ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
& Σπουδών Υγείας
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Β΄ ΜΕΡΟΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός	• Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Κατσαργύρης Βασίλειος	• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης
Μέτης Στέφανος	• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης
Μπρουχούτας Κων/νος	• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης
Παπασταυρίδης Σταύρος	• Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Πολύζος Γεώργιος	• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ

Θωμαΐδης Ιωάννης	• Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Κατσαργύρης Βασίλειος
Μέτης Στέφανος
Μπρουχούτας Κων/νος
Πολύζος Γεώργιος

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ

Αδαμόπουλος Λεωνίδας	• Επίτιμος Σύμβουλος του Π.Ι.

Δακτυλογράφηση: Γαρδέρη Ρόζα
Σχήματα: Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ Τάξης

Γενικού Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών
& Σπουδών Υγείας
και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μέτης Στέφανος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Μπρουχούτας Κων/νος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Παπασταυρίδης Σταύρος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Πολύζος Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας εκπαίδευσης

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών, όπως προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου.
Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση του βιβλίου των Μαθηματικών της 2ης και της 4ης δέσμης της Γ΄ τάξης του Γενικού Λυκείου και αποτελείται από δύο μέρη.

• Το πρώτο μέρος, που φέρει τον τίτλο ΑΛΓΕΒΡΑ, αποτελείται από δυο κεφάλαια.

— Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια εισαγωγή στη Θεωρία των Πινάκων, η οποία μεταξύ άλλων είναι ένα εργαλείο για τη μελέτη των Γεωμετρικών Μετασχηματισμών και των Γραμμικών Συστημάτων, τα οποία μελετώνται στο ίδιο κεφάλαιο.

— Το δεύτερο κεφάλαιο εισάγει στους Μιγαδικούς Αριθμούς, οι οποίοι είναι προέκταση των Πραγματικών Αριθμών. Οι Μιγαδικοί Αριθμοί ανακαλύφθηκαν την περίοδο της Αναγέννησης στην προσπάθεια επίλυσης εξισώσεων τρίτου βαθμού. Όμως, στους αιώνες που ακολούθησαν αποδείχτηκε η μεγάλη σημασία τους για πάρα πολλά προβλήματα της μαθηματικής επιστήμης και των εφαρμογών της.
Το κεφάλαιο αυτό έχει ληφθεί από το βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής Κατεύθυνσης Β΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου των συγγραφέων: Αδαμόπουλου Λ., Βισκαδουράκη Β., Γαβαλά Δ., Πολύζου Γ. και Σβέρκου Α.

• Το δεύτερο μέρος, που φέρει τον τίτλο ΑΝΑΛΥΣΗ, αποτελείται από τρία κεφάλαια.

— Το πρώτο κεφάλαιο σηματοδοτεί ένα νέο ξεκίνημα. Είναι το πέρασμα από τις πεπερασμένες πράξεις στις «άπειρες διαδικασίες». Τα σπέρματα της έννοιας του ορίου υπάρχουν ασφαλώς με πολύ σαφή και συγκεκριμένο τρόπο στα γραπτά του Αρχιμήδη. Η ανάπτυξη, όμως, αυτής της έννοιας έγινε στα χρόνια της Αναγέννησης και έκτοτε κατέχει κεντρική θέση στον κόσμο των μαθηματικών εννοιών.
Κατ' αρχάς στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται βασικές – και ήδη γνωστές στους μαθητές – έννοιες των συναρτήσεων, καθώς και μερικές ακόμη βασικές έννοιες της Ανάλυσης. Στη συνέχεια εισάγεται η έννοια του ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$, η έννοια του ορίου στο $+\infty$ και στο $-\infty$ και δίνονται οι πιο χαρακτηριστικές ιδιότητές του. Τέλος, δίνεται η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης και παρουσιάζονται οι βασικότερες ιδιότητές της.

— Στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος αντιστοίχως και γίνεται χρήση των εννοιών αυτών σε πολλές εφαρμογές. Η παράγωγος και το ολοκλήρωμα είναι κατά κάποιο τρόπο οι δύο διαφορετικές όψεις του ίδιου νομίσματος. Σε μια έκφρασή τους είναι η κλίση της

εφαπτομένης και το εμβαδόν, σε άλλη η ταχύτητα και το μήκος της τροχιάς ενός κινητού κτλ.

Αυτό το βιβλίο ως ανθρώπινο δημιούργημα δεν είναι τέλειο. Ο μόνος τρόπος για να έχουμε στα σχολεία μας ύστερα από μερικά χρόνια ένα καλύτερο μέσο διδασκαλίας είναι ο νηφάλιος και ελεύθερος διάλογος, τον οποίο η επιστημονική παράδοση έχει καθιερώσει για αιώνες τώρα. Γι' αυτό το λόγο η συγγραφική ομάδα με ιδιαίτερη ικανοποίηση θα δέχεται σχόλια και παρατηρήσεις για το βιβλίο από οποιονδήποτε – συνάδελφο, μαθητή ή άλλο πολίτη – ενδιαφέρεται για τα ζητήματα της παιδείας. Τα σχόλια και οι παρατηρήσεις μπορούν να αποστέλλονται στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 153 10 Αγία Παρασκευή.

Οι Συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β΄ ΜΕΡΟΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Όριο - συνέχεια συνάρτησης Σελ.

1.1 Πραγματικοί Αριθμοί 11
1.2 Συναρτήσεις 14
1.3 Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση 30
1.4 Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ 39
1.5 Ιδιότητες των ορίων 47
1.6 Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ 58
1.7 Όριο συνάρτησης στο άπειρο 64
1.8 Συνέχεια συνάρτησης 70

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Διαφορικός Λογισμός

2.1 Η έννοια της παραγώγου 91
2.2 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Παράγωγος συνάρτηση 104
2.3 Κανόνες παραγώγισης 111
2.4 Ρυθμός μεταβολής 123
2.5 Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού 127
2.6 Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής 132
2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης 140
2.8 Κυρτότητα - σημεία καμπής συνάρτησης 154
2.9 Ασύμπτωτες - Κανόνες De L' Hospital 161
2.10 Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης 169

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Ολοκληρωτικός Λογισμός

3.1 Αόριστο ολοκλήρωμα 185
3.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης 191
3.3 Διαφορικές εξισώσεις 200
3.4 Ορισμένο ολοκλήρωμα 208
3.5 Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ 215
3.6 Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού 222
3.7 Εμβαδόν επιπέδου χωρίου 224

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 247

Β΄ ΜΕΡΟΣ

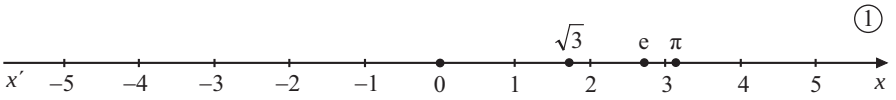
ΑΝΑΛΥΣΗ

1 ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1.1 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνεται με τα σημεία ενός άξονα, *του άξονα των πραγματικών αριθμών*. (Σχ. 1)



Ρητοί αριθμοί λέγονται οι αριθμοί που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Το σύνολο των ρητών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$.

Είναι, δηλαδή,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \,|\, \alpha, \beta \text{ ακέραιοι με } \beta \neq 0 \right\}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των ακέραιων αριθμών είναι το

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

ενώ το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το

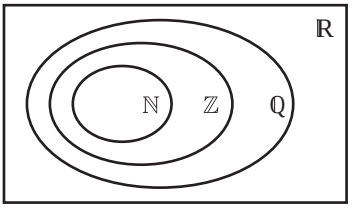
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Για τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Τα σύνολα $\mathbb{N} - \{0\}$, $\mathbb{Z} - \{0\}$, $\mathbb{Q} - \{0\}$ και $\mathbb{R} - \{0\}$ τα συμβολίζουμε συντομότερα με $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$ και $\mathbb{R}^*$ αντιστοίχως.

②



Πράξεις και διάταξη στο $\mathbb{R}$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και με τη βοήθειά τους η αφαίρεση και η διαίρεση. Οι ιδιότητες των πράξεων αυτών είναι γνωστές από προηγούμενες τάξεις. Στη συνέχεια ορίστηκε η έννοια της διάταξης, οι σπουδαιότερες ιδιότητες της οποίας είναι οι:

1) Αν $\alpha \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma$, τότε $\alpha \geq \gamma$

2) $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$

3) $\begin{cases} \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \geq \beta\gamma, \text{ όταν } \gamma > 0 \\ \text{ενώ} \\ \alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma, \text{ όταν } \gamma < 0 \end{cases}$.

4) $\begin{cases} \text{Αν } \alpha \geq \beta \text{ και } \gamma \geq \delta, \text{ τότε } \alpha + \gamma \geq \beta + \delta \\ \text{Αν } \begin{pmatrix} \alpha \geq \beta \text{ και } \gamma \geq \delta \\ \text{και} \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{pmatrix}, \text{ τότε } \alpha\gamma \geq \beta\delta. \end{cases}$

5) Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} \geq \beta^{\nu}$$

6) $\frac{\alpha}{\beta} \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha\beta \geq 0 \text{ και } \beta \neq 0)$

7) Αν $\alpha\beta > 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\beta}.$$

Διαστήματα πραγματικών αριθμών

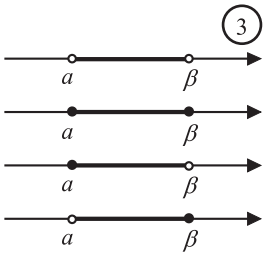
● Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$, τότε ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα α, β** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$: **ανοικτό διάστημα**

$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$: **κλειστό διάστημα**

$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}$: **κλειστό-ανοικτό διάστημα**

$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}$: **ανοικτό-κλειστό διάστημα**.



● Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το α** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

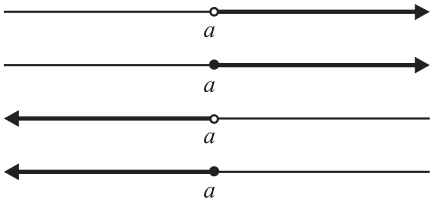
$(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \alpha\}$

$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \alpha\}$

$(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}$

$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \alpha\}$

4



Υπό μορφή διαστήματος το σύνολο $\mathbb{R}$ το συμβολίζουμε με $(-\infty, +\infty)$.

Τα σημεία ενός διαστήματος Δ, που είναι διαφορετικά από τα άκρα του, λέγονται **εσωτερικά σημεία** του Δ.

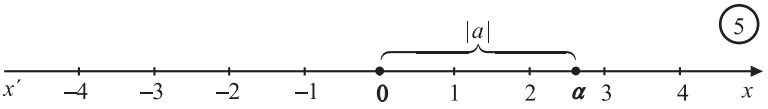
Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α, που συμβολίζεται με $|\alpha|$, ορίζεται ως εξής:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν} \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

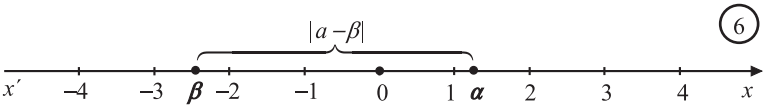
Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή του α παριστάνει την απόσταση του αριθμού α από το μηδέν,

5



ενώ η απόλυτη τιμή του $\alpha - \beta$ παριστάνει την **απόσταση των αριθμών α και β.**

6



Μερικές από τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής είναι οι εξής:

1) $|\alpha|^2 = \alpha^2$

2) $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

3) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

4) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

5) $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

6) $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad \delta > 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να γραφούν υπό μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων τα σύνολα:

$$\textbf{i)}\ A=\left\{x \mid \frac{1}{x}\le 1\right\} \qquad \textbf{ii)}\ A=\left\{x \mid \left|\frac{1}{x}-2\right|<1\right\}.$$

ΛΥΣΗ

i) Είναι

$$\frac{1}{x}\le 1 \Leftrightarrow 0\le 1-\frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow 0\le \frac{x-1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)\ge 0 \ \text{και}\ x\ne 0$$

$$\Leftrightarrow x<0 \ \text{ή}\ x\ge 1.$$

Άρα $A=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.

ii) Είναι

$$\left|\frac{1}{x}-2\right|<1 \Leftrightarrow -1<\frac{1}{x}-2<1$$

$$\Leftrightarrow 1<\frac{1}{x}<3$$

$$\Leftrightarrow 1>x>\frac{1}{3}.$$

Άρα $A=\left(\frac{1}{3},1\right)$.

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Στην παράγραφο αυτή υπενθυμίζουμε τον ορισμό της πραγματικής συνάρτησης με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, επαναλαμβάνουμε γνωστές έννοιες και τέλος ορίζουμε πράξεις μεταξύ των πραγματικών συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της f στο x** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(x)}$.

Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x).$$

— Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

— Το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με $\boldsymbol{D_f}$.

— Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(A)}$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στα επόμενα και σε όλη την έκταση του βιβλίου :

— Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων**.

