Έστω ότι είναι:

$$\log_\alpha \theta = x \tag{2}$$

Τότε έχουμε $\alpha^x = \theta$ οπότε:

$$\alpha^{kx} = \theta^k$$

Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_\alpha \theta^k = kx$$

από την οποία, λόγω της (2), προκύπτει ότι:

$$\log_\alpha \theta^k = k \cdot \log_\alpha \theta$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Επειδή για κάθε $\theta > 0$ ισχύει $\sqrt[\nu]{\theta} = \theta^{\frac{1}{\nu}}$, έχουμε

$$\log_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \log_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu} \log_\alpha \theta$$

Ας δούμε τώρα με ένα παράδειγμα πώς οι παραπάνω ιδιότητες μας διευκολύνουν στο λογισμό με λογάριθμους θετικών αριθμών.

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{2}\log_2 256 + 2\log_2 3 - \log_2 18$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$A = \frac{1}{2}\log_2 256 + 2\log_2 3 - \log_2 18$$

$$= \log_2 \sqrt{256} + \log_2 3^2 - \log_2 18 \qquad \text{[Ιδιότητα 3]}$$

$$= \log_2 16 + \log_2 9 - \log_2 18$$

$$= \log_2\left(\frac{16\cdot 9}{18}\right) \qquad \text{[Ιδιότητες 1,2]}$$

$$= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

Δεκαδικοί λογάριθμοι

Πριν από την εξάπλωση των ηλεκτρονικών υπολογιστών, για πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς χρησιμοποιούσαν λογάριθμους με βάση το 10. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί λογάριθμοι**.

Ο δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ, συμβολίζεται απλά με logθ και όχι με $\log_{10}\theta$.

Επομένως:

$$\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

Οι δεκαδικοί λογάριθμοι υπολογίζονται εύκολα, με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν:

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ	ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΚΤΡΩΝ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
log 213	213	log	=	2.328379603
log 0,325	0.325	log	=	−0.488116639

Φυσικοί λογάριθμοι

Γνωρίσαμε σε προηγούμενες παραγράφους τον αριθμό e και είδαμε τη σημασία του στην περιγραφή διαφόρων φαινομένων. Στα μαθηματικά είναι πολύ χρήσιμοι και οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό e. Οι λογάριθμοι αυτοί λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι λογάριθμοι**.

Ο φυσικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ συμβολίζεται με lnθ και όχι με $\log_e\theta$.

Επομένως:

$$\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

Οι φυσικοί λογάριθμοι υπολογίζονται εύκολα, με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης, όπως στα παραδείγματα που ακολουθούν:

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ	ΣΕΙΡΑ ΠΛΗΚΤΡΩΝ			ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
ln325	325	ln	=	5.783825172
ln0,37	0.37	ln	=	−0.994252273

Αλλαγή βάσης

Αν και οι χρησιμοποιούμενες βάσεις των λογαρίθμων είναι συνήθως το 10 και το e, εντούτοις μερικές φορές απαιτείται να υπολογίσουμε λογάριθμους με άλλη βάση. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει με τον ακόλουθο τύπο, που είναι γνωστός ως τύπος αλλαγής βάσης των λογαρίθμων.

Αν $\alpha,\beta>0$ με $\alpha,\beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta>0$ ισχύει: $\log_\beta \theta = \dfrac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ*

Έστω ότι είναι $\log_\beta \theta = x$. Τότε $\theta = \beta^x$, οπότε:

$$\log_\alpha \theta = \log_\alpha \beta^x = x \log_\alpha \beta = \log_\beta \theta \cdot \log_\alpha \beta \qquad (\text{επειδή } x = \log_\beta \theta)$$

Άρα έχουμε:

$$\log_\beta \theta \cdot \log_\alpha \beta = \log_\alpha \theta, \quad \text{οπότε} \quad \log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$$

ΣΧΟΛΙΟ Σύμφωνα με τον τύπο αυτό έχουμε:

$$\log_\beta \theta = \frac{\log \theta}{\log \beta} \quad \text{και} \quad \log_\beta \theta = \frac{\ln \theta}{\ln \beta}$$

Επομένως ο υπολογισμός του $\log_\beta\theta$ ανάγεται στον υπολογισμό των δεκαδικών λογαρίθμων $\log\theta$ και $\log\beta$, ή των φυσικών λογαρίθμων $\ln\theta$ και $\ln\beta$.
Για παράδειγμα είναι:

$$\log_2 17 = \frac{\log 17}{\log 2} = 4,087462841$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Επειδή το σύμβολο $\log_\alpha\theta$ ορίσθηκε μόνο όταν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, όπου στο εξής το συναντάμε, θα εννοείται ότι $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$ χωρίς να τονίζεται ιδιαίτερα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° Σύμφωνα με την κλίμακα Richter το μέγεθος R ενός σεισμού εντάσεως I δίνεται από τον τύπο $R = \log\frac{I}{I_0}$

όπου I_0 μια ορισμένη ελάχιστη ένταση.

i) Να βρεθεί το μέγεθος R ενός σεισμού που έχει ένταση $I = 1000I_0$

ii) Να εκφρασθεί το I ως συνάρτηση του R και του I_0

iii) Πόσες φορές μεγαλύτερη είναι η ένταση ενός σεισμού από την ένταση ενός άλλου σεισμού που είναι μικρότερος κατά 1 μονάδα Richter.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $I = 1000I_0$, από τον τύπο $R = \log\frac{I}{I_0}$ βρίσκουμε ότι:

$$R = \log\frac{1000I_0}{I_0} = \log 1000 = 3$$

ii) Από τον ορισμό του δεκαδικού λογάριθμου προκύπτει ότι

$$R = \log\frac{I}{I_0} \Leftrightarrow \frac{I}{I_0} = 10^R \Leftrightarrow I = I_0 \cdot 10^R \qquad (1)$$

iii) Έστω δυο σεισμοί με εντάσεις I, I' και μεγέθη R, R' αντίστοιχα.

Αν $R' = R + 1$, τότε λόγω του τύπου (1) έχουμε:

$$\frac{I'}{I} = \frac{I_0 \cdot 10^{R'}}{I_0 \cdot 10^R} = \frac{10^{R+1}}{10^R} = 10, \quad \text{οπότε} \quad I' = 10 \cdot I$$

Επομένως η ένταση I' ενός σεισμού είναι 10πλάσια της έντασης I ενός άλλου σεισμού μικρότερου κατά 1 μονάδα Richter.

2° Οι χημικοί χρησιμοποιούν έναν αριθμό που συμβολίζεται με pH για να περιγράψουν την οξύτητα ενός διαλύματος. Εξ ορισμού είναι $pH = -\log[H^+]$, όπου $[H^+]$ είναι η συγκέντρωση των H^+ σε γραμμοϊόντα ανά λίτρο.

i) Να υπολογίσετε το pH των εξής ουσιών:

— του ξιδιού: $[H^+] \simeq 6{,}3 \cdot 10^{-3}$

— του νερού της θάλασσας: $[H^+] \simeq 5{,}0 \cdot 10^{-9}$

ii) Να υπολογίσετε τη συγκέντρωση γραμμοϊόντων υδρογόνου $[H^+]$ στις εξής ουσίες:

— Μπύρα: $pH \simeq 4{,}2$

— Γάλα: $pH \simeq 6{,}6$

ΛΥΣΗ

i) — Το pH του ξιδιού είναι ίσο με $-\log(6,3\cdot 10^{-3}) \simeq 2,2$

— Το pH του νερού της θάλασσας είναι ίσο με $-\log(5,0\cdot 10^{-9}) \simeq 8,3$

ii) — Επειδή για την μπύρα είναι $pH \simeq 4,2$, έχουμε

$$4,2 = -\log[H^+] \Leftrightarrow \log[H^+] = -4,2 \Leftrightarrow [H^+] = 10^{-4,2} \Leftrightarrow [H^+] = 6,3\cdot 10^{-5}$$

— Επειδή για το γάλα είναι $pH \simeq 6,6$, έχουμε

$$6,6 = -\log[H^+] \Leftrightarrow \log[H^+] = -6,6 \Leftrightarrow [H^+] = 10^{-6,6} \Leftrightarrow [H^+] = 2,5\cdot 10^{-7}$$

3° Αν η συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση του φωσφόρου P^{32} είναι $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,0495t}$, όπου t ο χρόνος σε ημέρες, να βρεθεί η ημιζωή του φωσφόρου P^{32}.