— Όταν θα λέμε ότι **"Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο Β",** θα εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση αυτή με $f(B)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Είναι δηλαδή:

$$f(B) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in B\}.$$

Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι για να οριστεί μια συνάρτηση f αρκεί να δοθούν δύο στοιχεία:

- το πεδίο ορισμού της και
- η τιμή της, $f(x)$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

Συνήθως, όμως, αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Σε μια τέτοια περίπτωση θα *θεωρούμε συμβατικά* ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x, για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα. Έτσι, για παράδειγμα, αντί να λέμε "δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$,

με $f(x)=\sqrt{4-2x}$ " θα λέμε "δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{4-2x}$ " ή, πιο απλά, "δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ", ή "δίνεται η συνάρτηση $y=\sqrt{4-2x}$ ".

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}$ **ii)** $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν και μόνο όταν

$$x^2-3x+2\geq 0 \text{ και } x\neq 0 .$$

Το τριώνυμο όμως x^2-3x+2 έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2. Έτσι, η ανίσωση $x^2-3x+2\geq 0$ αληθεύει, όταν και μόνο όταν

$$x\leq 1 \text{ ή } x\geq 2 .$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=(-\infty,0)\cup(0,1]\cup[2,+\infty)$.

ii) Η συνάρτηση f ορίζεται, όταν και μόνο όταν

$$1-\ln x\geq 0.$$

Είναι όμως

$$1-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 1$$
$$\Leftrightarrow \ln x\leq \ln e$$
$$\Leftrightarrow 0<x\leq e .$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A=(0, e]$.

Γραφική παράσταση συνάρτησης

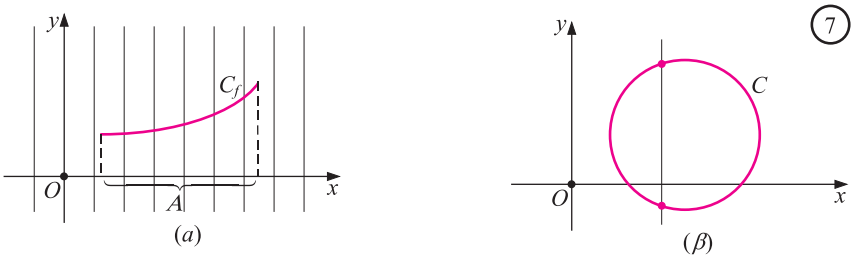
Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y=f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x\in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται

συνήθως με C_f. Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. 7α).

Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. 7β).

7



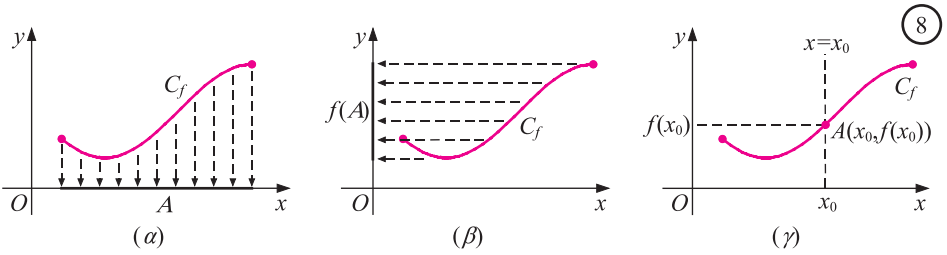
Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.

β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).

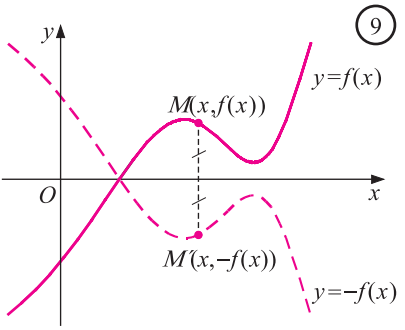
8



Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

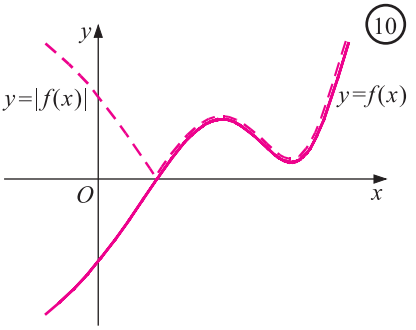
α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).

9



β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή πάνω σ' αυτόν και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).

10

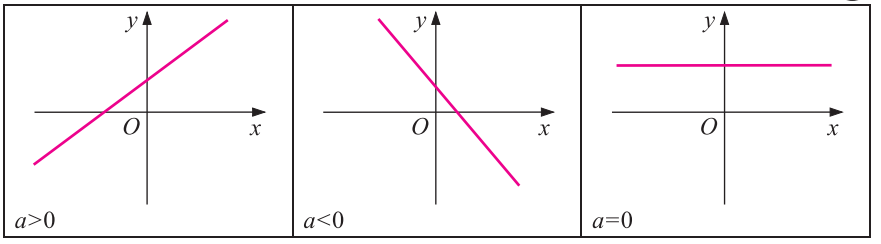


Μερικές βασικές συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή δίνουμε τις γραφικές παραστάσεις μερικών βασικών συναρτήσεων, τις οποίες γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις.

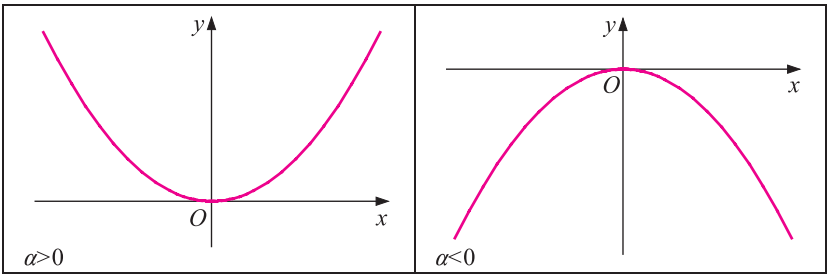
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$.

11

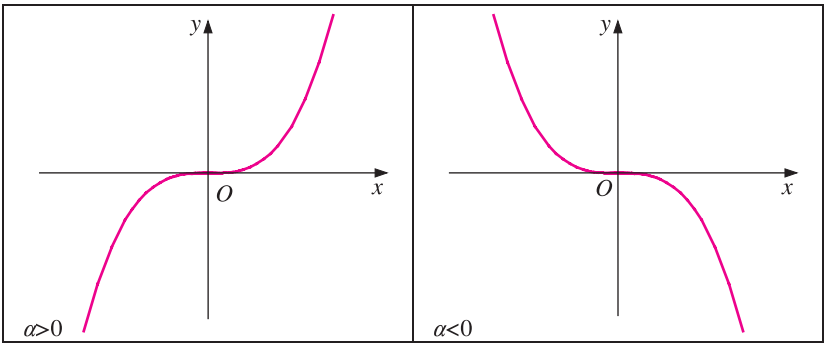


Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

12

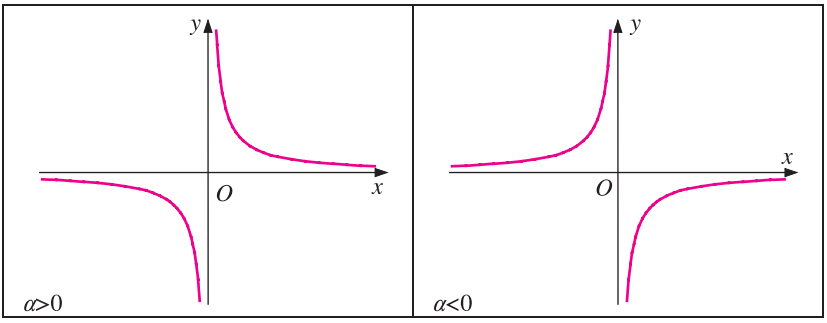


Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$.



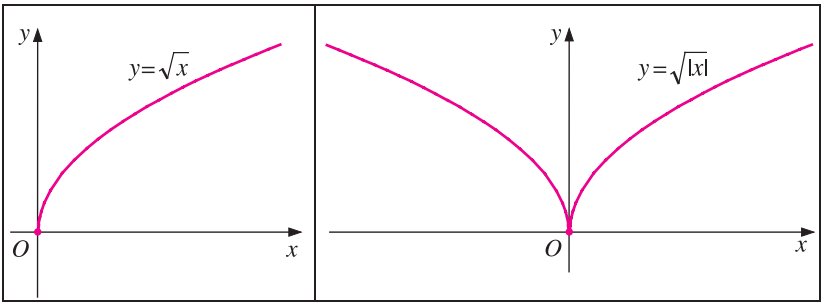
13

Η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$.



14

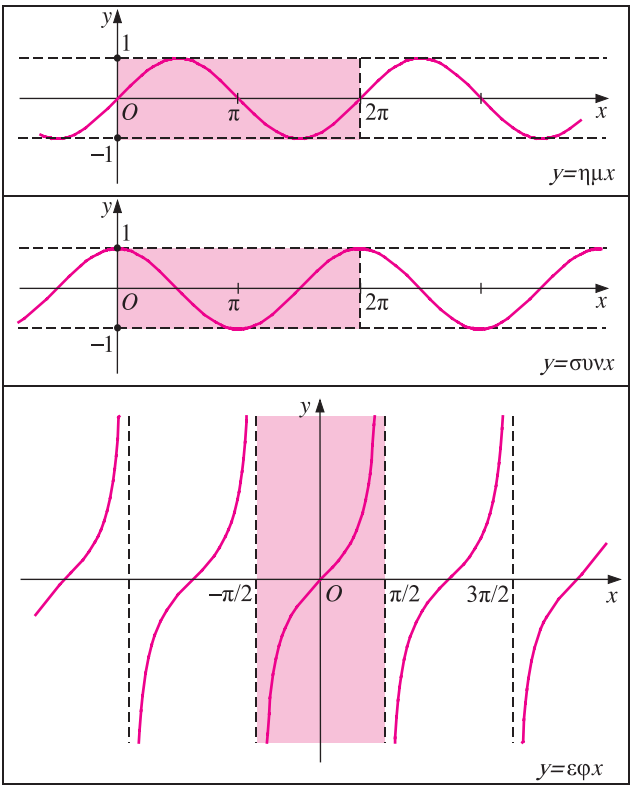
Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{|x|}$.



15

Επειδή $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, x < 0 \\ \sqrt{x}\ \ , x \geq 0 \end{cases}$, η γραφική παράσταση της $y = \sqrt{|x|}$ αποτελείται απο δύο κλάδους. Ο ένας είναι η γραφική παράσταση της $y = \sqrt{x}$ και ο άλλος η συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$.

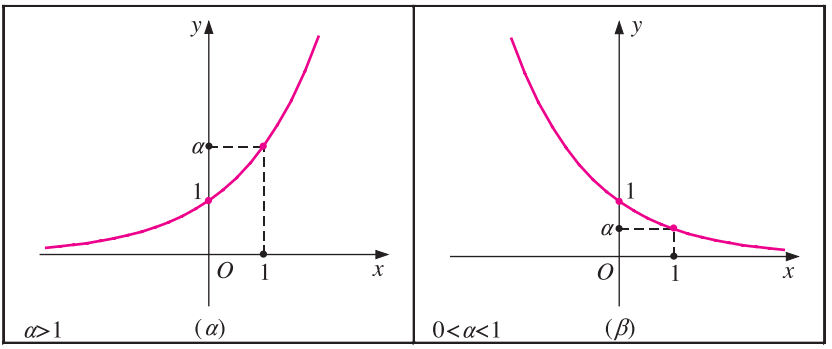
Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις: $f(x) = \eta\mu x$, $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $f(x) = \varepsilon\varphi x$.



16

Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $T = 2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \pi$.

Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$.



17

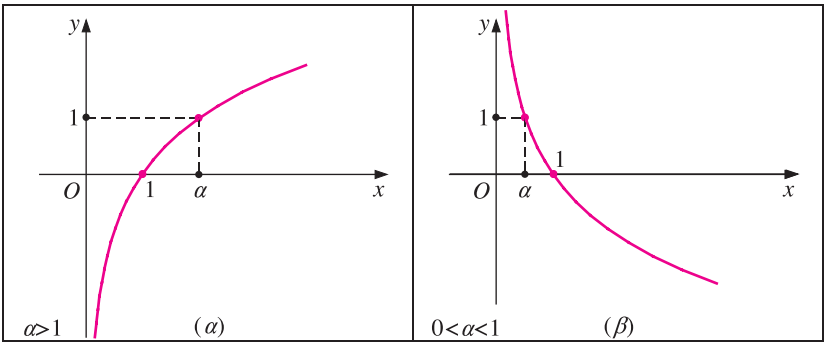
Υπενθυμίζουμε ότι:

αν $\alpha > 1$, **τότε:** $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ενώ

αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$.