ΛΥΣΗ

Αν t είναι η ζητούμενη ημιζωή, τότε θα είναι $N(t) = \frac{N_0}{2}$. Επομένως έχουμε:

$$N_0 \cdot e^{-0,0495t} = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow e^{-0,0495t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -0,0495t = \ln\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -0,0495t = -0,69314718$$

$$\Leftrightarrow t = 14 \quad \text{ημέρες}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογισθούν, χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης, οι λογάριθμοι:

i) $\log_{10} 0,001$ **ii)** $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{10}$ **iii)** $\log_{\frac{1}{2}} 32$

iv) $\log_9 \frac{\sqrt{27}}{3}$ **v)** $\log_{\sqrt{2}} 16$ **vi)** $\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8}{27}}$

2. Για ποια τιμή του x ισχύει:

i) $\log_{10} x = 3$ **ii)** $\log_4 x = -\frac{1}{2}$ **iii)** $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{2}{3}$

3. Για ποια τιμή του α ισχύει:

i) $\log_\alpha 16 = 4$ **ii)** $\log_\alpha 8 = \frac{3}{2}$ **iii)** $\log_\alpha 0,1 = -3$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2$ **ii)** $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 = 1$

iii) $\frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32 = 1 - \log_{10} 2$ **iv)** $2^{\log_2 6 - 2\log_2 \sqrt{3}} = 2$

v) $2\log_2(2+\sqrt{2})+\log_2(6-4\sqrt{2})=2$

5. Ο αριθμός των βακτηριδίων που εμφανίζονται σε μια καλλιέργεια μετά από t ώρες δίνεται από τον τύπο $Q(t)=Q_0e^{0,34t}$, όπου Q_0 είναι ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων. Πόσος χρόνος θα περάσει ώστε ο αριθμός των βακτηριδίων να δεκαπλασιασθεί;

6. Κάτω από σταθερή θερμοκρασία, η ατμοσφαιρική πίεση p (σε Pascals), σε ύψος h (σε μέτρα) δίνεται από τον τύπο

$$p=101300\cdot e^{kh}$$

i) Να βρείτε την τιμή του k, αν σε ύψος 3050m η ατμοσφαιρική πίεση είναι 68900 Pascals.

ii) Ποια είναι η ατμοσφαιρική πίεση σε ύψος 1000m;

7. Οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με τη (φαινόμενη) λαμπρότητά τους σε κατηγορίες που καλούνται μεγέθη. Οι ασθενέστεροι αστέρες με λαμπρότητα L_0 λέμε ότι έχουν μέγεθος 6. Κάθε άλλος αστέρας λαμπρότητας L έχει μέγεθος m που καθορίζεται από τον τύπο:

$$m=6-2,5\cdot\log\frac{L}{L_0}$$

i) Να βρείτε το μέγεθος m του αστέρα που έχει λαμπρότητα $L=\sqrt[5]{100}\cdot L_0$.

ii) Πόσες φορές λαμπρότερος είναι ένας αστέρας $1^{ου}$ μεγέθους από έναν αστέρα $6^{ου}$ μεγέθους;

8. Οι πωλήσεις S(t) (σε χιλιάδες μονάδες) ενός προϊόντος σε διάστημα t χρόνων μετά την εισαγωγή του στην αγορά δίνονται από τον τύπο $S(t)=100(1-e^{kt})$.

i) Να υπολογίσετε το k, αν οι πωλήσεις κατά το πρώτο έτος ανήλθαν σε 15000 μονάδες.

ii) Πόσες θα είναι οι πωλήσεις στα 5 πρώτα χρόνια;

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $4^{1-\frac{1}{2}\log_2 3}$ **ii)** $9^{\frac{1}{2}\log_3 18-1}$

2. Αν οι θετικοί αριθμοί θ_1, θ_2, θ_3, ... είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι $\log\theta_1$, $\log\theta_2$, $\log\theta_3$, ... είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και αντιστρόφως.

3. Μιας αριθμητικής προόδου ο πρώτος όρος είναι ίσος με log2 και ο δεύτερος όρος με log8. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα Σ_ν των ν-πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο.

$$\Sigma_\nu=\nu^2\cdot\log 2$$

4. Να αποδείξετε ότι: $\log\left(\log\underbrace{\sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{....\sqrt[10]{10}}}}}_{\nu\ \text{ριζικά}}\right)=-\nu$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log\left(1-\frac{1}{4}\right)+....+\log\left(1-\frac{1}{\nu}\right)=-\log\nu$$

*** 6.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$\log_\alpha x=\log_{\alpha^2} x^2$$

***7.** Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\alpha=1$ **ii)** $\log_\alpha\beta^2\cdot\log_\beta\alpha^3=6$

iii) $\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\gamma\cdot\log_\gamma\alpha=1$

***8.** Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_\alpha\theta+\log_{\frac{1}{\alpha}}\theta=0$

ii) $\log_\alpha(\alpha\beta)+\log_\beta(\alpha\beta)=\log_\alpha(\alpha\beta)\cdot\log_\beta(\alpha\beta)$

5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η λογαριθμική συνάρτηση

Έστω α ένας θετικός αριθμός διαφορετικός της μονάδας. Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.2, για κάθε $x>0$ ορίζεται ο $\log_\alpha x$. Επομένως, αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in(0,+\infty)$ στο $\log_\alpha x$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R} \text{ με } f(x)=\log_\alpha x$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α**.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, τη λογαριθμική συνάρτηση $f(x)=\log_\alpha x$. Επειδή

$$\log_\alpha x=y\Leftrightarrow\alpha^y=x,$$

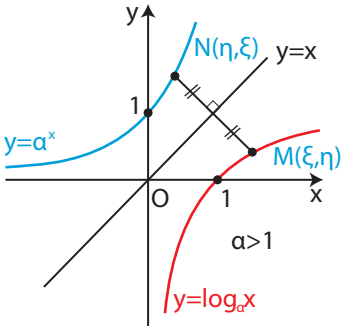
αν το $M(\xi,\eta)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{y=\log_\alpha x}$, τότε το $N(\eta,\xi)$ θα είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\mathbf{y=\alpha^x}$ και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, $M(\xi,\eta)$ και $N(\eta,\xi)$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

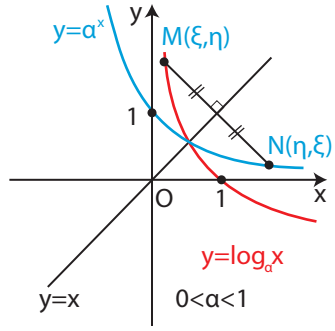
Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$y=\log_\alpha x \text{ και } y=\alpha^x$$

είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.





Αν λάβουμε τώρα υπόψη μας την παραπάνω συμμετρία και όσα μάθαμε για την εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

Αν $\boldsymbol{\alpha > 1}$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$:

• Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$

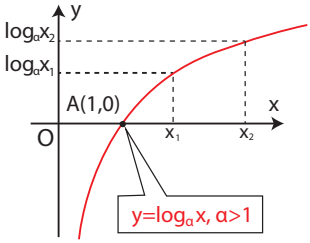
• Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

• Είναι γνησίως αύξουσα, που σημαίνει ότι

$$\textbf{αν } x_1 < x_2, \textbf{ τότε } \log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$(\log_\alpha x < 0,$ **αν** $0<x<1)$ και $(\log_\alpha x > 0,$ **αν** $x>1)$



• Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy'.

Αν $\boldsymbol{0 < \alpha < 1}$, τότε η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$:

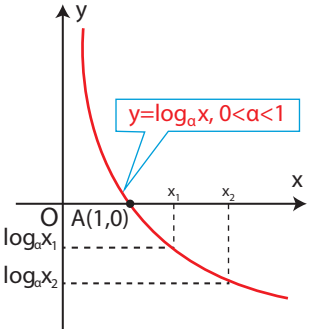
• Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$

• Έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

• Είναι γνησίως φθίνουσα, που σημαίνει ότι:

$$\textbf{αν } x_1 < x_2, \textbf{ τότε } \log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2$$

απ' όπου προκύπτει ότι:



$(\log_\alpha x > 0,$ **αν** $0<x<1)$ και $(\log_\alpha x < 0,$ **αν** $x>1)$

• Έχει γραφική παράσταση που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A(1,0) και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy.

Τέλος, από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } \log_\alpha x_1 \neq \log_\alpha x_2$$

οπότε, με απαγωγή σε άτοπο, έχουμε ότι:

$$\text{αν } \log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2, \text{ τότε } x_1 = x_2$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Η τελευταία ιδιότητα είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για επίλυση εξισώσεων όπως π.χ. η $\log_2(x^2-1)=3$, που λύνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\log_2(x^2-1)=3 &\Leftrightarrow \log_2(x^2-1)=\log_2 2^3\\ &\Leftrightarrow \log_2(x^2-1)=\log_2 8\\ &\Leftrightarrow x^2-1=8\\ &\Leftrightarrow x^2=9\\ &\Leftrightarrow x=3 \quad \text{ή} \quad x=-3\end{aligned}$$

Εξισώσεις όπως η προηγούμενη, όπου ο άγνωστος εμφανίζεται στο λογάριθμο λέγονται **λογαριθμικές εξισώσεις**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις

i) $\varphi(x)=\ln x$ ii) $f(x)=\ln x+1$ iii) $g(x)=\ln(x-2)$

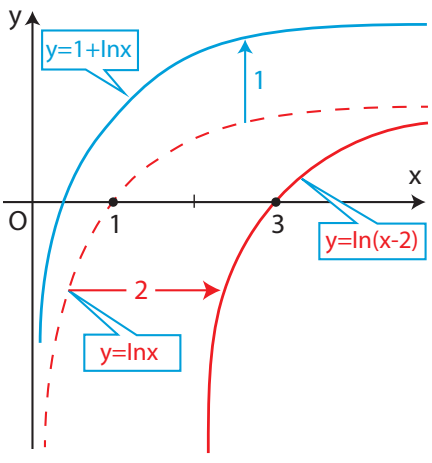
ΛΥΣΗ

Για τη γραφική παράσταση της φ(x) = lnx κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών:

x	0,2	0,3	0,5	0,7	1	2	3	4	5
y=lnx	–1,6	–1,2	–0,7	–0,4	0	0,7	1,1	1,4	1,6

Τοποθετώντας τα σημεία (x, y) του παραπάνω πίνακα στο καρτεσιανό επίπεδο και ενώνοντάς τα με συνεχή καμπύλη βρίσκουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ(x)=lnx.

Η γραφική παράσταση της f(x)=lnx+1 προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ(x)=lnx κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, ενώ της $g(x)=\ln(x-2)$ από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ(x)=lnx κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.



2° Να βρεθεί το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

Από την ανισότητα $2>1$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$2\log 0,5 > 1\log 0,5$$
$$\log 0,5^2 > \log 0,5$$
$$\log 0,25 > \log 0,5$$
$$0,25 > 0,5,$$

που είναι άτοπο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πολλαπλασιάσαμε και τα δύο μέλη της ανισότητας $2>1$ με $\log 0,5<0$ και δεν αλλάξαμε φορά.