18

Υπενθυμίζουμε ότι:

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x$ **και** $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1$ **και** $\log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha(x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^\kappa = \kappa \log_\alpha x_1$

7) αν $\alpha > 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

ενώ

αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

8) $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$, **αφού** $\alpha = e^{\ln \alpha}$.

Οι παραπάνω τύποι ισχύουν με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Με τη βοήθεια των παραπάνω γραφικών παραστάσεων μπορούμε να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων, όπως στην παρακάτω εφαρμογή.

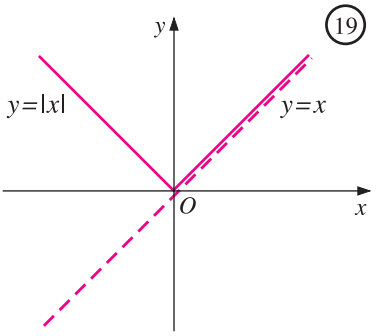
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να παραστήσετε γραφικά κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις:

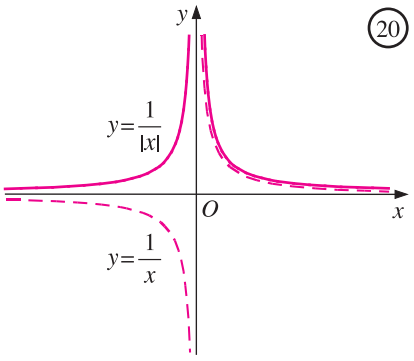
i) $f(x)=|x|$, **ii)** $g(x)=\dfrac{1}{|x|}$, **iii)** $h(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$.

ΛΥΣΗ

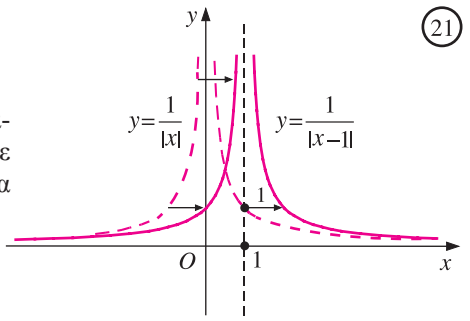
i) Αρχικά παριστάνουμε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x)=x$ και έπειτα την $f(x)=|\varphi(x)|$.



ii) Αρχικά παριστάνουμε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ και έπειτα την $g(x)=|\varphi(x)|$.



iii) Επειδή $h(x)=g(x-1)$, η γραφική παράσταση της h προκύπτει, αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της g κατά μία μονάδα προς τα δεξιά.



Ισότητα συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1} \quad \text{και} \quad g(x)=x.$$

Παρατηρούμε ότι:

— οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο $A=\mathbb{R}$ και

— για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$, αφού

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}=x=g(x).$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Γενικά:

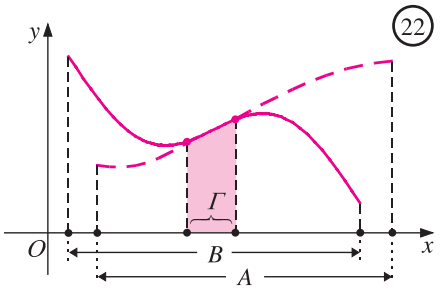
ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f=g$.

Έστω τώρα f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B. Αν για κάθε $x\in\Gamma$ ισχύει $f(x)=g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις ***f* και *g* είναι ίσες στο σύνολο *Γ*.** (Σχ. 22)



22

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}\ \text{ και }\ g(x)=\frac{x^2+x}{x},$$

που έχουν πεδία ορισμού τα σύνολα $A=\mathbb{R}-\{1\}$ και $B=\mathbb{R}-\{0\}$ αντιστοίχως, είναι ίσες στο σύνολο $\Gamma=\mathbb{R}-\{0,1\}$, αφού για κάθε $x\in\Gamma$ ισχύει

$$f(x)=g(x)=x+1.$$

Πράξεις με συναρτήσεις

Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=\sqrt{1-x}\ ,\ g(x)=\sqrt{x}$$

και οι

$$\varphi_1(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x},\ \varphi_2(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x},\ \varphi_3(x)=\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x},\ \varphi_4(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}.$$

Παρατηρούμε ότι:

α) Το πεδίο ορισμού των φ_1, φ_2 και φ_3 είναι το σύνολο $[0,1]$, που είναι η τομή των πεδίων ορισμού $A=(-\infty,1]$ και $B=[0,+\infty)$ των f, g, ενώ το πεδίο ορισμού της φ_4 είναι το

σύνολο $(0,1]$, που είναι η τομή των A, B αν εξαιρέσουμε τα x για τα οποία ισχύει $g(x) = 0$, και

β) $\varphi_1(x) = f(x) + g(x)$, $\varphi_2(x) = f(x) - g(x)$, $\varphi_3(x) = f(x)\cdot g(x)$, $\varphi_4(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Τις συναρτήσεις φ_1, φ_2, φ_3 και φ_4 τις λέμε άθροισμα, διαφορά, γινόμενο και πηλίκο αντιστοίχως των f, g. Γενικά:

Ορίζουμε ως **άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg** και **πηλίκο $\dfrac{f}{g}$** δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Το πεδίο ορισμού των $f + g$, $f - g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\dfrac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο

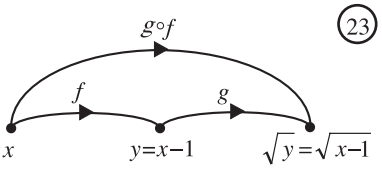
$$\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B \text{, με } g(x) \neq 0\}.$$

Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{x-1}$. Η τιμή της φ στο x μπορεί να οριστεί σε δύο φάσεις ως εξής:

α) Στο $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $y = x - 1$ και στη συνέχεια

β) στο $y = x - 1$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $\sqrt{y} = \sqrt{x-1}$, εφόσον $y = x - 1 \geq 0$.



(23)

Στη διαδικασία αυτή εμφανίζονται δύο συναρτήσεις:

α) η $f(x) = x - 1$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$ *(α΄ φάση)* και

β) η $g(y)=\sqrt{y}$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $B=[0,+\infty)$ *(β΄ φάση)*.

Έτσι, η τιμή της φ στο x γράφεται τελικά

$$\varphi(x)=g(f(x)).$$

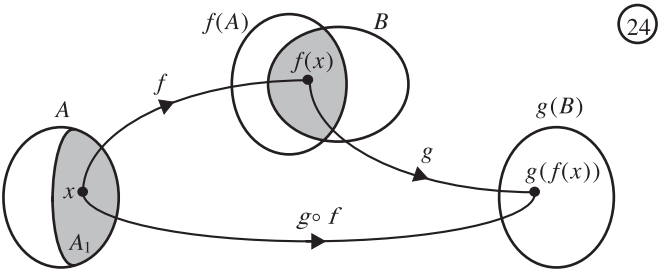
Η συνάρτηση φ λέγεται *σύνθεση της f με την g* και συμβολίζεται με $\boldsymbol{g\circ f}$.

Το πεδίο ορισμού της φ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού A της f, αλλά περιορίζεται στα $x\in A$ για τα οποία η τιμή $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού B της g, δηλαδή είναι το σύνολο $A_1=[1,+\infty)$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με $g\circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$



24

Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1=\{x\in A\mid f(x)\in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η $g\circ f$ ορίζεται αν $A_1\neq\varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου, θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού **διάστημα** ή **ένωση διαστημάτων.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\sqrt{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

i) $\boldsymbol{g\circ f}$ **ii)** $\boldsymbol{f\circ g}$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0,+\infty)$, ενώ η g το $D_g = [0,+\infty)$.

i) Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει:

$$x \in D_f \qquad \text{και} \qquad f(x) \in D_g \tag{1}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1,$$

δηλαδή πρέπει $x \geq 1$. Επομένως, ορίζεται η $g \circ f$ και είναι

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}, \text{ για κάθε } x \in [1+\infty).$$

ii) Για να ορίζεται η παράσταση $f(g(x))$ πρέπει:

$$x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f$$

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0,$$

δηλαδή πρέπει $x > 0$. Επομένως, ορίζεται η $f \circ g$ και είναι

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln\sqrt{x}, \text{ για κάθε } x \in (0+\infty).$$

ΣΧΟΛΙΑ

● Στην παραπάνω εφαρμογή παρατηρούμε ότι $g \circ f \neq f \circ g$. Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές *δεν είναι υποχρεωτικά* ίσες.

● Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων;

i) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$, ii) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$

iii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ iv) $f(x)=\ln(1-e^x)$

2. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν:

i) $f(x)=x^2-4x+3$, ii) $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, iii) $f(x)=e^x-1$.

3. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, όταν:

i) $f(x)=x^3+2x+1$ και $g(x)=x+1$

ii) $f(x)=x^3+x-2$ και $g(x)=x^2+x-2$.

4. Οι ανθρωπολόγοι εκτιμούν ότι το ύψος του ανθρώπου δίνεται από τις συναρτήσεις:

$$A(x)=2{,}89x+70{,}64 \text{ (για τους άνδρες) και}$$

$$\Gamma(x)=2{,}75x+71{,}48 \text{ (για τις γυναίκες)}$$

όπου x σε εκατοστά, το μήκος του βραχίονα. Σε μία ανασκαφή βρέθηκε ένα οστό από βραχίονα μήκους 0,45 m.

α) Αν προέρχεται από άνδρα ποιο ήταν το ύψος του;

β) Αν προέρχεται από γυναίκα ποιο ήταν το ύψος της;

5. Σύρμα μήκους $\ell=20$ cm κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x cm και $(20-x)$ cm. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x.

6. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}+1$, ii) $f(x)=x|x|$,

iii) $f(x)=\begin{cases}-x+3 & , \quad x<1\\ x+1 & , \quad x\geq 1\end{cases}$ iv) $f(x)=|\ln x|$.

Και από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο των τιμών της f σε καθεμιά περίπτωση.

7. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f=g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f\neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

i) $f(x)=\sqrt{x^2}$ και $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$

ii) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+|x|}$ και $g(x)=1-\dfrac{1}{|x|}$

iii) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x)=\sqrt{x}+1$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=1+\frac{1}{x} \text{ και } g(x)=\frac{x}{1-x}.$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, fg και $\dfrac{f}{g}$.

9. Ομοίως για τις συναρτήσεις

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ και } g(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

10. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g\circ f$, αν

i) $f(x)=x^2$ και $g(x)=\sqrt{x}$, ii) $f(x)=$ ημx και $g(x)=\sqrt{1-x^2}$

iii) $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$ και $g(x)=$ εφx.

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=\sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$.

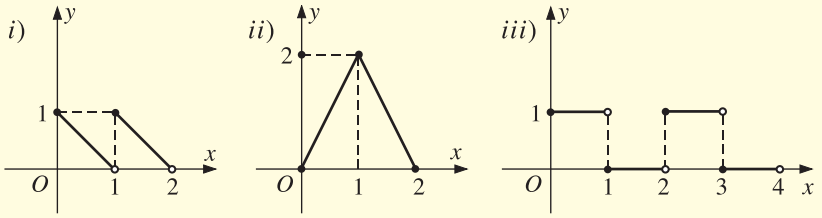
12. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν

i) $f(x) = \eta\mu(x^2 + 1)$, ii) $f(x) = 2\,\eta\mu^2 3x + 1$

iii) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$, iv) $f(x) = \eta\mu^2(3x)$.

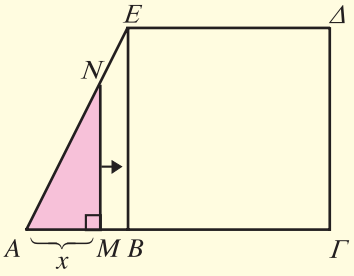
Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι:

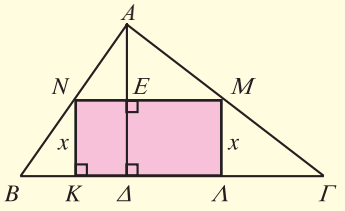


2. Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος έχει ακτίνα βάσης x cm και όγκο 628 cm^3. Το υλικό των βάσεων κοστίζει 4 λεπτά του ευρώ ανά cm^2, ενώ το υλικό της κυλινδρικής επιφάνειας 1,25 λεπτά του ευρώ ανά cm^2. Να εκφράσετε το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του x. Πόσο κοστίζει ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 cm;

3. Στο διπλανό σχήμα είναι $ΒΓΔΕ$ τετράγωνο και $ΑΒ = 1$, $ΑΓ = 3$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως συνάρτηση του $x = ΑΜ$, όταν το $Μ$ διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΓ$.



4. Ένα ορθογώνιο $ΚΛΜΝ$ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ βάσης $ΒΓ = 10$ cm και ύψους $ΑΔ = 5$ cm. Να εκφράσετε το εμβαδό $Ε$ και την περίμετρο $Ρ$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.



5. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i) $f(x) = \dfrac{|x+1|+|x-1|}{2}$, ii) $f(x) = \dfrac{\eta\mu x + |\eta\mu x|}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$.