3° Να λυθεί η εξίσωση:

$$\log_2(x^2-x)=1+\log_2(x-1)$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή ορίζεται εφόσον $x^2-x>0$ και $x-1>0$. Με αυτούς τους περιορισμούς η εξίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\log_2(x^2-x)=\log_2 2+\log_2(x-1) \Leftrightarrow \log_2(x^2-x)=\log_2[2(x-1)]$$
$$\Leftrightarrow x^2-x=2(x-1)$$
$$\Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x=2$$

Από τις τιμές αυτές του x μόνο η x=2 ικανοποιεί τους περιορισμούς. Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, τη x = 2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$f(x)=\log_2 x$ και $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$

Τι παρατηρείτε; Να δικαιολογήσετε την απάντηση.

2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$f(x)=\log x$, $g(x)=\log x-1$ και $h(x)=\log(x-1)$

3. Να προσδιορίσετε την εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ και τη λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις περνούν από το σημείο:

i) $A(2,4)$ **ii)** $B(-2,4)$ **iii)** $\Gamma(2,-4)$ **iv)** $\Delta(-2,-4)$

4. Η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ μετριέται σε μονάδες ASA ή σε μονάδες DIN. Αν x μονάδες ASA συνδέονται με y μονάδες DIN με τον τύπο y = 1+10logx, να φτιάξετε έναν πίνακα τιμών της παραπάνω συνάρτησης για x= 50, 100, 200, 400, 800, 1600 ASA. Τι παρατηρείτε; (Δίνεται ότι log2 = 0,3).

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\log(x+1)+\log(x-1)=\log 2$ **ii)** $\log(x-1)+\log x=1-\log 5$

iii) $\log x^2=(\log x)^2$ **iv)** $\log(x^2+1)-\log x=\log 2$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $5^x=2^{1-x}$ **ii)** $3^{x-1}=2^{x+1}$

7. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

i) $\log_3 2$ και $\log_3 5$ **ii)** $\log_{0,3} 5$ και $\log_{0,3} 7$

iii) $\log(x^2+1)$ και $\log 2x$

8. Ένα διάλυμα θεωρείται **όξινο** αν $[H^+]>10^{-7}$ και **βασικό** αν $[H^+]<10^{-7}$. Να βρείτε τις αντίστοιχες ανισότητες για το pH.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\ln|x|$ **ii)** $f(x)=\frac{1}{2}\ln x^2$ **iii)** $f(x)=|\ln x|$

iv) $f(x)=\log(10x-20)$

2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές:

i) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ **ii)** $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$

3. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ οι αριθμοί

$$\log 178,\quad \log\sqrt{81(2^x+2\cdot 3^x)},\quad x\log 3$$

με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

*** 4.** Αν $\log_\alpha\beta=\log_\beta\gamma\cdot\log_\gamma\alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$ ή $\alpha=\frac{1}{\beta}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log\sqrt{x}=\sqrt{\log x}$ **ii)** $\ln^4 x-5\ln^2 x+4=0$

6. Να αποδείξετε ότι $x^{\log 5}=5^{\log x}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$5^{2\log x}=5+4\cdot x^{\log 5}$$

7. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases}\log(xy)=4\log 2\\ \log x\cdot\log y=3(\log 2)^2\end{cases}$ **ii)** $\begin{cases}xy=8\\ \log y=2\log x\end{cases}$ **iii)** $\begin{cases}y=2x\\ 2\log y=\log x+\log 2\end{cases}$

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\log x^2>(\log x)^2$ **ii)** $\log(x^2-4)<\log 3x$ **iii)** $x^{\log x}>10$

*** 9.** Να αποδείξετε ότι $\log_2 3>\log_6 9$

10. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $\alpha,\beta>0$ με $\alpha\neq\beta$ ισχύει:

$$\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta>\alpha^\beta\cdot\beta^\alpha$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ΄ΟΜΑΔΑΣ)

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $(x^2-3x+1)^{3x-5}=1$ **ii)** $x^{x^2+3x+1}=x$

2. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α να αποδείξετε ότι:

$$\log_{\alpha+\beta}\gamma+\log_{\alpha-\beta}\gamma=2\log_{\alpha+\beta}\gamma\cdot\log_{\alpha-\beta}\gamma \quad (\alpha+\beta,\alpha-\beta\neq 1)$$

3. Αν $(\alpha\gamma)^{\log_\alpha\beta}=\gamma^2$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\log_\alpha\theta$, $\log_\beta\theta$ και $\log_\gamma\theta$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $(0<\alpha,\beta,\gamma\neq 1,\ \theta>0)$.

4. Αν αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\log_\alpha\theta-\log_\beta\theta}{\log_\beta\theta-\log_\gamma\theta}=\frac{\log_\alpha\theta}{\log_\gamma\theta} \quad \begin{pmatrix}0<\alpha,\beta,\gamma,\theta\neq 1\\ \beta\neq\gamma\end{pmatrix}$$

5. Να αποδείξετε ότι $\log 5=1-\log 2$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $x^{\log(2x)}=5$

6. Να λύσετε στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση:

$$\log_{\eta\mu x}2+\log_{\sigma\upsilon\nu x}2+\log_{\eta\mu x}2\cdot\log_{\sigma\upsilon\nu x}2=0$$

7. Να λύσετε στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση: $(\varepsilon\varphi x)^{\eta\mu x}=(\sigma\varphi x)^{\sigma\upsilon\nu x}$

8. Να λύσετε την ανίσωση: $27^x+12^x-2\cdot 8^x>0$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ
Η βασική ιδέα των λογαρίθμων

Η έννοια του λογάριθμου επινοήθηκε στις αρχές του $17^{ου}$ αιώνα ως ένα μέσο απλοποίησης των αριθμητικών υπολογισμών και η εμφάνιση των πρώτων λογαριθμικών πινάκων είχε, εκείνη την εποχή, επίπτωση στην επιστήμη ανάλογη μ' αυτήν που έχουν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές στις μέρες μας. Η αρχική μαθηματική ιδέα στην οποία στηρίζεται η έννοια του λογάριθμου είναι πολύ απλή. Αν θέσουμε σε αντιστοιχία έναν προς έναν τους όρους μιας αριθμητικής και μιας γεωμετρικής προόδου, όπως π.χ.

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , ...
1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128 , 256 , 512 , 1024 , 2048 , 4096 , ...

τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το γινόμενο 2 όρων της γεωμετρικής (π.χ. $32 \cdot 128 = 4096$) βρίσκεται ακριβώς κάτω από το άθροισμα των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής ($5+7 = 12$). Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός ανάγεται ουσιαστικά σε μια πρόσθεση. Πολύ εύκολα μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε ότι η διαίρεση ανάγεται σε αφαίρεση, η ύψωση σε δύναμη σε απλό πολλαπλασιασμό με τον εκθέτη και η εξαγωγή ρίζας σε απλή διαίρεση με το δείκτη. Π.χ.

$$4096 : 128 = 32 \qquad (12 - 7 = 5)$$
$$16^3 = 4096 \qquad (4 \cdot 3 = 12)$$
$$\sqrt[4]{4096} = 8 \qquad (12 : 4 = 3)$$

Αυτές τις αναγωγές των βασικών πράξεων σε απλούστερες είχαν επισημάνει και διατυπώσει πολλοί μαθηματικοί του 15ου και 16ου αιώνα, όπως ο Γάλλος N. Chuquet το 1484 και ο Γερμανός M. Stifel το 1544. Όπως είναι φανερό σε μας, οι προηγούμενες αναγωγές στηρίζονται στις ιδιότητες των δυνάμεων (οι παραπάνω πρόοδοι είναι οι ακολουθίες των εκθετών και των αντιστοίχων δυνάμεων του 2 ή, με άλλα λόγια, οι όροι της αριθμητικής είναι οι λογάριθμοι των αντίστοιχων όρων της γεωμετρικής με βάση το 2). Το 16ο αιώνα όμως δεν υπήρχε κάποιος κοινά αποδεκτός συμβολισμός για τις δυνάμεις ούτε είχαν διατυπωθεί με γενικότητα οι ιδιότητές τους. Το πρόβλημα που τέθηκε στους μαθηματικούς της εποχής ήταν η κατασκευή γεωμετρικών προόδων αρκετά «πυκνών», ώστε ανάμεσα στους όρους τους να μπορούν να

*Το ιστορικό σημείωμα έγραψε ο Μαθηματικός Γιάννης Θωμαΐδης

παρεμβληθούν, χωρίς σημαντικό σφάλμα, οι αριθμοί που εμφανίζονταν συχνά στους υπολογισμούς (π.χ. οι τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων). Ταυτόχρονα οι όροι μιας τέτοιας γεωμετρικής προόδου θα έπρεπε να τεθούν σε έναν προς έναν αντιστοιχία με τους όρους μιας αριθμητικής προόδου.

Οι πρώτοι πίνακες λογαρίθμων

Η κατασκευή πινάκων τέτοιων προόδων ήταν για την εποχή εκείνη έργο τεράστιο που η ολοκλήρωσή του απαίτησε πολλά χρόνια. Οι πρώτοι που δημοσίευσαν τέτοιους πίνακες ήταν ο Ελβετός Jobst Bürgi (1552-1632) και ο Σκωτσέζος John Napier (1550-1617).

Ο Bürgi ήταν ωρολογοποιός και κατασκευαστής αστρονομικών οργάνων και με τις ιδιότητες αυτές εργάστηκε στα μεγαλύτερα αστεροσκοπεία της εποχής του. Στους πίνακές του, που δημοσιεύθηκαν το 1620 στην Πράγα, κατασκεύασε μια γεωμετρική πρόοδο σύμφωνα με την αναδρομική σχέση

$$\begin{cases} \alpha_0 = 100.000.000 \\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \dfrac{\alpha_\nu}{10.000} \end{cases} \qquad (1)$$

Δηλαδή ο Bürgi ξεκινά από το 100.000.000 και υπολογίζει τον επόμενο κάθε όρου προσθέτοντας σ' αυτόν το ένα δεκάκις χιλιοστό του. Με τον τρόπο αυτό υπολόγισε, έναν προς έναν, περισσότερους από 23.000 όρους της προόδου.

Από την (1), που γράφεται $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \left(1 + \dfrac{1}{10^4}\right)$, συμπεραίνουμε ότι ο λόγος αυτής της γεωμετρικής προόδου είναι $\lambda = 1 + \dfrac{1}{10^4} = 1{,}0001$ και ο γενικός της όρος μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\alpha_\nu = \alpha_0 \cdot \lambda^\nu \quad \text{δηλαδή} \quad \alpha_\nu = 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^\nu, \ \nu = 0, 1, 2, ...$$

Σ' αυτή την πρόοδο, ο Bürgi αντιστοίχισε την αριθμητική πρόοδο 0, 10, 20, 30,..., 230.270 με γενικό όρο $\beta_\nu = 10\nu$.

Έτσι στους πίνακες του Bürgi υπάρχει η αντιστοιχία

$$\alpha_0 = 100.000.000 \longleftrightarrow 0 = \beta_0$$

$$\alpha_1 = 100.010.000 \longleftrightarrow 10 = \beta_1$$

$$\alpha_2 = 100.020.001 \longleftrightarrow 20 = \beta_2$$

.....

$$\alpha_\nu = 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^\nu \longleftrightarrow 10\nu = \beta_\nu$$

$$\alpha_{23027} = 999.999.779 \longleftrightarrow 230.270 = \beta_{23027}$$

Από τους πίνακες του Bürgi απουσιάζει οποιαδήποτε αναφορά σε έννοιες όπως «εκθέτης» ή «βάση» στις οποίες στηρίζεται ο σύγχρονος ορισμός του λογάριθμου. (Ο προηγούμενος γενικός συμβολισμός για το α_v χρησιμοποιείται από μας, για λόγους που θα φανερωθούν παρακάτω, όταν εξηγήσουμε τη σημασία του αριθμού e). Ούτε άλλωστε ο όρος «λογάριθμος» χρησιμοποιήθηκε από τον Bürgi. Ο τίτλος του βιβλίου του ήταν «Πίνακες αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων» και οι όροι της αριθμητικής προόδου αναφέρονταν ως «κόκκινοι αριθμοί» από το χρώμα της μελάνης που είχαν εκτυπωθεί.

Η προέλευση του όρου «λογάριθμος»

Οι πίνακες προόδων του Bürgi δεν γνώρισαν μεγάλη διάδοση γιατί δημοσιεύτηκαν αργά, όταν είχαν ήδη προηγηθεί, το 1614, οι πίνακες του Napier. Ο John Napier ήταν πλούσιος ευγενής με έντονο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά και τις εφαρμογές τους. Οι πίνακές του στηρίζονται επίσης στην αντιστοιχία των όρων μιας γεωμετρικής και μιας αριθμητικής προόδου. Οι πρόοδοι αυτές όμως είναι πολύ πιο πυκνές (και επομένως χρήσιμες στην πράξη) από εκείνες του Bürgi και για τον υπολογισμό των όρων τους ο Napier επινόησε μια σειρά από ιδιοφυή τεχνάσματα. Στον Napier οφείλεται επίσης η δημιουργία του όρου «λογάριθμος» από τη σύνθεση των ελληνικών λέξεων «λόγος» και «αριθμός». (Ο τίτλος του βιβλίου του ήταν «Περιγραφή του θαυμάσιου κανόνα των λογαρίθμων»). Η σημασία του όρου είναι ακριβώς «ο αριθμός που μετρά το πλήθος των λόγων». Αν θεωρήσουμε π.χ. τις προόδους

$$0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7, \ldots ,$$
$$1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 16\ ,\ 32\ ,\ 64\ ,\ 128\ ,\ \ldots$$

τότε, ο 6 π.χ. (που είναι ο λογάριθμος του 64 με βάση το 2) δείχνει «πόσοι λόγοι» χρειάζονται στη συνεχή αναλογία

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{32}{16}=\frac{64}{32}=\ldots.$$

για να φτάσουμε στον όρο 64 (στην εποχή του Napier, η γεωμετρική πρόοδος ορίζονταν σαν μια ακολουθία αριθμών που βρίσκονται σε συνεχή αναλογία).

Η σημασία του αριθμού e

Η αναγνώριση της δυνατότητας να οριστούν οι λογάριθμοι σαν εκθέτες ως προς μια βάση έγινε βαθμιαία, αφού πρώτα αποσαφηνίστηκε και γενικεύτηκε η έννοια της δύναμης. Η έννοια της βάσης όμως και ειδικότερα ο αριθμός e = 2,7 1828 1828 45 90 45 ... (προσέξτε τη μνημοτεχνική διάταξη των ψηφίων του) βρίσκεται ήδη, στους πρώτους λογαριθμικούς πίνακες, σε μια «λανθά-

νουσα» κατάσταση. Η γεωμετρική πρόοδος του Bürgi.

$$\alpha_\nu = 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^\nu$$

γράφεται διαδοχικά:

$$\frac{\alpha_\nu}{10^8}=\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{\nu}{10^4}}=\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{10\nu}{10^5}}=\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^{\frac{\beta_\nu}{10^5}}$$

Αν θέσουμε στην προηγούμενη $x=\frac{\alpha_\nu}{10^8}$ (1) και $y=\frac{\beta_\nu}{10^5}$ (2), τότε αυτή γίνεται

$$x=\left[\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}\right]^y \qquad (3)$$

Παρατηρούμε όμως ότι είναι

$$\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^{10^4}=2,718145927\ldots$$

μια τιμή που συμπίπτει σε 4 δεκαδικά ψηφία μ' αυτήν του αριθμού e. Έτσι λοιπόν, η προηγούμενη ισότητα (3) μπορεί ν' αντικατασταθεί με ικανοποιητική ακρίβεια από τη $x=e^y$, δηλαδή ισχύει $y=\ln x$ (4). Από τις ισότητες (1), (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι, αν στο σύστημα του Bürgi οι όροι της γεωμετρικής προόδου (α_ν) διαιρεθούν με το 10^8 και οι όροι της αριθμητικής προόδου (β_ν) με το 10^5 (αυτές οι διαιρέσεις σημαίνουν απλώς μια μετακίνηση της υποδιαστολής κατά 8 και 5 θέσεις, αντίστοιχα, προς αριστερά), τότε

> Το σύστημα προόδων του Bürgi ισοδυναμεί με ικανοποιητική προσέγγιση, με το σημερινό σύστημα των φυσικών λογαρίθμων που έχουν βάση τον αριθμό e.

Σαν παράδειγμα ας πάρουμε από τους πίνακες του Bürgi τον 98ο όρο της γεωμετρικής προόδου 100.984.768 και τον αντίστοιχό του της αριθμητικής 980. Διαιρώντας με το 10^8 και το 10^5 αντίστοιχα, βρίσκουμε

$$1,00984768 \text{ και } 0,0098$$

Ένας σύγχρονος υπολογιστής τσέπης μας δίνει

$$\ln(1,00984768)=9,7995075\times10^{-3}=0,0097995075\cong0,0098$$

Όπως βλέπουμε λοιπόν, ο αριθμός e δεν επιλέγεται αυθαίρετα αλλά εμφανί-

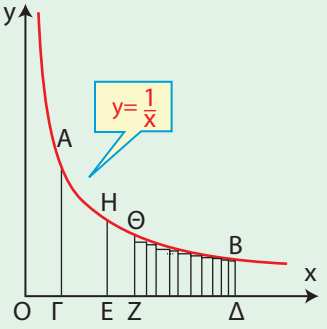
ζεται αναπόφευκτα όταν θελήσει κάποιος να κατασκευάσει μια πυκνή γεωμετρική πρόοδο (οπότε ο λόγος της θα είναι ένας αριθμός ελάχιστα μεγαλύτερος ή μικρότερος της μονάδας). Με την έννοια αυτή, ο αριθμός e «υπάρχει» στους πίνακες των Bürgi και Napier, οι οποίοι όμως δεν είχαν καμμιά αντίληψη του ρόλου του.

Το σύμβολο e χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον L. Euler το 1728, έναν αιώνα μετά την εμφάνιση των λογαρίθμων.

Η εμφάνιση των φυσικών λογαρίθμων

Ενώ λοιπόν οι λογάριθμοι είχαν επινοηθεί, όπως είδαμε, αποκλειστικά για την απλοποίηση των αριθμητικών υπολογισμών, γύρω στο 1650 διαπιστώθηκε μια απροσδόκητη εμφάνισή τους σε γεωμετρικά ζητήματα.

Αφετηρία υπήρξε το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού που περικλείεται από ένα τόξο ΑΒ της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$, τις παράλληλες από τα Α, Β προς τη μια ασύμπτωτη και από το τμήμα ΓΔ που ορίζουν οι παράλληλες στην άλλη ασύμπτωτη (δηλ. το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τραπεζίου ΑΒΔΓ στο διπλανό σχήμα).