Από τη γραφική παράσταση της f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της σε καθεμιά περίπτωση.

6. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

i) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = x + 1$

ii) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 + x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = -x^2$

iii) $(g \circ f)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + 1$ και $g(x) = \alpha x + 2$. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}, \text{ με } \beta \neq -\alpha^2 \text{ και } g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1.$$

Να αποδείξετε ότι

α) $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$ και

β) $g(g(x)) = x$, για κάθε $x \in [0,1]$.

9. Οι πολεοδόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός P της πόλης είναι x εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $N = 10\sqrt{2(x^2 + x)}$ χιλιάδες αυτοκίνητα. Έρευνες δείχνουν ότι σε t έτη από σήμερα ο πληθυσμός της πόλης θα είναι $\sqrt{t} + 4$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

i) Να εκφράσετε τον αριθμό N των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση του t.

ii) Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα;

1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μονοτονία συνάρτησης

● Οι έννοιες "γνησίως αύξουσα συνάρτηση", "γνησίως φθίνουσα συνάρτηση" είναι γνωστές από προηγούμενη τάξη. Συγκεκριμένα, μάθαμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

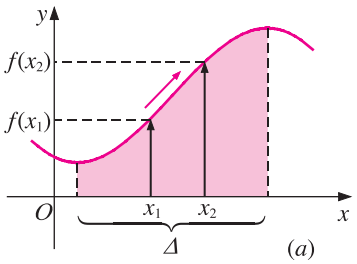
Μια συνάρτηση f λέγεται[1]:

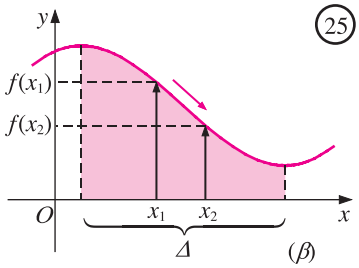
• **γνησίως αύξουσα** σ' ένα *διάστημα* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (Σχ. α)}$$

• **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα *διάστημα* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ (Σχ. β)}$$





Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ, γράφουμε $f \uparrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \downarrow \Delta$).

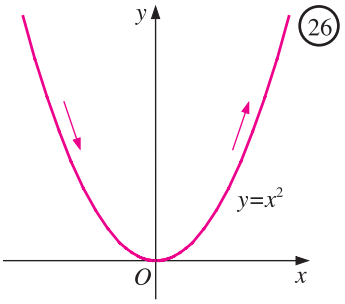
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^2$:

— είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, αφού για $0 \le x_1 < x_2$ έχουμε $x_1^2 < x_2^2$, δηλαδή

$$f(x_1) < f(x_2)$$

— είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, αφού για $x_1 < x_2 \le 0$ έχουμε $0 \le -x_2 < -x_1$, οπότε $0 \le x_2^2 < x_1^2$, δηλαδή

$$f(x_1) > f(x_2).$$



Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι **γνησίως μονότονη στο Δ.** Στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε, απλώς, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

---

[1] Μια συνάρτηση f λέγεται, απλώς:

• **αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) \le f(x_2).$$

• **φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) \ge f(x_2).$$

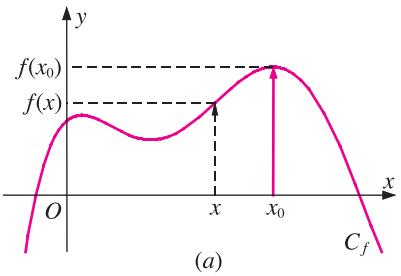
Ακρότατα συνάρτησης

Οι έννοιες "μέγιστο", "ελάχιστο" συνάρτησης είναι και αυτές γνωστές από προηγούμενες τάξεις. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:

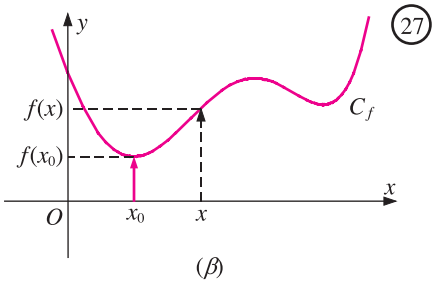
ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν
$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \quad (\Sigma\chi.\ 27\alpha)$$
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \quad (\Sigma\chi.\ 27\beta).$$



(α)



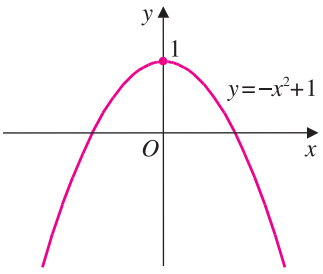
(β)

27

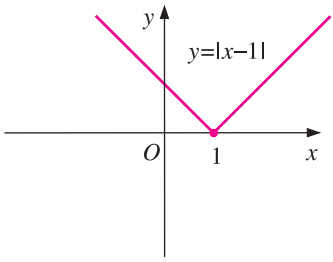
Για παράδειγμα:

— Η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 1$ (Σχ. 28α) παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 1$, αφού $f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

— Η συνάρτηση $f(x) = |x - 1|$ (Σχ. 28β) παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = 0$, αφού $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



(α)

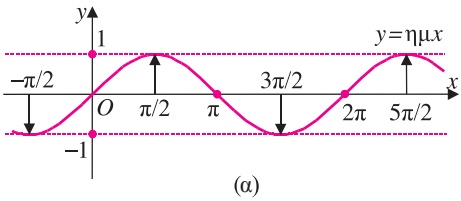


(β)

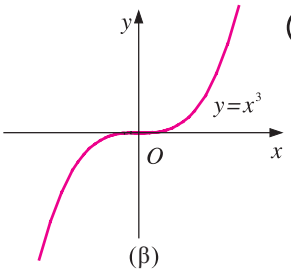
28

— Η συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}x$ (Σχ. 29α) παρουσιάζει μέγιστο, το $y = 1$, σε καθένα από τα σημεία $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ και ελάχιστο, το $y = -1$, σε καθένα από τα σημεία $2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, αφού $-1 \leq \text{ημ}x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

— Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ (Σχ. 29β) δεν παρουσιάζει ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο, αφού είναι γνησίως αύξουσα.



(α)



(β)

29

Όπως είδαμε και στα προηγούμενα παραδείγματα, άλλες συναρτήσεις παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες και μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται **ολικά ακρότατα** της f.

Συνάρτηση 1–1

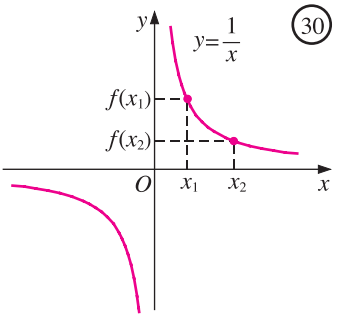
Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \neq 0$ ισχύει η συνεπαγωγή:

"Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$",

που σημαίνει ότι:

"Τα διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ έχουν πάντοτε διαφορετικές εικόνες".

Λόγω της τελευταίας ιδιότητας η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ λέγεται συνάρτηση 1–1 (ένα προς ένα). Γενικά:



30

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1–1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

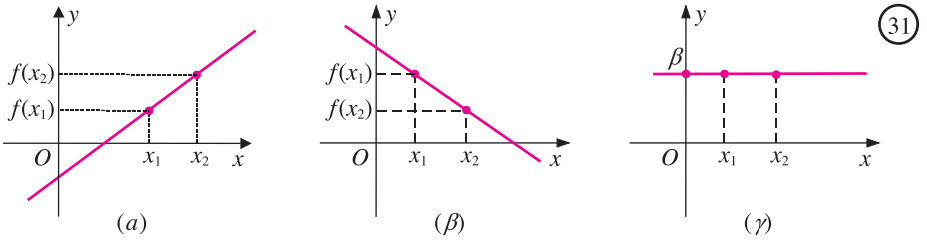
Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι **συνάρτηση 1–1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } f(x_1)=f(x_2), \text{ τότε } x_1=x_2.$$

Έτσι για παράδειγμα:

— Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha\neq 0$ είναι συνάρτηση 1–1. (Σχ. 31α, β)



αφού, αν υποθέσουμε ότι $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

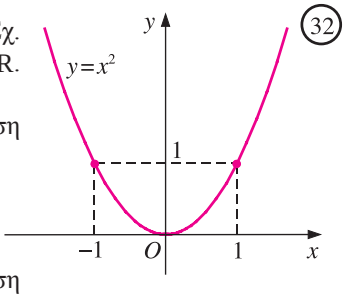
$$\alpha x_1+\beta=\alpha x_2+\beta$$

$$\alpha x_1=\alpha x_2$$

$$x_1=x_2.$$

— Η συνάρτηση $f(x)=\beta$ δεν είναι συνάρτηση 1–1 (Σχ. 31γ), αφού $f(x_1)=f(x_2)=\beta$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$.

— Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ (Σχ. 32) δεν είναι συνάρτηση 1–1, αφού $f(-1)=f(1)=1$ αν και είναι $-1\neq 1$.



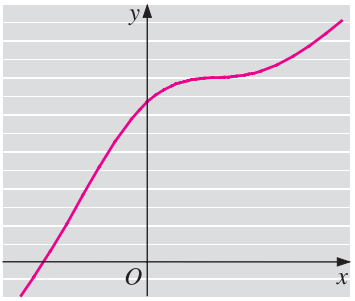
ΣΧΟΛΙΑ

- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν:

— Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

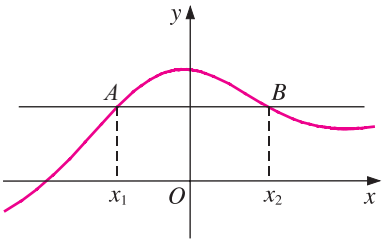
— Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο (Σχ. 33α).

- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση "1–1".



συνάρτηση 1–1

33

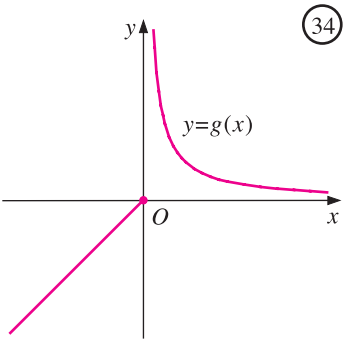


συνάρτηση όχι 1–1

Έτσι, οι συναρτήσεις $f_1(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$, $f_2(x) = \alpha x^3$, $\alpha \neq 0$, $f_3(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$ και $f_4(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$, είναι συναρτήσεις 1–1. Υπάρχουν, όμως, συναρτήσεις που είναι 1–1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση

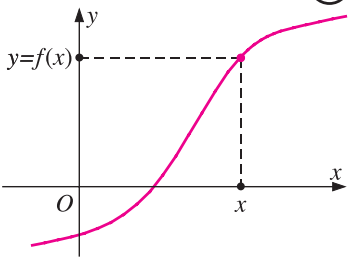
$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$ (Σχ. 34).

34



Αντίστροφη συνάρτηση

35



● Έστω μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1–1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$g : f(A) \to \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

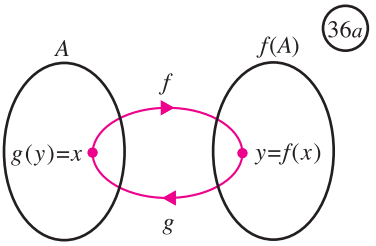
— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και

— ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x.$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f^{-1}}$. Επομένως έχουμε



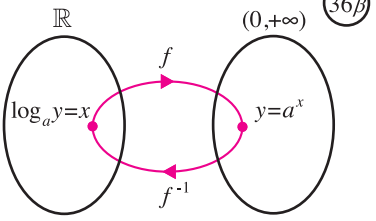
36α

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

οπότε

$$\boldsymbol{f^{-1}(f(x))=x,\ x\in A} \qquad \text{και} \qquad \boldsymbol{f(f^{-1}(y))=y,\ \ y\in f(A)}.$$

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι 1–1 με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f. Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,



36β

— έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$

— έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και

— αντιστοιχίζει κάθε $y\in(0,+\infty)$ στο μοναδικό $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\alpha^x=y$. Επειδή όμως

$$\alpha^x=y \Leftrightarrow x=\log_\alpha y$$

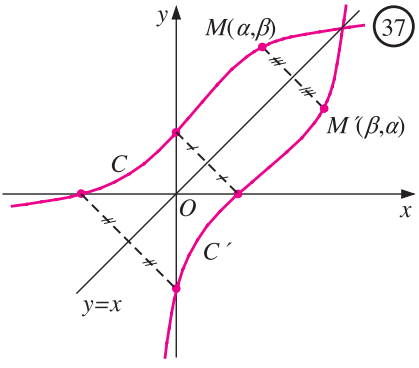
θα είναι $f^{-1}(y)=\log_\alpha y$. Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\log_\alpha x$. Συνεπώς

$$\boldsymbol{\log_\alpha \alpha^x=x,\ x\in\mathbb{R}} \qquad \textbf{και} \qquad \boldsymbol{\alpha^{\log_\alpha x}=x,\ \ x\in(0,+\infty)}$$

● Ας πάρουμε τώρα μια 1–1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και f^{-1}, αντιστοίχως, στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37). Επειδή

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x,$$

αν ένα σημείο $M(\alpha,\ \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και



37

αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Επομένως:

> Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Έτσι, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x$ και $g(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$, είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = 2e^{3x-2} + 1$ είναι 1–1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

ΛΥΣΗ

— Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Θα δείξουμε ότι $x_1 = x_2$. Πράγματι έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$2e^{3x_1-2} + 1 = 2e^{3x_2-2} + 1$$

$$2e^{3x_1-2} = 2e^{3x_2-2}$$

$$e^{3x_1-2} = e^{3x_2-2}$$

$$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$$

$$3x_1 = 3x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

— Για να βρούμε την αντίστροφη της f θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έχουμε λοιπόν:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2e^{3x-2} + 1 = y$$

$$\Leftrightarrow 2e^{3x-2} = y - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{3x-2} = \frac{y-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 = \ln\frac{y-1}{2}, \quad y > 1$$

$$\Leftrightarrow 3x = \ln\frac{y-1}{2} + 2,\ y > 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\ln\frac{y-1}{2} + \frac{2}{3},\ y > 1.$$

Επομένως, $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\ln\frac{y-1}{2} + \frac{2}{3},\ y > 1$, οπότε η αντίστροφη της f είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{2} + \frac{2}{3},\ x > 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες

i) $f(x) = \sqrt{1-x}$ ii) $f(x) = 2\ln(x-2) - 1$

iii) $f(x) = 3e^{1-x} + 1$ iv) $f(x) = (x-1)^2 - 1,\ x \le 1.$

2. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ″1–1″ και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

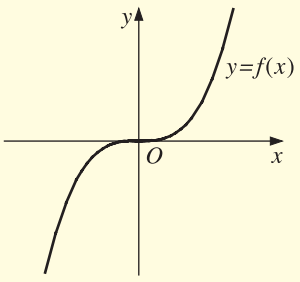
i) $f(x) = 3x - 2$ v) $f(x) = \ln(1-x)$

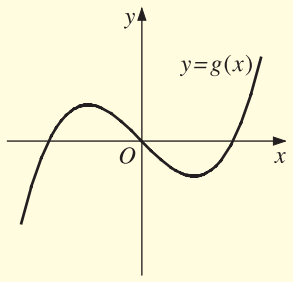
ii) $f(x) = x^2 + 1$ vi) $f(x) = e^{-x} + 1$

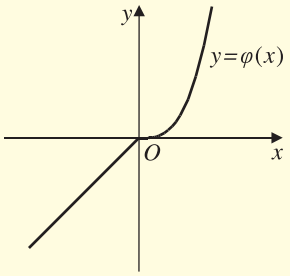
iii) $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$ vii) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

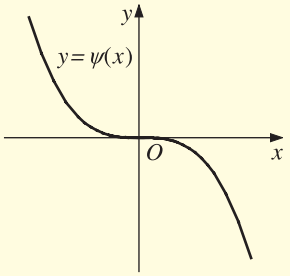
iv) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ viii) $f(x) = |x-1|.$

3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, φ και ψ.









Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f, g, φ, ψ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

4. Να δείξετε ότι:

i) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ii) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

iii) Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ανάλογα συμπεράσματα διατυπώνονται, αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ.

1.4 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$

Εισαγωγή

Η έννοια του ορίου γεννήθηκε στην προσπάθεια των μαθηματικών να απαντήσουν σε ερωτήματα όπως:

— Τι ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού;

— Τι ονομάζουμε εφαπτομένη μιας καμπύλης σε ένα σημείο της;

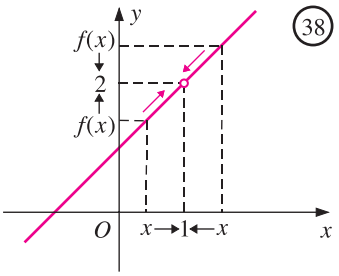
— Τι ονομάζουμε εμβαδό ενός μικτόγραμμου χωρίου;

Στις παραγράφους που ακολουθούν, αρχικά προσεγγίζουμε την έννοια του ορίου "διαισθητικά", στη συνέχεια διατυπώνουμε τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό του ορίου και μερικές βασικές ιδιότητές του και τέλος, εισάγουμε την έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης.

Η έννοια του ορίου

● Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}.$$



38

Η συνάρτηση αυτή έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$ και γράφεται

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,\ x\neq 1.$$

Επομένως, η γραφική της παράσταση είναι η ευθεία $y = x + 1$ με εξαίρεση το σημείο $A(1,2)$ (Σχ. 38). Στο σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι:

"Καθώς το x, κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 1, το $f(x)$, κινούμενο πάνω στον άξονα $y'y$, προσεγγίζει τον πραγματικό αριθμό 2. Και μάλιστα, οι τιμές $f(x)$ είναι τόσο κοντά στο 2 όσο θέλουμε, για όλα τα $x\neq 1$ που είναι αρκούντως κοντά στο 1".

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

και διαβάζουμε

"το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο 1, είναι 2".

Γενικά:

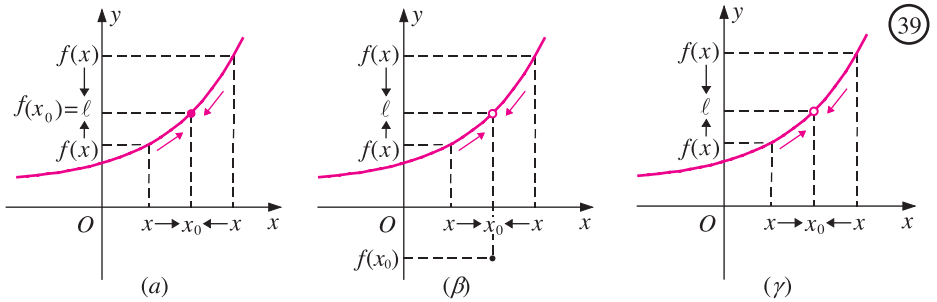
Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0, τότε γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

και διαβάζουμε

"το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0, είναι ℓ" ή

"το όριο της $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ".



39

ΣΧΟΛΙΟ

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι:

— Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής

$$(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \quad \text{ή} \quad (\alpha, x_0) \quad \text{ή} \quad (x_0, \beta).$$

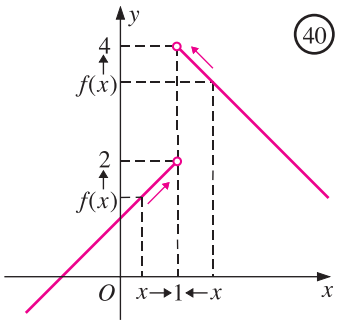
— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό (Σχ. 39γ).

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό. (Σχ. 39β).

● Έστω, τώρα, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ -x+5, & x>1 \end{cases},$$

της οποίας η γραφική παράσταση αποτελείται από τις ημιευθείες του διπλανού σχήματος.



40

Παρατηρούμε ότι:

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από αριστερά ($x < 1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2.$$

— Όταν το x προσεγγίζει το 1 από δεξιά ($x > 1$), τότε οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό 4. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4.$$

Γενικά:

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_1, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1$$

και διαβάζουμε:

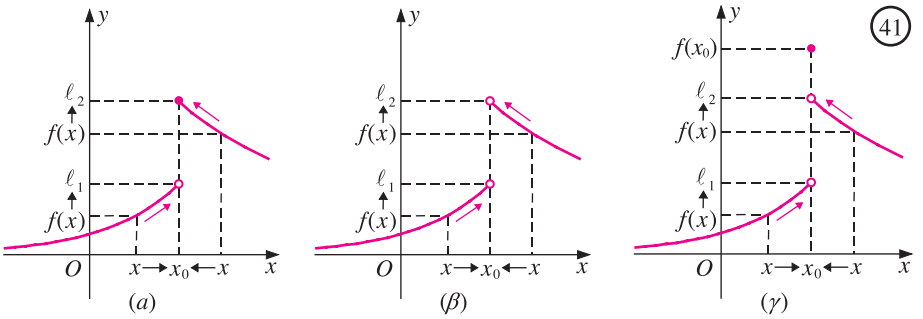
"το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα αριστερά, είναι ℓ_1".

— Όταν οι τιμές μιας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ_2, καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$

και διαβάζουμε:

"το όριο της $f(x)$, όταν το x τείνει στο x_0 από τα δεξιά, είναι ℓ_2".

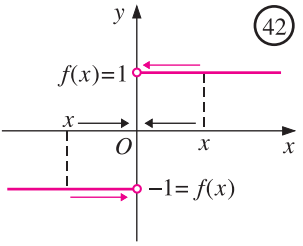


Τους αριθμούς $\ell_1 = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2 = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (Σχ. 42) δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$, αφού:



— για $x < 0$ είναι $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$, οπότε $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$,

ενώ

— για $x > 0$ είναι $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$, οπότε $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$,

και έτσι

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Ορισμός του ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$

● Στα προηγούμενα γνωρίσαμε την έννοια του ορίου διαισθητικά. Είδαμε ότι, όταν γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, εννοούμε ότι οι τιμές $f(x)$ βρίσκονται όσο θέλουμε κοντά στο ℓ, για όλα τα $x \neq x_0$ τα οποία βρίσκονται "αρκούντως κοντά στο x_0". Για να διατυπώσουμε, τώρα, τα παραπάνω σε μαθηματική γλώσσα εργαζόμαστε ως εξής:

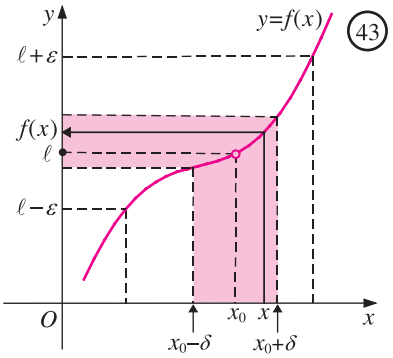
— Στη θέση της φράσης "οι τιμές $f(x)$ βρίσκονται οσοδήποτε θέλουμε κοντά στο ℓ" χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon, \qquad (1)$$

όπου ε οποιοσδήποτε θετικός αριθμός.

— Στη θέση της φράσης "για όλα τα $x \neq x_0$ που βρίσκονται αρκούντως κοντά στο x_0" χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$0<|x-x_0|<\delta, \qquad (2)$$



όπου δ είναι ένας αρκούντως μικρός θετικός αριθμός. (Η ανισότητα $0<|x-x_0|$ δηλώνει ότι $x \neq x_0$).

— Για να συνδέσουμε τις δυο αυτές φράσεις σύμφωνα με τον διαισθητικό ορισμό λέμε ότι για οποιονδήποτε θετικό αριθμό ε μπορούμε να βρούμε έναν θετικό αριθμό δ τέτοιον ώστε, αν το x ικανοποιεί τη (2), τότε το $f(x)$ θα ικανοποιεί την (1). Έχουμε δηλαδή τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ*

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$. Θα λέμε ότι η f έχει στο x_0 όριο $\ell \in \mathbb{R}$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in (\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, με $0<|x-x_0|<\delta$, να ισχύει:

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon$$

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f έχει όριο στο x_0, τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται, όπως είδαμε, με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Στη συνέχεια, όταν γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, θα εννοούμε ότι υπάρχει το όριο της f στο x_0 και είναι ίσο με ℓ.
Συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

$$(\alpha)\ \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$$
$$(\beta)\ \lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \ \Leftrightarrow\ \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$$

● Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β) και την ανισότητα $0<|x-x_0|<\delta$ την αντικαταστήσουμε με την $x_0 < x < x_0+\delta$, τότε έχουμε τον ορισμό του $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, ενώ αν η f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0) και

την ανισότητα $0 < |x - x_0| < \delta$ την αντικαταστήσουμε με την $x_0 - \delta < x < x_0$, τότε έχουμε τον ορισμό του $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

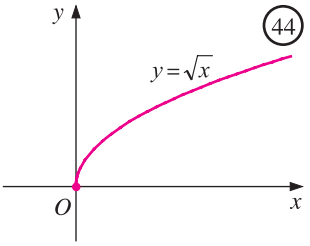
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

● Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (x_0, β), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (α, x_0), τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 \qquad (\Sigma\chi.\ 44)$$



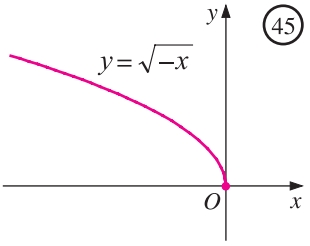
44

● Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής (α, x_0), αλλά δεν ορίζεται σε διάστημα της μορφής (x_0, β), τότε ορίζουμε:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{-x} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{-x} = 0 \qquad (\Sigma\chi.\ 45)$$



45

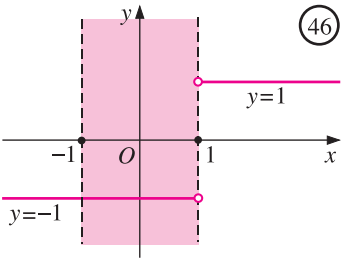
ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

Έτσι για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ στο $x_0 = 0$, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1, 0) \cup (0, 1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή

$$f(x) = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1.$$

Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$.