Παρατηρήθηκε τότε ότι, αν το ΓΔ διαιρεθεί έτσι ώστε τα τμήματα ΟΓ, ΟΕ, ΟΖ, ΟΔ να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, τότε τα εμβαδά (ΑΗΕΓ), (ΗΘΖΕ), (ΘΒΔΖ) είναι ίσα μεταξύ τους και επομένως τα εμβαδά (ΑΗΕΓ), (ΑΘΖΓ), (ΑΒΔΓ) αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Αν π.χ. είναι ΟΓ = 1, ΟΕ = 2, ΟΖ = 4, ΟΔ = 8, τότε υπολογίζοντας καθένα από τα εμβαδά (ΑΗΕΓ), (ΗΘΖΕ), (ΘΒΔΖ) προσεγγιστικά, σαν άθροισμα εγγεγραμμένων ορθογωνίων (όπως π.χ., στο σχήμα, το ΘΒΔΖ αποτελείται από 10 τέτοια ορθογώνια) βρίσκουμε ότι, με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, είναι: (ΑΗΕΓ) = (ΗΘΖΕ) = (ΘΒΔΖ) = 0,6931. Έτσι λοιπόν μπορούμε να δημιουργήσουμε μια αντιστοιχία ανάμεσα στη γεωμετρική πρόοδο

ΟΕ = 2, ΟΖ = 4, ΟΔ = 8,...

και την αριθμητική πρόοδο

(ΑΗΕΓ) = 0,6931, (ΑΘΖΓ) = 1,3862, (ΑΒΔΓ) = 2,0793,...

Έχουμε δηλαδή τη βασική αρχή ενός λογαριθμικού συστήματος, του οποίου όμως οι λογάριθμοι (όροι της αριθμητικής προόδου) έχουν εδώ μια προφανή **φυσική σημασία**: Εκφράζουν τα εμβαδά συγκεκριμένων γεωμετρικών

σχημάτων. Πρώτος χρησιμοποίησε τον όρο «φυσικοί λογάριθμοι» το 1668 ο N. Mercator (1620-1687) και αυτοί είναι ακριβώς οι σημερινοί λογάριθμοι με βάση τον e, που συμβολίζονται διεθνώς με το σύμβολο ln (από τα αρχικά των λέξεων logarithmus naturalis).

Η λογαριθμική συνάρτηση

Στη σημερινή εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών, η αρχική χρησιμότητα των λογαρίθμων ως ένα μέσο απλοποίησης των αριθμητικών υπολογισμών έχει φυσικά εκμηδενιστεί. Αντίθετα όμως, είναι πολύ μεγάλη η χρησιμότητα της λογαριθμικής συνάρτησης σαν ένα μέσο μαθηματικής περιγραφής καταστάσεων του φυσικού κόσμου. Πρέπει μάλιστα να σημειώσουμε ότι πολλές από τις εφαρμογές της λογαριθμικής συνάρτησης στηρίζονται στην αρχική ιδέα της αντιστοιχίας μιας γεωμετρικής και μιας αριθμητικής προόδου.

Συγκεκριμένα, όταν ένα μέγεθος μεταβάλλεται πολύ γρήγορα («γεωμετρικά») και ένα άλλο, που σχετίζεται μ' αυτό, πολύ αργά («αριθμητικά») τότε η μεταξύ τους σχέση μπορεί να εκφραστεί λογαριθμικά. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί ο νόμος των Weber-Fechner στην Ψυχολογία, που περιγράφει μαθηματικά τη σχέση ανάμεσα σ' ένα ερέθισμα και την αίσθηση που προκαλεί. Αν, για παράδειγμα, Ε είναι η ένταση ενός ήχου και Α η ένταση του ακουστικού αισθήματος που προκαλεί, τότε ισχύει

$$A = \kappa \log E$$

όπου κ μια σταθερά, εξαρτωμένη από τη συχνότητα του ήχου και τον αποδέκτη του ερεθίσματος. Η σχέση αυτή προέκυψε ύστερα από πειράματα των Γερμανών επιστημόνων E.H. Weber (1795-1878) και G.T. Fechner (1801-1887), που έδειξαν ότι, μια σειρά ερεθισμάτων (οπτικών, ακουστικών κ.λπ.) τα οποία μπορούν να μετρηθούν και αυξάνουν κατά γεωμετρική πρόοδο, προκαλούν μια σειρά αισθημάτων (αντιδράσεων) που αυξάνουν κατά αριθμητική πρόοδο. Στην προηγούμενη ισότητα στηρίζεται ο ορισμός των μονάδων ακουστότητας bel και decibel.

Μια άλλη εντυπωσιακή, σύγχρονη εφαρμογή της λογαριθμικής συνάρτησης γίνεται στην Πληροφορική και συγκεκριμένα στη σχέση ανάμεσα στην ποσότητα πληροφορίας που μεταφέρει ένα σύμβολο και την πιθανότητα εμφάνισης του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ (Δ΄ ΟΜΑΔΑΣ)

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu^2x - 2\sqrt{3}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2x = -\sqrt{3}$$

2. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x = \gamma$ έχει λύση αν και μόνο αν $\alpha^2 + \beta^2 \geq \gamma^2$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $(1+\sigma\upsilon\nu t)\cdot\eta\mu x + \eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu x = 2$ για τις διάφορες τιμές του $t \in (-\pi, \pi)$.

3. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi 3\alpha = \dfrac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2\alpha}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την $\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{12}$ αφού πρώτα δείξετε ότι αυτή είναι λύση της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$.

4. (Αριθμός διαιρετός με το 9)

— Ο αριθμός $198 = 22\cdot 9$ διαιρείται με το 9. Το άθροισμα 1+9+8 = 18 των ψηφίων του επίσης διαιρείται με το 9.

— Ομοίως ο αριθμός $17397 = 1933\cdot 9$ και το άθροισμα 1+7+3+9+7 = 27 των ψηφίων του διαιρούνται με το 9.

Γενικά να αποδείξετε ότι ισχύει ο κανόνας:

Ο αριθμός «αβγδ» διαιρείται με το 9, μόνο αν το άθροισμα α+β+γ+δ των ψηφίων του διαιρείται με το 9.

Υπόδειξη: Είναι $<<\alpha\beta\gamma\delta>>=\alpha 10^3 + \beta 10^2 + \gamma 10 + \delta$. Να θεωρήσετε το πολυώνυμο $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ και την ταυτότητα $f(x) = (x-1)\pi(x) + f(1)$ και να θέσετε x=1 και x=10.

5. (Ρητές ρίζες πολυωνυμικής εξίσωσης). Το θεώρημα που ακολουθεί παρέχει μια ακόμη μέθοδο προσδιορισμού ριζών ορισμένων πολυωνυμικών εξισώσεων.

Θεώρημα: Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ρητός $\dfrac{\kappa}{\lambda} \neq 0$ $\left(\dfrac{\kappa}{\lambda}\ \text{ανάγωγο κλάσμα}\right)$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο κ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 και ο λ είναι διαιρέτης του συντελεστή α_ν. Με τη βοήθεια του θεωρήματος αυτού:

i) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$2x^3 + x^2 + x - 1 = 0 \qquad 6x^4 + 29x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 0$$

ii) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\sqrt{2}$ και $\sqrt{12}$ δεν είναι ρητοί.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$ έχει ακριβώς μια λύση.

7. Να λύσετε την εξίσωση

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{4}{3} = 2^x$$

8. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $2\log(x+3) = \log(\alpha x)$ έχει μοναδική λύση;

9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi x + \log_{\frac{\pi}{4}} x = 2$ έχει στο διάστημα $(0,\pi)$ ακριβώς μια λύση.

10. Να λύσετε την ανίσωση: $\log_3(16^x - 2\cdot 12^x) \le 2x+1$

11. i) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 1-x$ και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $\ln x \le 1-x$.

ii) Ομοίως για τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = -x^2+1$ και την ανίσωση $\ln x \ge -x^2+1$.

12. Δίνονται τρεις θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ και τρεις γωνίες Α, Β, Γ έτσι ώστε:

$$A, B, \Gamma > 0, \qquad A+B+\Gamma = \pi \qquad \text{και} \qquad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

Να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$

$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$

13. Δίνονται τρεις θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ και τρεις γωνίες Α, Β, Γ έτσι ώστε:

$$A, B, \Gamma > 0, \qquad A+B+\Gamma = \pi \qquad \text{και} \qquad \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα τρίγωνο ΚΛΜ με $(\Lambda M) = \alpha$, $(KM) = \beta$, $(K\Lambda) = \gamma$, $K = A$, $\Lambda = B$, $M = \Gamma$

14. Δίνονται τρεις θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ και τρεις γωνίες Α, Β, Γ έτσι ώστε:

$$0 < A, B, \Gamma < \pi \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \\ \beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B \\ \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \qquad \text{και} \qquad A+B+\Gamma = \pi.$$

15. Δίνονται τρεις θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ και τρεις γωνίες Α, Β, Γ έτσι ώστε:

$$0 < A, B, \Gamma < \pi \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \\ \beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B \\ \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα τρίγωνο ΚΛΜ, με $(\Lambda M) = \alpha$, $(KM) = \beta$, $(K\Lambda) = \gamma$, $K = A$, $\Lambda = B$, $M = \Gamma$.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§1.1

Α΄ Ομάδας

1. $(3,-1)$ **2.** i) $(21,24)$ ii) $\left(\frac{3}{4},\frac{5}{3}\right)$.

3. i) $(3,-4)$ ii) $(5,2)$.

4. i) Αδύνατο ii) άπειρες λύσεις της μορφής: $\left(\kappa,\frac{\kappa+2}{2}\right)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

5. i) $(3,1)$ ii) $(2,-1)$.

6. i) Μοναδική ii) άπειρες iii) αδύνατο.

7. i) $\left(-(\sqrt{3}+1)(\kappa+1),\kappa\right)$, $\kappa\in\mathbb{R}$ ii) αδύνατο.