46

ΣΥΜΒΑΣΗ

Στη συνέχεια, όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P θα εννοούμε ότι ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P.

β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

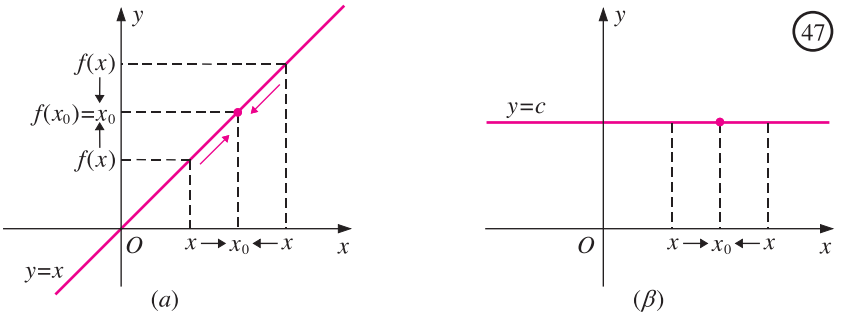
γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι θετική κοντά στο $x_0 = 0$, αφού ορίζεται στο σύνολο $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ και είναι θετική σε αυτό.

Όριο ταυτοτικής - σταθερής συνάρτησης

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου αποδεικνύεται ότι:

$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$

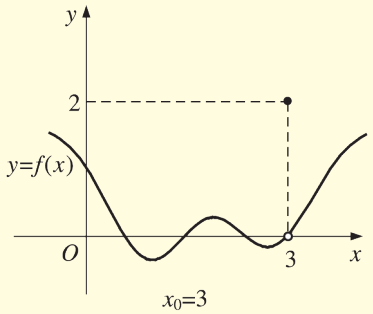


Η πρώτη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ (Σχ. 47α) στο x_0 είναι ίσο με την τιμή της στο x_0, ενώ η δεύτερη ισότητα δηλώνει ότι το όριο της σταθερής συνάρτησης $g(x) = c$ (Σχ. 47β) στο x_0 είναι ίσο με c.

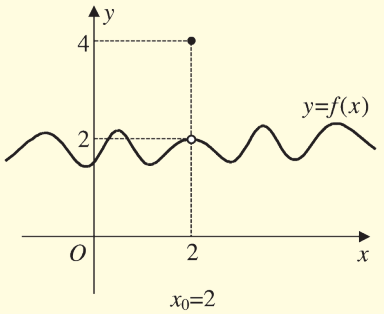
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

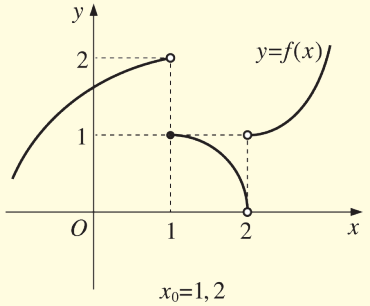
1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



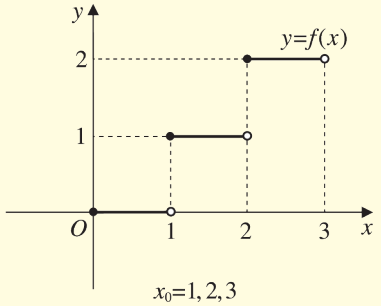
$x_0=3$



$x_0=2$



$x_0=1, 2$



$x_0=1, 2, 3$

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$, $x_0=2$

ii) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

iii) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ -x+1, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

iv) $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x_0=0$.

3. Ομοίως όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$, $x_0=1$ ή $x_0=-1$

ii) $f(x)=\dfrac{(x+1)\sqrt{9x^2-6x+1}}{3x-1}$, $x_0=\dfrac{1}{3}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2,+\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=2$

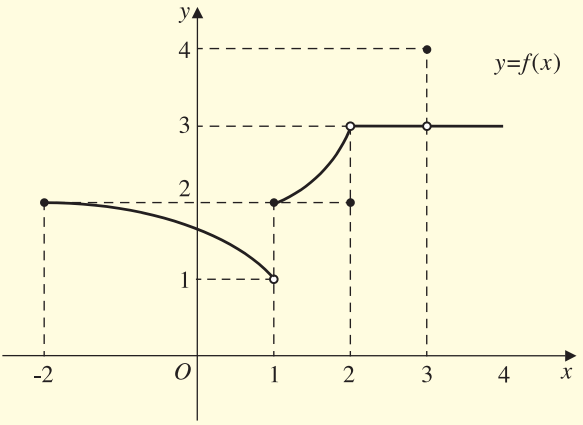
ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$

iii) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

iv) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$

v) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$

vi) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=3$



5. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, με $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lambda^2-6$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

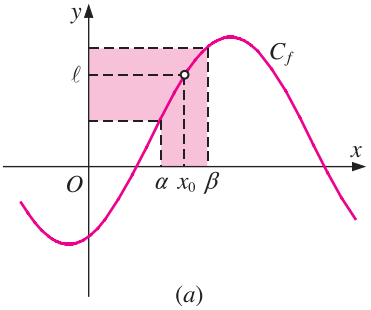
1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Όριο και διάταξη

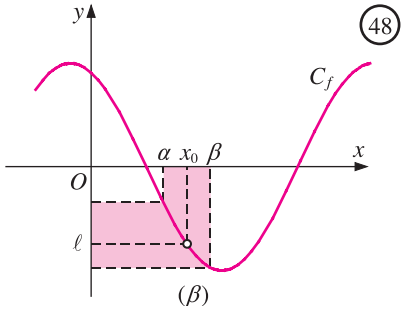
Για το όριο και τη διάταξη αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48α)
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0 (Σχ. 48β)



(α)

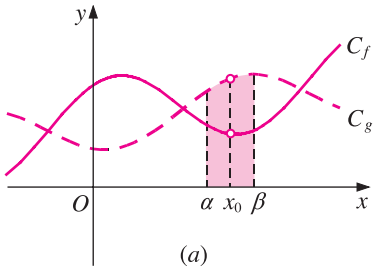


(β)

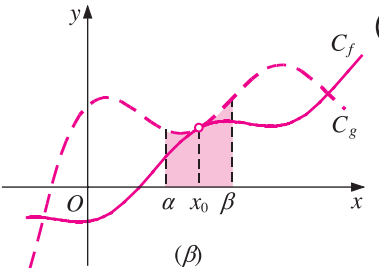
ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$$



(α)



(β)

49

Όρια και πράξεις

Τα δύο βασικά όρια $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ και το θεώρημα που ακολουθεί διευκολύνουν τον υπολογισμό των ορίων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathbb{R}$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ne 0$

5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$

6. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \ge 0$ κοντά στο x_0.

Οι ιδιότητες 1 και 3 του θεωρήματος ισχύουν και για περισσότερες από δυο συναρτήσεις. Άμεση συνέπεια αυτού είναι:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^\nu = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^\nu, \qquad \nu \in \mathbb{N}^*$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to x_0} x^v = x_0^v$$

— Έστω τώρα το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1}x^{v-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \text{ και } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0}(\alpha_v x^v + \alpha_{v-1}x^{v-1} + \cdots + \alpha_0)\\ &= \lim_{x\to x_0}(\alpha_v x^v) + \lim_{x\to x_0}(\alpha_{v-1}x^{v-1}) + \cdots + \lim_{x\to x_0}\alpha_0\\ &= \alpha_v \lim_{x\to x_0} x^v + \alpha_{v-1}\lim_{x\to x_0} x^{v-1} + \cdots + \lim_{x\to x_0}\alpha_0\\ &= \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1}x_0^{v-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to 2}(x^3 - 6x^2 + 7x - 2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 7\cdot 2 - 2 = -4.$$

— Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2+2x+1} = \frac{2^2+4}{2^2+2\cdot 2+1} = \frac{8}{9}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν $Q(x_0) = 0$, τότε δεν εφαρμόζεται η ιδιότητα 4 του παραπάνω θεωρήματος. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε όπως στην εφαρμογή 1 ii), που ακολουθεί.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:**

i) $\lim\limits_{x\to 0}[(x^2+1)^9\cdot|x^3-1|]$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\left[(x^2+1)^9\,|x^3-1|\right]=\lim_{x\to 0}(x^2+1)^9\cdot\lim_{x\to 0}|x^3-1|$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}(x^2+1)\right]^9\cdot\left|\lim_{x\to 0}(x^3-1)\right|$$

$$=1^9\cdot|-1|=1.$$

ii) Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου (ιδιότητα 4). Παρατηρούμε όμως ότι για $x=2$ μηδενίζονται και οι δύο όροι του κλάσματος. Οπότε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-4}$, για $x\neq 2$, γράφεται:

$$f(x)=\frac{x(x^2-5x+6)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x(x-3)}{x+2}=\frac{x^2-3x}{x+2}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x}{x+2}=\frac{4-3\cdot 2}{2+2}=-\frac{1}{2}.$$

iii) Για $x=1$ μηδενίζονται οι όροι του κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με $\sqrt{x^2+3}+2x$ και έτσι έχουμε:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(2x)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}$$

$$=\frac{-3x^2+3}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{-3(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)}=\frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(-3(x+1))}{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+3}+2x\right)} = \frac{-6}{\sqrt{4}+2} = -\frac{3}{2}.$$

2. **Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο στο $x_0 = 1$ της συνάρτησης**

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & x < 1 \\ -\dfrac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

ΛΥΣΗ

Αν $x < 1$, τότε $f(x) = 3x^2 - 4$, οπότε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(3x^2 - 4) = 3\cdot 1^2 - 4 = -1.$$

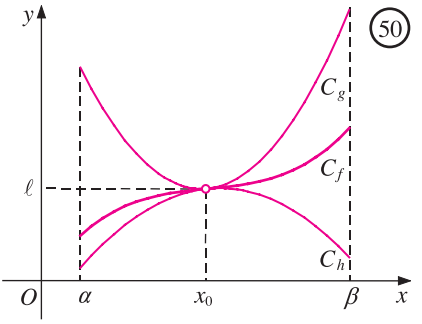
Αν $x > 1$, τότε $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, οπότε

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -1.$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$.

Κριτήριο παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι "κοντά στο x_0" μια συνάρτηση f "εγκλωβίζεται" (Σχ. 50) ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g. Αν, καθώς το x τείνει στο x_0, οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ, τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ. Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$,

τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

Για παράδειγμα, $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=0$. Πράγματι, για $x\neq 0$ έχουμε

$$\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq|x|,$$

οπότε

$$-|x|\leq x\eta\mu\frac{1}{x}\leq|x|.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, έχουμε:

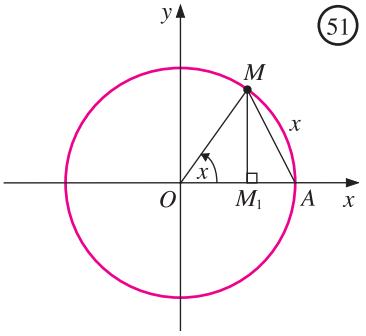
$$\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0.$$

Τριγωνομετρικά όρια

Το κριτήριο παρεμβολής είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό ορισμένων τριγωνομετρικών ορίων. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι:

$|\eta\mu x|\leq|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
(η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=0$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ*



51

— Για $x=0$ προφανώς ισχύει η ισότητα.

— Για $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ από το διπλανό σχήμα έχουμε

$$\eta\mu x=(MM_1)<(MA)<(\text{το}\xi MA)=x.$$

Άρα

$$|\eta\mu x|<|x|,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ (1)$$

— Για $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ είναι $-x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε λόγω της (1) έχουμε, $|\eta\mu(-x)|<|-x|$ ή, ισοδύναμα, $|\eta\mu x|<|x|$.

— Για $x\notin\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $|x|\geq\dfrac{\pi}{2}>1\geq|\eta\mu x|$, οπότε $|\eta\mu x|<|x|$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις ισχύει $|\eta\mu x|\leq|x|$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. ■

Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας και του κριτηρίου παρεμβολής θα αποδείξουμε ότι:

1.

- $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

● Αρχικά θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \eta\mu x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} \sigma\upsilon\nu x = 1 \tag{1}$$

Πράγματι:

— Σύμφωνα με την προηγούμενη ανισότητα έχουμε $|\eta\mu x| \le |x|$, οπότε

$$-|x| \le \eta\mu x \le |x|.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0 = \lim\limits_{x\to 0}|x|$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα είναι

$$\lim_{x\to 0} \eta\mu x = 0.$$

— Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{1-\eta\mu^2 x}, \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0} \sigma\upsilon\nu x = \lim_{x\to 0} \sqrt{1-\eta\mu^2 x} = \sqrt{1-\lim_{x\to 0} \eta\mu^2 x} = \sqrt{1-0} = 1.$$

● Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$. Πράγματι έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} \eta\mu x = \lim_{h\to 0} \eta\mu(x_0 + h) = \lim_{h\to 0}(\eta\mu x_0 \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x_0 \eta\mu h)$$

$$= \eta\mu x_0 \lim_{h\to 0} \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x_0 \lim_{h\to 0} \eta\mu h$$

$$\overset{(1)}{=} \eta\mu x_0 \cdot 1 + \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot 0 = \eta\mu x_0 .$$

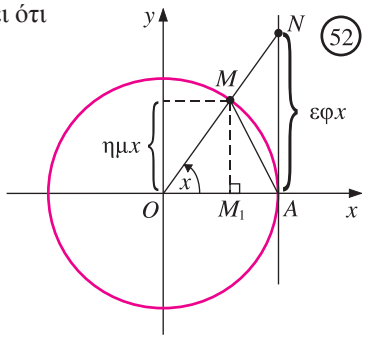
● Ανάλογα αποδεικνύεται και ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$. ■

2.

- α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$
- β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ*

— Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, τότε από το διπλανό σχήμα προκύπτει ότι εμβ(τριγ OAM) < εμβ(τομ OAM) < εμβ(τριγ OAN), οπότε έχουμε διαδοχικά:



52

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \eta\mu x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \varepsilon\varphi x$$

$$\eta\mu x < x < \varepsilon\varphi x$$

$$1 < \frac{x}{\eta\mu x} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

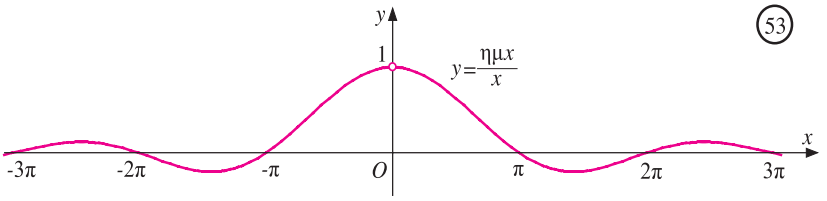
$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1.$$

— Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, τότε $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, οπότε έχουμε $\sigma\upsilon\nu(-x) < \frac{\eta\mu(-x)}{-x} < 1$ και άρα

$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1.$$

Επομένως, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < 1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} \sigma\upsilon\nu x = 1$, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.



53

β) Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1)}{x(\sigma\upsilon\nu x + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 1}{x(\sigma\upsilon\nu x + 1)}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x(1 + \sigma\upsilon\nu x)}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$$

$$= -1\cdot 0 = 0. \ \blacksquare$$

Όριο σύνθετης συνάρτησης

Με τις ιδιότητες που αναφέρουμε μέχρι τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τα όρια απλών συναρτήσεων. Αν, όμως, θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f\circ g$ στο σημείο x_0, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.

2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και

3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u).$$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Στη συνέχεια και σε όλη την έκταση του βιβλίου τα όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))$ με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι τέτοια, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: "$g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0" και γι' αυτό δεν θα ελέγχεται.

Για παράδειγμα:

α) Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\eta\mu\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right).$$

Αν θέσουμε $u = x^2+\frac{\pi}{4}$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} u = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\eta\mu\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{u\to\frac{\pi}{4}}\eta\mu u = \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

β) Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}.$$

Είναι

$$\frac{\eta\mu 3x}{x} = 3\frac{\eta\mu 3x}{3x}.$$

Έτσι, αν θέσουμε $u = 3x$, τότε $\lim\limits_{x\to 0} u = \lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u} = 3\cdot 1 = 3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}(x^5 - 4x^3 - 2x + 5)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}(x^{10} - 2x^3 + x - 1)$

iii) $\lim\limits_{x\to -1}(x^8 + 2x + 3)^{20}$ iv) $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x-5)^3 \mid x^2 - 2x - 3 \mid\right]$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4 + 2x - 5}{x + 3}$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mid x^2 - 3x \mid + \mid x - 2 \mid}{x^2 + x + 1}$

vii) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{(x+2)^2}$ viii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 + 4x + 3}$.

2. Έστω μια συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ αν:

i) $g(x) = 3(f(x))^2 - 5$ ii) $g(x) = \dfrac{\mid 2f(x) - 11 \mid}{(f(x))^2 + 1}$

iii) $g(x) = (f(x) + 2)(f(x) - 3)$.

3. Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)^3 - 27}{x}$.

4. Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$ iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$.

5. Να βρείτε (αν υπάρχει), το όριο της f στο x_0 αν:

i) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ 5x, & x>1\end{cases}$ και $x_0=1$

ii) $f(x)=\begin{cases}-2x, & x<-1\\ x^2+1, & x\ge -1\end{cases}$ και $x_0=-1$.

6. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\eta\mu x}{x}\right)$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x^3+x}\right)$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}$.

7. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu 2x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu 2x}$.

8. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, αν:

i) $1-x^2\le f(x)\le 1+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $1-x^4\le f(x)\le\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2\alpha x+\beta, & x\le 3\\ \alpha x+3\beta, & x>3\end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=10$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^3-8}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{v+1}-(v+1)x+v}{x-1}$

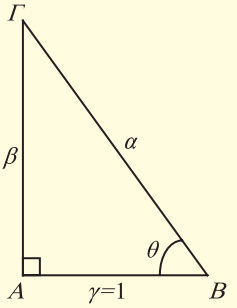
iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}$

2. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν

i) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{x^2+10x+25}}{x+5}$ ii) $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$

iii) $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|x-5|+x^2-4x-5}{x-5}$ iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

3. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\gamma = 1$. Να υπολογίσετε τα όρια:



i) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha-\beta)$, ii) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-\beta^2)$

iii) $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\beta}{\alpha}$.

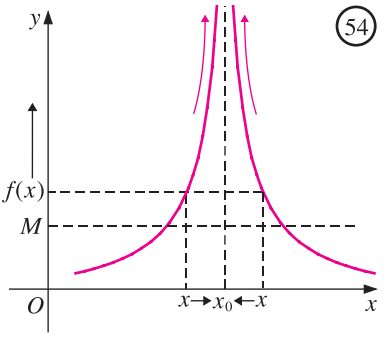
4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, αν:

i) $\lim\limits_{x\to 1}(4f(x)+2-4x)=-10$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$.

1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ $x_0\in\mathbb{R}$

— Στο σχήμα 54 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές $f(x)$ αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό M. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $+\infty$ και γράφουμε

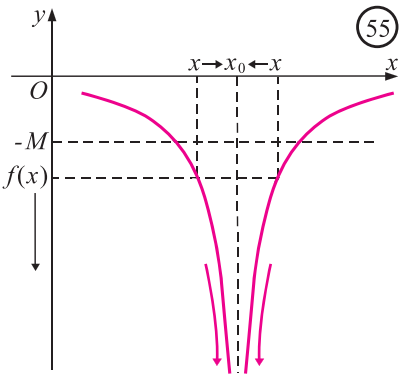
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$



54

— Στο σχήμα 55 έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f κοντά στο x_0. Παρατηρούμε ότι, καθώς το x κινούμενο με οποιονδήποτε τρόπο πάνω στον άξονα $x'x$ πλησιάζει τον πραγματικό αριθμό x_0, οι τιμές $f(x)$ ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό $-M$ $(M>0)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$



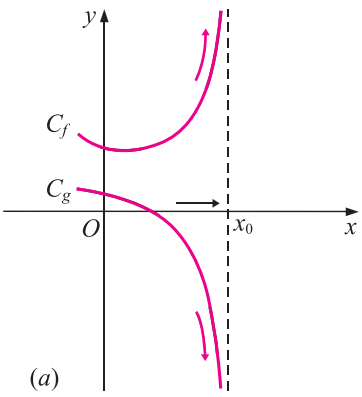
ΟΡΙΣΜΟΣ*

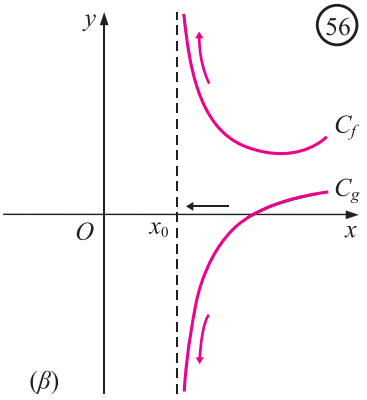
Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$. Ορίζουμε

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, όταν για κάθε $M>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, με $0<|x-x_0|<\delta$ να ισχύει
$$f(x) > M$$

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, όταν για κάθε $M>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, με $0<|x-x_0|<\delta$ να ισχύει
$$f(x) < -M$$

Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν όταν $x\to x_0^-$ και $x\to x_0^+$.





Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

Με τη βοήθεια του ορισμού αποδεικνύονται οι παρακάτω ιδιότητες:

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ

  αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = -\infty$, ενώ

  αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = +\infty$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

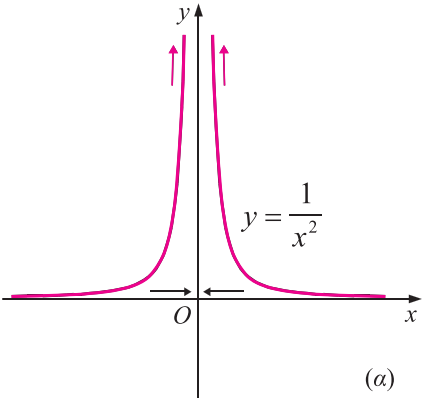
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.

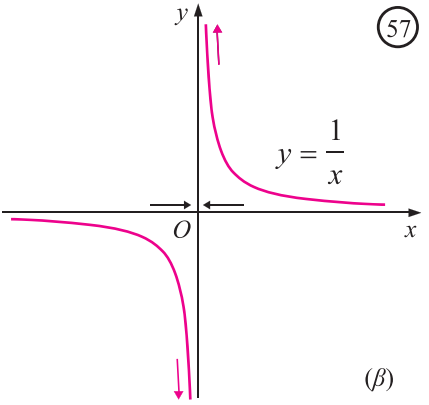
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες αυτές έχουμε:

$\mathbf{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty}$ και γενικά $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{2\nu}} = +\infty}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ (Σχ. 57α)



(α)



(β)

57

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, $\nu\in\mathbb{N}$

ενώ

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$, $\nu\in\mathbb{N}$ (Σχ. 57β).

Επομένως, δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu\in\mathbb{N}$.

Για τα όρια αθροίσματος και γινομένου δύο συναρτήσεων αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0\in\mathbb{R}$						
το όριο της f είναι:	$\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**;**	**;**

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0\in\mathbb{R}$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f\cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**;**	**;**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Στους πίνακες των παραπάνω θεωρημάτων, όπου υπάρχει ερωτηματικό, σημαίνει ότι το όριο (αν υπάρχει) εξαρτάται κάθε φορά από τις συναρτήσεις που παίρνουμε. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι έχουμε **απροσδιόριστη μορφή**. Δηλαδή, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια αθροίσματος και γινομένου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)+(-\infty) \quad \text{και} \quad 0\cdot(\pm\infty).$$

Επειδή $f-g=f+(-g)$ και $\dfrac{f}{g}=f\cdot\dfrac{1}{g}$, απροσδιόριστες μορφές για τα όρια της διαφοράς και του πηλίκου συναρτήσεων είναι οι:

$$(+\infty)-(+\infty),\ (-\infty)-(-\infty) \quad \text{και} \quad \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Για παράδειγμα:

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)=0$$

ενώ,

— αν πάρουμε τις συναρτήσεις $f(x)=-\frac{1}{x^2}+1$ και $g(x)=\frac{1}{x^2}$, τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)=-\infty, \qquad \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}1=1.$$

Ανάλογα παραδείγματα μπορούμε να δώσουμε και για τις άλλες μορφές.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+6}{|x-1|}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-3x+2}{(x-2)^2}$.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}|x-1|=0$ και $|x-1|>0$ κοντά στο 1, είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$.

Επειδή επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+6)=2$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{|x-1|}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{|x-1|}\cdot(x^2-5x+6)\right]=+\infty.$$

ii) Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)^2=0$ και $(x-2)^2>0$ κοντά στο 2, είναι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$. Επειδή επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 2}(-3x+2)=-4$, έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{-3x+2}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{(x-2)^2}\cdot(-3x+2)\right]=-\infty.$$

2. Να βρεθούν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$ στο $x_0=2$ και στη συνέχεια να εξετασθεί, αν υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο 2.