8. i) $(4,3,-5)$ ii) αδύνατο iii) $(10\kappa+2,-16\kappa+2,\kappa)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Β΄ Ομάδας

1. i) $\varepsilon_1: y=-\frac{1}{2}x+2$, $\varepsilon_2: y=x-1$ ii) 2,1

2. 10 δίκλινα, 16 τρίκλινα

3. 1500 παιδιά, 700 ενήλικες.

4. $R=\frac{1}{600}\cdot T+\frac{11}{30}$.

5. 40ml, 60ml.

6. i) $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ ii) δεν υπάρχουν iii) $\alpha\neq\frac{3}{2}$.

7. i) Αν $\alpha\neq\pm1$, οι ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο, το $\left(\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1},\frac{-\alpha}{\alpha+1}\right)$, αν $\alpha=1$, οι ευθείες ταυτίζονται, αν $\alpha=-1$, οι ευθείες είναι παράλληλες.

ii) οι ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

8. i) Αν $\lambda\neq\pm3$, μοναδική λύση, αν $\lambda=3$, αδύνατο, αν $\lambda=-3$, αδύνατο, ii) Αν $\mu\neq\pm3$, μοναδική λύση, αν $\mu=3$, άπειρες λύσεις, αν $\mu=-3$, αδύνατο.

9. 2 cm, 4 cm, 3 cm.

10. $x=\tau-\alpha$, $y=\tau-\beta$, $z=\tau-\gamma$.

11. 22,88 lt, 17,68 lt, 11,44 lt.

12. $f(x)=x^2-4x+3$,

$g(x)=-x^2+2x+3$,

$h(x)=0,5x^2-3x+4$.

§1.2

Α΄ Ομάδας

1. $(-1,2)$, $(2,-1)$.

2. i) $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

ii) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

iii) $(-1,-2)$, $(1,2)$, $(-2,-1)$, $(2,1)$.

Β΄ Ομάδας

1. $(4,3)$, $(-4,3)$, $(0,-5)$.

2. $(1,0)$, $(3,0)$, $(2,-1)$, $(4,3)$.

3. 12 cm, 10 cm.

4. $\kappa<1$.

2ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§2.1

Α΄ Ομάδας

1. $f \downarrow (-\infty,1]$, $f \uparrow [1,+\infty)$, $g \uparrow (-\infty,0]$, $g \downarrow [0,2]$, $g \uparrow [2,+\infty)$, $h \downarrow (-\infty,-1]$, $h \uparrow [-1,0]$, $h \downarrow [0,1]$, $h \uparrow [1,+\infty)$.

2. $f(1)=-1$ ολικό ελάχιστο, η g δεν έχει ολικά ακρότατα, $h(-1)=-2$, $h(1)=-2$ ολικό ελάχιστο.

3. i) Αρκεί $f(x)\geq f(3)$
ii) Αρκεί $g(x)\leq g(1)$

4. i) Άρτια ii) άρτια iii) τίποτα iv) περιττή v) τίποτα vi) περιττή.

5. i) Άρτια ii) τίποτα iii) περιττή iv) περιττή v) άρτια vi) άρτια

6. i) Περιττή ii) άρτια iii) τίποτα

7. i) Άρτια ii) περιττή iii) τίποτα

§2.2

Α΄ Ομάδας

4. i) $f(x)=2\cdot(x-1)^2+3$

ii) $f(x)=-2\cdot(x-2)^2-1$.

6. i) $2(x-2)^2$ ii) $2(x-3)^2-3$

iii) $2(x+2)^2$ iv) $2(x+3)^2-3$

3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§3.1

Α΄ Ομάδας

1. $x=3$, $y=3\sqrt{2}$, $\hat{\omega}=45^0$

2. $AB=1$, $A\Gamma=\sqrt{3}$.

3. i) 6 rad ii) 3 rad iii) 2 rad.

4. i) $\frac{\pi}{6}$ rad ii) $\frac{2\pi}{3}$ rad

iii) 7π rad iv) $-\frac{33\pi}{4}$ rad

5. i) 18° ii) 150° iii) 5460°

iv) $\frac{18000^\circ}{\pi}$.

6. i) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}$

ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$.

iii) $0,-1,0$, δεν ορίζεται.

iv) $0,1,0$, δεν ορίζεται.

Β΄ Ομάδας

1. i) $\simeq 478, \simeq 733, \simeq 1062$ ii) $\simeq 58^\circ$.

2. iii) $2-\sqrt{2}$ v) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

3. $12+8\sqrt{3}$, $12\sqrt{3}$.

4. $\simeq 573$ mm.

§3.2

Α΄ Ομάδας

1. $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{4}{5}, \varepsilon\varphi x=-\frac{3}{4}, \sigma\varphi x=-\frac{4}{3}.$

2. $\eta\mu x=-\frac{\sqrt{5}}{3}, \varepsilon\varphi x=\frac{\sqrt{5}}{2}, \sigma\varphi x=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$

3. $\sigma\varphi x=-\sqrt{3}, \eta\mu x=-\frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

4. $\varepsilon\varphi x=\frac{\sqrt{5}}{2}, \eta\mu x=\frac{\sqrt{5}}{3}, \sigma\upsilon\nu x=\frac{2}{3}.$

5. $\frac{8\sqrt{5}-20}{5}.$

6. i) Όχι ii) όχι iii) ναι

Β΄ Ομάδας

1. i) $\frac{\alpha^2-1}{2}$ ii) $\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}$ iii) $\frac{2}{\alpha^2-1}$

iv) $\frac{\alpha(3-\alpha^2)}{2}.$

§3.3

Α΄ Ομάδας

1. i) $\eta\mu 1200^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sigma\upsilon\nu 1200^\circ=-\frac{1}{2},$

$\varepsilon\varphi 1200^\circ=-\sqrt{3}, \sigma\varphi 1200^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$

ii) $\eta\mu(-2850^\circ)=\frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu(-2850^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2},$

$\varepsilon\varphi(-2850^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{3}, \sigma\varphi(-2850^\circ)=\sqrt{3}.$

2. i) $\eta\mu\frac{187\pi}{6}=-\frac{1}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu\frac{187\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$

$\varepsilon\varphi\frac{187\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sigma\varphi\frac{187\pi}{6}=\sqrt{3}.$

ii) $\eta\mu\frac{21\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu\frac{21\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$

$\varepsilon\varphi\frac{21\pi}{4}=\sigma\varphi\frac{21\pi}{4}=1.$

3. $\hat{A}+(\hat{B}+\hat{\Gamma})=180^\circ,$

$\frac{\hat{A}}{2}+\left(\frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}\right)=90^\circ.$

4. σφα. **6.** 1.

Β΄ Ομάδας

1. 0. **3.** 23.

§3.4

Α΄ Ομάδας

5. Μέγιστο το 2 και ελάχιστο το -2. Η περίοδος ισούται με 4π.

6. Μέγιστο το 2 και ελάχιστο το -2. Η περίοδος ισούται με 4π.

Β΄ Ομάδας

1. i) $y=\eta\mu x, \ y=\eta\mu\frac{x}{2}, \ y=\eta\mu 3x$

ii) $y=\eta\mu x, \ y=3\eta\mu x, \ y=0,5\eta\mu x,$

$y=-2,5\eta\mu x.$

2. i) Υψηλότερη 3m, χαμηλότερη -3 m, διαφορά 6m.

3. i) $\frac{2}{3}$ m ii) $\frac{2\pi}{3}$

4. i) 0,1.

§3.5

Α΄ Ομάδας

1. i) $x=\lambda\pi, \quad \lambda\in\mathbb{Z}$

ii) $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}, \ \kappa\in\mathbb{Z}$

iii) $x=\lambda\pi+\frac{\pi}{2}, \quad \lambda\in\mathbb{Z}$

iv) $x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}.$

2. i) $x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{6}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{7\pi}{6}, \kappa\in\mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

iv) $x = 2\kappa\pi + \pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

3. i) $x = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

iv) $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

4. i) $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

5. i) $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$

ή $x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4}$

ή $x = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

6. i) $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ ή $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ή $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$

ή $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

7. i) $x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{5}$

ή $x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{5}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi \pm \frac{4\pi}{5}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $x = \kappa\pi + \frac{22\pi}{45}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

8. i) $x = \frac{6\kappa\pi + \pi}{9}$

ή $x = \frac{6\kappa\pi + 2\pi}{9}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 10\kappa\pi + 5\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $x = \frac{42\kappa\pi + 7\pi}{12}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

9. i) $x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = \frac{24\kappa\pi + 7\pi}{36}$

ή $x = \frac{24\kappa\pi - \pi}{36}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $x = \frac{-12\kappa\pi - \pi}{60}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

10. i) $\omega = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$

ή $\omega = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

ή $\omega = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $t = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

11. i) $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$

ή $x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) Αδύνατη.

12. i) Μέγιστο για $x=\pi$ το 3 και ελάχιστο για $x=0$ το -3.

ii) Μέγιστο για $x=\frac{\pi}{2}$, το $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=7$

και ελάχιστο για $x=\frac{3\pi}{2}$, το

$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-7$.

13. i) Ιανουάριος – Μάιος

ii) Μάρτιος.

Β΄ Ομάδας

1. i) $x=\kappa\pi-\frac{\pi}{8}, \kappa\in\mathbb{Z}$

ii) $x=\frac{\kappa\pi}{5}+\frac{\pi}{30}, \kappa\in\mathbb{Z}$.

2. i) $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}, \kappa\in\mathbb{Z}$

ii) $x=\kappa\pi-\frac{\pi}{4}$

ή $x=\kappa\pi+\frac{2\pi}{5}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

3. $\frac{13\pi}{4}$.

4. $\frac{\pi}{2}$, π.

5. $\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{13\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$.

§3.6

Α΄ Ομάδας

1. i) $\frac{1}{2}$ ii) $-\frac{1}{2}$

iii) 1 iv) 0

2. i) συνx ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. i) 1 ii) 1 iii) $\sqrt{3}$ iv) 0.

5. i) ημ3x ii) $\frac{1}{2}$ iii) $-\varepsilon\varphi x$

iv) $-\sigma\varphi x$.

7. $\eta\mu 105^\circ=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$,

$\sigma\upsilon\nu 105^\circ=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$,

$\varepsilon\varphi 105^\circ=-2-\sqrt{3}$,

$\sigma\varphi 105^\circ=-2+\sqrt{3}$,

$\eta\mu 195^\circ=\frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$,

$\sigma\upsilon\nu 195^\circ=\frac{-\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$,

$\varepsilon\varphi 195^\circ=2-\sqrt{3}$,

$\sigma\varphi 195^\circ=2+\sqrt{3}$.

10. i) $\eta\mu(\alpha+\beta)=\frac{33}{65}$,

$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\frac{-56}{65}$,

$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{-33}{56}$,

$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{-56}{33}$.

11. i) $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{6}, \kappa\in\mathbb{Z}$

ii) $x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}, \kappa\in\mathbb{Z}$

iii) $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}, \kappa\in\mathbb{Z}$.

Β΄ Ομάδας

1. Είναι $\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}=\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta$ κτλ.

2. $\eta\mu(\alpha+2\beta)=\eta\mu((\alpha+\beta)+\beta)=....$

3. $x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$.

4. Είναι $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$, οπότε

$$\varepsilon\varphi\beta=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=....$$

8. $x=\frac{\pi}{6}$ ή $x=\frac{2\pi}{3}$.

§3.7

Α΄ Ομάδας

1. i) -1 ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ iii) 0

iv) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. i) $\eta\mu4\alpha$ ii) $\eta\mu2\alpha$

iii) $\varepsilon\varphi6\alpha$.

4. i) $\eta\mu2\alpha=\frac{24}{25}$, $\sigma\upsilon\nu2\alpha=\frac{7}{25}$,

$\varepsilon\varphi2\alpha=\frac{24}{7}$, $\sigma\varphi2\alpha=\frac{7}{24}$.

5. $\varepsilon\varphi(\alpha+2\beta)=\frac{16}{13}$

7. i) $x=2\kappa\pi$ ή $x=2\kappa\pi+\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

ii) $x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

8. $\eta\mu\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$,

$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$,

$\varepsilon\varphi\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$,

$\sigma\varphi\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$.

9. i) $\eta\mu\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{4}{13}}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{9}{13}}$,

$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{3}$, $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}$.

ii) $\eta\mu\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{5}}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{4}{5}}$,

$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$, $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}=-2$.

10. i) $x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}$ ή $x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

ii) $x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

iii) $x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

iv) $x=2\kappa\pi+\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Β΄ Ομάδας

3. Είναι $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$, οπότε

$\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}=\eta\mu\frac{\pi}{8}...$

6. i) $x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$

ή $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

ii) $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $x=\kappa\pi-\frac{\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

§3.8

Α΄ Ομάδας

1. i) $\frac{1}{4}$, ii) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

iii) $-\frac{1}{4}$ iv) $\frac{1}{4}$.

2. i) $\eta\mu 3x - \eta\mu x$

ii) $\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu 6x$

iii) $\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu 8x$

iv) $\frac{1}{2}(\eta\mu 8x - \eta\mu 4x)$

v) $\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$.

3. i) $x = \frac{\kappa\pi}{3}$ ή $x = \frac{2\kappa\pi + \pi}{10}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = \frac{2\kappa\pi + \pi}{8}$ ή $x = \frac{2\kappa\pi - \pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

4. i) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ii) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ iii) 0.

5. i) $2\eta\mu 3x\sigma\upsilon\nu x$ ii) $-2\eta\mu 4x\eta\mu x$

iii) $2\sigma\upsilon\nu 2x \cdot 2\sigma\upsilon\nu x$

iv) $2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

v) $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$.

8. i) $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{12}$ ή $x = \kappa\pi + \frac{7\pi}{12}$

ή $x = \frac{\kappa\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $x = \frac{\kappa\pi}{6}$ ή $x = \frac{6\kappa\pi + 2\pi}{9}$

ή $x = \frac{6\kappa\pi - 2\pi}{9}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Β΄ Ομάδας

1. Μετασχηματίζουμε τα γινόμενα σε αθροίσματα.

4. Μετασχηματίζουμε τα αθροίσματα σε γινόμενα.

5. Είναι $A + B + \Gamma = \pi$ οπότε...

§3.9

Α΄ Ομάδας

1. i) $2\pi,\ 2,\ -2$ ii) $2\pi,\ 1,\ -1$.

2. i) $f(x) = 2\eta\mu\left(x + \frac{11\pi}{6}\right)$

ii) $f(x) = \sqrt{2}\eta\mu\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

iii) $f(x) = 2\eta\mu\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

iv) $f(x) = \sqrt{2}\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

4. i) $x = 2\kappa\pi - \frac{4\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$

ή $x = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $x = 2\kappa\pi - \frac{7\pi}{12}$

ή $x = 2\kappa\pi + \frac{11\pi}{12}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Β΄ Ομάδας

1. $\omega = \frac{\pi}{12}$ ή $\omega = \frac{5\pi}{12}$.

2. i) $(OA) + (OB) = 2\sqrt{2}\eta\mu\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

ii) $\theta = \frac{\pi}{4}$, μέγιστη τιμή του

$(OA) + (OB) = 2\sqrt{2}$.

3. i) $16,\ -10$

ii) $2\sqrt{2}+2,\ -2\sqrt{2}+2.$

4. $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{24}$ ή $x=\kappa\pi+\frac{7\pi}{24}, \kappa\in\mathbb{Z}.$

5. ii) $\theta=\frac{\pi}{4}$, ελάχιστη τιμή του $h=40(\sqrt{2}-1)$

6. ii) $\theta=\frac{\pi}{8}$, μέγιστη τιμή του $P=1+\sqrt{2}$.

§3.10

Α΄ Ομάδας

1. $AB\simeq 284$ m

2. $B\Delta\simeq 1,58$ m

5. $\theta\simeq 115^\circ$

6. $AB\cong 51,2$ m

7. $\theta\simeq 60,25^\circ$

Β΄ Ομάδας

1.-5. Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων.

6.-7. Εφαρμόζουμε το νόμο των συνημιτόνων.

8.-10. Εφαρμόζουμε τον τύπο $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$.

11. $A\hat{O}B=30^\circ.$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3. Αρκεί να δείξετε ότι (ΜΚ)=2

4. i) $x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

ii) $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$

ή $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}.$

6. $\frac{13\pi}{3}$.

7. i) $(10+2\sqrt{2})$m, 14m, $(10-2\sqrt{2})$m

ii) $10+4\eta\mu\left(\frac{\pi(t+1)}{4}\right)$.

9. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

12. $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$

ή $x=\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{4}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$

13. ii) $S=200\sqrt{2}\eta\mu\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+200$

iii) $\theta=\frac{\pi}{8}$, $S_{max}=200(\sqrt{2}+1)$.

15. $B=60^\circ,\ \Gamma=45^\circ$.

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§4.1

Α΄ Ομάδας

1. i) Ναι ii) Ναι iii) Όχι iv) Όχι.

2. Πράξεις.

3. $\mu=\frac{1}{2}$.

4. $\alpha=1$.

5. i) -1 ρίζα ii) $-1, 1$ ρίζες.

6. $k=6$.

7. $\alpha=1$ ή $\alpha=2$.

Β΄ Ομάδας

1. $\alpha=3,\ \beta=-10,\ \gamma=5$.

2. $\alpha=-2,\ \beta=-19$.

3. $\lambda=-3,\ \mu=-5$.

4. Εξετάζουμε τις περιπτώσεις

i) $\lambda\neq 0,\frac{2}{3},-\frac{2}{3}$ ii) $\lambda=0$,

iii) $\lambda=\frac{2}{3}$ iv) $\lambda=-\frac{2}{3}$.

5. $P(x)=x^2-5x+1$.

§4.2

Α΄ Ομάδας

1. i) $\pi(x)=3x^2-3x-8,\quad \upsilon(x)=44$

ii) $\pi(x)=x^3+3x^2+9x+27,\quad \upsilon(x)=0$

iii) $\pi(x)=4x^3-\frac{16}{6},\quad \upsilon(x)=-\frac{5}{3}$

iv) $\pi(x)=2x^2+1,\quad \upsilon(x)=x+1$

v) $\pi(x)=x+3,\quad \upsilon(x)=6x^2-8x+3$

vi) $\pi(x)=x^2,\quad \upsilon(x)=x^2+7$.

2. $\upsilon=14$.

3. $k=1$ ή $k=-4$.

4. i) $\pi(x)=-x^2+10x-25,\quad \upsilon=0$

ii) $\pi(x)=x^2-8x+64,\quad \upsilon=0$

iii) $\pi(x)=x^4+x^3+x^2+x+1,\quad \upsilon=2$

iv) $\pi(x)=-3x^3-6x^2-12x-24,\quad \upsilon=-48$

v) $\pi(x)=4x^2+14x-30,\quad \upsilon=0$.

5. $P(-11)=4840$.

6. Εργαζόμαστε με σχήμα Horner.

7. Αν $P(x)=x^\nu-y^\nu$ αποδείξτε ότι $P(-y)=0$.

8. Παρατηρούμε ότι $P(\rho)>0$ ενώ $Q(\rho)<0$.

9. Για $P(x)=x^\nu+1$ είναι $P(-1)=0$.

10. Θεωρούμε το διαιρετέο και το διαιρέτη ως πολυώνυμα του x.

Β΄ Ομάδας

1. Γράφουμε $x^\mu-\alpha^\mu=x^{\rho\nu}-\alpha^{\rho\nu}$ κτλ.

2. i) Γράφουμε $P(x)=(\alpha x+\beta)\pi(x)+\upsilon$

ii) $\beta=0$ ή $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$.

3. Σχήμα Horner διαδοχικά με $x-1$ και $x-2$.

4. Είναι $P(0)=0,\ P(-1)=0,$ $P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

5. $\alpha=\nu,\ \beta=-1-\nu$.

§4.3

Α΄ Ομάδας

1. i) $0,\sqrt{\frac{6}{5}},-\sqrt{\frac{6}{5}}$ ii) $-2,3,-3$

iii) $0,1,-1,-\frac{5}{3}$ iv) $2,-2$ v) 1

vi) $1,2,-3$ vii) -2

viii) $-\frac{2}{3},1,-\frac{13}{22}$

ix) $-2,9+4\sqrt{5},9-4\sqrt{5}$

x) $\sqrt{2},-\sqrt{2},\ 1,\ 2$.

2. i) 2 ii) $1,-4$ iii) -2 iv) -1.

3. i) Οι ±1, ±2 δεν είναι ρίζες

ii) Οι ±1, ±5 δεν είναι ρίζες.

6. i) $x>-2$ ii) $x=1$ iii) $x<-2$

iv) $x\le -1$ ή $x\ge 2$.

7. i) $(2,0)$ ii) $(1,0)$, $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

8. $2-\sqrt{5}<x<0$ ή $1<x<2+\sqrt{5}$

9. i) $2,-2$ ii) $2,3$ iii) $-\frac{3}{5},2$.

Β΄ Ομάδας

1. i) $1,-2,-4$ ii) $3,2,-15$.

2. $-1,2,-2,-3$.

3. $-3,1,-7,-11$.

4. Οι διαιρέτες του 2 για $\lambda\in\mathbb{Z}$ δεν επαληθεύουν την εξίσωση.

5. 1, -1, $-\sqrt{2+3\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+3\sqrt{2}}$.

6. 3, 7, 1.

7. $t\simeq 4,6$, $c\simeq 0,45$.

8. x=3 m.

9. ν=20 ημέρες.

10. t=3 sec.

11. $y+4x\le 108$ και $x^2y=11664$, x=18 cm, y=36 cm.

12. i) $y=5x-3$

iii) $x_1=1$ διπλή, $x_2=-3$ και $\Gamma(-3,-18)$.

§4.4

Α΄ Ομάδας

1. i) $x=-3$ ii) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

2. $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$

ή $x=(2\kappa+1)\pi-\frac{\pi}{6}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

3. i) 0, 16 ii) 6 iii) αδύνατη

iv) 69, -59 v) -1, 2 vi) 36

vii) 4, 16 viii) 0, 4.

6. $x\le -1$ ή $x>0$.

Β΄ Ομάδας

1. i) $-\frac{3}{2}\le x<-\frac{2}{5}$

ii) περιπτώσεις $x-5<0$, $x-5\ge 0$.

2. i) 4 ii) 8.

3. i) -3, 2 ii) 5.

4. i) περιπτώσεις $\alpha<0$, $\alpha\ge 0$

ii) περιπτώσεις $x<\frac{\lambda}{2}$, $x\ge\frac{\lambda}{2}$.

5. $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$ ή $x=(2\kappa+1)\pi-\frac{\pi}{6}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να θεωρήσετε τη διαφορά $P(x)-(x^2+x+1)=$ $x^{3\nu}-1+x^{3\mu+1}-x+x^{3\rho+2}-x$

2. i) Γράψτε

$f(x)=\nu x^{\nu}(x-1)-(x^{\nu}-1)=$

$.... = (x-1)P(x)$

και $P(x) = (x-1)\pi(x)$

ii) Γράψτε $g(x) = (x-1)P(x)$ και $P(x) = (x-1)Q(x)$ και $Q(x) = (x-1)\pi(x)$.

3. Να διαιρέσετε με x^2 και μετά να θέσετε $x + \frac{1}{x} = y$.

4. Να διαιρέσετε με x^2 και να θέσετε στην

i) $x - \frac{2}{x} = y$, ii) $x - \frac{1}{x} = y$.

5. Να θέσετε $x^2 + 2x - 1 = y$, οπότε $x^2 + 2x + 3 = y + 4$.

7. Στην ταυτότητα της διαίρεσης να θέσετε $x = \sqrt{2}$.

8. i) Με σχήμα Horner βρίσκουμε ότι P(11)=10.

ii) Γράψτε το

$P(x) = x^{17} - 1 - 12x \cdot \frac{x^{16} - 1}{x + 1}$ κ.τλ.

9. i) x=1 εκατομ. χρόνια ii) αρχίζει σε 3 εκατομ. χρόνια και διαρκεί 3 εκατομ. χρόνια.

5ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

§5.1

Α΄ Ομάδας

2. i) x=6 ii) x=3 iii) $x = -2$ iv) x=4 v) $x = -3$ vi) $x = \frac{1}{5}$ vii) $x = \frac{4}{9}$ viii) x=2 ή $x = -1$.

3. i) x=1 ii) $x = -1$ ή x=1 iii) x=2.

4. i) 2<x<3 ii) x>5 iii) x<5.

5. i) x=0 και y=0 ii) x=2 και y=1.

Β΄ Ομάδας

1. i) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ ii) $1 < \alpha < 2$ iii) $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ με $\alpha \neq 1$.

2. i) x=0 ή x=2, ii) x=1, iii) $x = -1$, iv) $x = \frac{3}{2}$, v) $x = \frac{3}{2}$.

3. i) (x=1 και y=1) ή (x=3 και y=2) ii) x=1 και y=3.

6. i) $Q(t) = 5 \cdot (0,8)^t$ iii) 0,0000132.

7. ii) 3,86 gr iii) 0,001.

8. i) $T(t) = 40 \cdot (0,85)^t$, $0 \le t \le 6$ ii) 15085 ευρώ.

9. i) 1, 0,606, 0,368, 0,223, 0,135, 0,082

ii) α) x=0 β) x=5.

10. i) 1, 0,135, 0,018, 0,002

ii) α) t=1 β) t=0.

11. ii) α) $t = k \cdot RC$, όπου k=1, 2, 3,....

β) $t = k \cdot RC$ όπου k=3, 4, 5,....

§5.2

Α΄ Ομάδας

1. i) -3 ii) $-\frac{1}{2}$ iii) -5 iv) $\frac{1}{4}$ v)8 vi) -3.

2. i) 1000 ii) $\frac{1}{2}$ iii) $\sqrt[3]{2}$

3. i) 2 ii) 4 iii) $\sqrt[3]{10}$

5. $6^{h} \cdot 46^{min}$.

6. i) $-0,000126$ ii) 89308 Pascals.

7. i) m=5 ii) 100 φορές.

8. i) $-0,16$ ii) 55070 μονάδες.

Β΄ Ομάδας

1. i) $\frac{4}{3}$ ii) 2.

7. Είναι $\log_{\alpha}\beta = \frac{\log\beta}{\log\alpha}$ κτλ.

8. Να χρησιμοποιήσετε τον τύπο αλλαγής βάσης με νέα βάση το 10.

§5.3

Α΄ Ομάδας

3. i) $f(x)=2^{x}$ και $g(x)=\log_{\sqrt[4]{2}} x$

ii) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$, ενώ η g δεν ορίζεται

iii) $g(x)=\log_{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}} x$, ενώ η f δεν ορίζεται

iv) Δεν ορίζονται οι f, g.

4.

x	50	100	200	400	800	1600
y	18	21	24	27	30	33

5. i) $x=\sqrt{3}$ ii) x=2 iii) $x=1$ ή $x=100$ iv) x=1.

6. i) $x=\log 2$ ii) $x \cong 4,4190$

8. Όξινο αν pH<7 και βασικό αν pH>7.

Β΄ Ομάδας

3. $x=4$.

5. i) x=1 ή x=10000

ii) $x=e^{\pm 1}$ ή $x=e^{\pm 2}$.

6. x=10.

7. i) (x=2 και y=8) ή (x=8 και y=2)

ii) x=2 και y=4 iii) $x=\frac{1}{2}$ και y=1.

8. i) 1<x<100 ii) 2<x<4

iii) 0<x<0,1 ή x>10.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. i) x=0 ή x=3 ή $x=\frac{5}{3}$ ή x=1 ii) x=0 ή x=1 ή $x=-3$ ή $x=-1$.

5. x=0,1 ή x=5.

6. $x=\frac{\pi}{4}$.

7. $x=\frac{\pi}{4}$.

8. x>0.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
(Δ΄ ΟΜΑΔΑΣ)

1. $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{12}$ ή

$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \ \kappa \in \mathbb{Z}.$

2. ii) $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \ \kappa \in \mathbb{Z}.$

3. $x = -1$ ή

$x = 2 - \sqrt{3}$ ή

$x = 2 + \sqrt{3}.$

Άρα $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

5. $i_1)$ $x = \frac{1}{2}$

$i_2) -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}$

ii) Παρατηρήστε ότι το $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της $x^2 - 2 = 0$ και ότι αυτή δεν έχει ρητές ρίζες.

6. $x = 2.$

7. $x = 1.$

8. $\alpha < 0$ ή $\alpha = 12.$

9. $x = \frac{\pi}{4}$.

10. $2,4094 < x \leq 3,8188$.

11. i) $x \in (0,1]$.

ii) $x \in [1,+\infty)$.

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.

Κωδικός Βιβλίου: 0-22-0207
ISBN 978-960-06-2323-9

ΙΤΥΕ "ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 22 0207 5