ΛΥΣΗ

— Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ και $x-2>0$ για $x>2$, είναι $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty$.

Επειδή επιπλέον $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-x+1)=3$, έχουμε

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{x-2}(x^2-x+1)\right]=+\infty.$$

— Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ και $x-2<0$ για $x<2$, είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty$.

Επειδή επιπλέον $\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-x+1)=3$, έχουμε

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x+1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{x-2}\cdot(x^2-x+1)\right]=-\infty.$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα. Επομένως δεν υπάρχει όριο της f στο 2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^4+3x^2}$, $x_0=0$ ii) $f(x)=\dfrac{2x-3}{4(x-1)^4}$, $x_0=1$

iii) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{|x|}$, $x_0=0$.

2. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0, όταν:

i) $f(x)=\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{4}{1-x^2}$, $x_0=1$ ii) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x|x|}$, $x_0=0$

iii) $f(x)=x^2\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)$, $x_0=0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$.

2. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ δεν έχει όριο στο $\dfrac{\pi}{2}$.

ii) Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ δεν έχει όριο στο 0.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1} \text{ και } g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}.$$

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ και } \lim_{x\to 0} g(x).$$

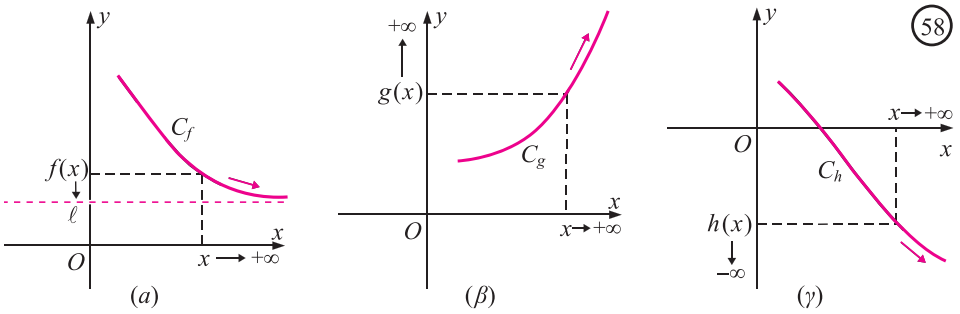
Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα παραπάνω όρια.

4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν:

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{f(x)}=+\infty$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x+2}=-\infty$ iii) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)(3x^2-2)]=+\infty$.

1.7 ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων f, g, h σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$.



Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα με οποιονδήποτε τρόπο,

— το $f(x)$ προσεγγίζει όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό ℓ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f έχει στο $+\infty$ όριο το ℓ και γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

— το $g(x)$ αυξάνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η g έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

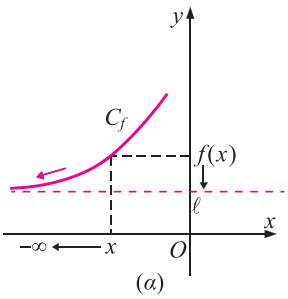
— το $h(x)$ μειώνεται απεριόριστα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η h έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty\,.$$

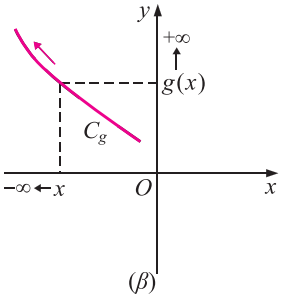
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.
Ανάλογοι ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν, όταν $x \to -\infty$ για μια συνάρτηση που είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$. Έτσι, για τις συναρτήσεις f, g, h των παρακάτω σχημάτων έχουμε:

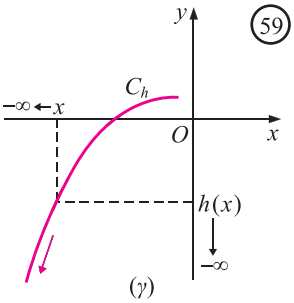
59



(α)



(β)



(γ)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty\,.$

Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0,\ \nu\in\mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{\nu}} = 0,\ \nu\in\mathbb{N}^*.$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty\,,\ \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \ \text{ και } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0\,.$$

Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και

— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Όριο πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης

● Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 1$. Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων για τον υπολογισμό του $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

Για $x \neq 0$ έχουμε

$$f(x) = 2x^3\left(1 - \frac{5}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3}\right).$$

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{5}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^3}\right) = 1 - 0 + 0 - 0 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(2x^3) = +\infty$$

έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty}(2x^3).$$

Γενικά

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}(\alpha_\nu x^\nu) \text{ και } \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha_\nu x^\nu)$$

Για παράδειγμα,

$$\lim_{x\to-\infty}(4x^5 - 3x^3 + 6x^2 - x + 7) = \lim_{x\to-\infty}(4x^5) = -\infty.$$

● Έστω τώρα η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 1}{5x^3 + x - 7}$.

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{3x^2\left(1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right)}{5x^3\left(1 + \frac{1}{5x^2} - \frac{7}{5x^3}\right)} = \frac{3x^2}{5x^3}\cdot\frac{1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}}{1 + \frac{1}{5x^2} - \frac{7}{5x^3}}.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}}{1 + \frac{1}{5x^2} - \frac{7}{5x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{5x^2} - \frac{7}{5x^3}\right)} = 1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{5x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5x}\right)=0$$

έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{5x^3}\right).$$

Γενικά,

Για τη ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\cdots+\beta_1x+\beta_0}$, $\alpha_\nu\neq0, \beta_\kappa\neq0$

ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right) \text{ και } \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)$$

Για παράδειγμα,

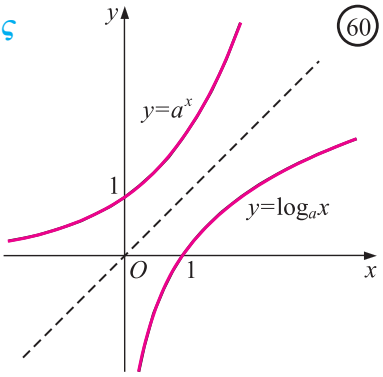
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-6x+1}{3x^2+x-2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^2}{3x^2}\right)=\frac{5}{3}.$$

Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

Αποδεικνύεται[1] ότι:

● Αν $\alpha>1$ (Σχ. 60), τότε

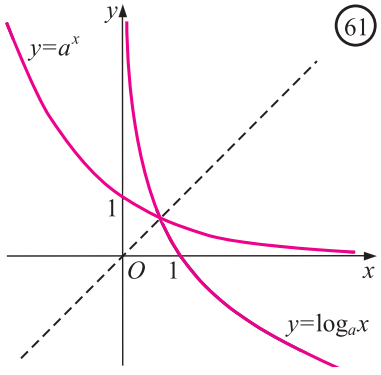
$$\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$$
$$\lim_{x\to0}\log_\alpha x=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=+\infty$$



60

● Αν $0<\alpha<1$ (Σχ. 61), τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\alpha^x=0$$
$$\lim_{x\to0}\log_\alpha x=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\log_\alpha x=-\infty$$



61

[1] Η απόδειξη παραλείπεται.

Πεπερασμένο όριο ακολουθίας

Η έννοια της ακολουθίας είναι γνωστή από προηγούμενες τάξεις. Συγκεκριμένα:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

Η εικόνα $\alpha(\nu)$ της ακολουθίας α συμβολίζεται συνήθως με α_ν, ενώ η ακολουθία α συμβολίζεται με (α_ν). Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}^*$ είναι μια ακολουθία.

Επειδή το πεδίο ορισμού κάθε ακολουθίας, είναι το $\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, 4, ...\}$, έχει νόημα να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της για πολύ μεγάλες τιμές του ν, δηλαδή όταν $\nu \to +\infty$. Ο ορισμός του ορίου ακολουθίας είναι ανάλογος του ορισμού του ορίου συνάρτησης στο $+\infty$ και διατυπώνεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει

$$|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$$

Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων όταν $x \to +\infty$, που μελετήσαμε στα προηγούμενα, ισχύουν και για τις ακολουθίες. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων αυτών μπορούμε να υπολογίζουμε όρια ακολουθιών.

Για παράδειγμα,

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{2\nu^2 - 3\nu + 5}{4\nu^2 + \nu - 1} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{2\nu^2}{4\nu^2} = \frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-10x^3 + 2x - 5)$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} (5x^3 - 2x + 1)$ iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x^3 + 8}$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2}$ v) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{4x^3 - x^2 + 2}$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x + 2}{x^{10} + x + 3}$

vii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{5}{x+2}\right)$ viii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x}-\dfrac{x^2+3}{x+2}\right)$.

2. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+10x+9}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x),\quad \alpha\neq\beta$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$.

3. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2)$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+\mu x)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$.

2. Να προσδιορίσετε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

3. Αν $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x+\beta$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

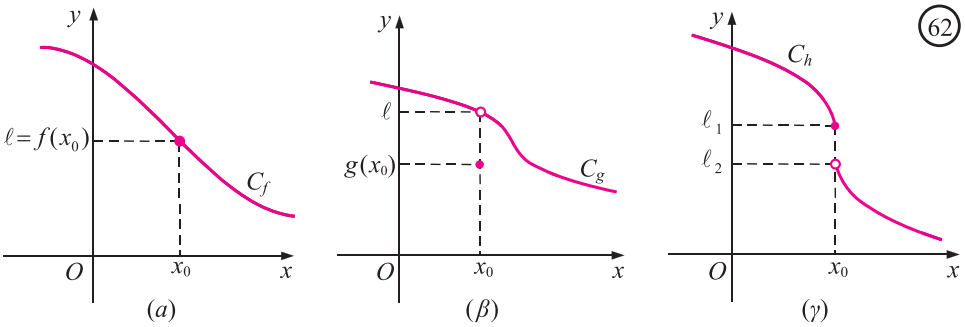
4. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^2-x|}{x-1}$.

1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός της συνέχειας

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στα παρακάτω σχήματα.



62

Παρατηρούμε ότι:

— Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο x_0 και ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

— Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο x_0 αλλά

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \neq g(x_0).$$

— Η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο x_0 αλλά δεν υπάρχει το όριό της.

Από τις τρεις γραφικές παραστάσεις του σχήματος μόνο η γραφική παράσταση της f δε διακόπτεται στο x_0. Είναι, επομένως, φυσικό να ονομάσουμε **συνεχή στο x_0** μόνο τη συνάρτηση f. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0**, όταν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0, αφού

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0).$$

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

β) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

Για παράδειγμα:

— Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{αν} \quad x\le 0 \\ 2-x, & \text{αν} \quad x>0 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 0, αφού

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1, \text{ ενώ } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}(2-x)=2,$$

οπότε δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

— Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν} \quad x\ne 1 \\ 3, & \text{αν} \quad x=1 \end{cases}$ δεν είναι συνεχής στο 1, αφού

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2, \text{ ενώ } f(1)=3.$$

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, απλά, **συνεχής συνάρτηση**.

Για παράδειγμα:

— **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση *P* είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} P(x)=P(x_0).$$

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\dfrac{P}{Q}$ είναι συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— **Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0.$$

Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

— **Οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x$ και $g(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\ne 1$ είναι συνεχείς.**

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Από τον ορισμό της συνέχειας στο x_0 και τις ιδιότητες των ορίων προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f+g,\ c\cdot f,\ \text{όπου}\ c\in\mathbf{R},\ f\cdot g,\ \frac{f}{g},\ |f|\ \text{και}\ \sqrt[\nu]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

Για παράδειγμα:

— Οι συναρτήσεις $\boldsymbol{f(x)=\varepsilon\varphi x}$ και $\boldsymbol{g(x)=\sigma\varphi x}$ είναι **συνεχείς** ως πηλίκα συνεχών συναρτήσεων.

— Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{3x-2}$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$, αφού η συνάρτηση $g(x)=3x-2$ είναι συνεχής.

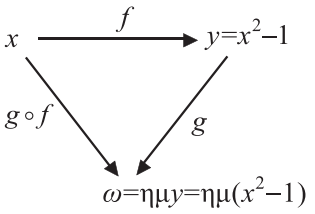
— Η συνάρτηση $f(x)=|x\eta\mu x|$ είναι συνεχής, αφού είναι της μορφής $f(x)=|g(x)|$, όπου $g(x)=x\eta\mu x$ η οποία είναι συνεχής συνάρτηση ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x)=x$ και $f_2(x)=\eta\mu x$.

Τέλος, αποδεικνύεται ότι για τη σύνθεση συνεχών συναρτήσεων ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\varphi(x)=\eta\mu(x^2-1)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=\eta\mu x$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για ποια τιμή του α η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+2\alpha, & \text{αν}\quad x\le 0\\ \dfrac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν}\quad x>0\end{cases}$ **είναι συνεχής;**

ΛΥΣΗ

— Στο διάστημα $(-\infty,0)$ η f έχει τύπο $f(x) = x^2 + 2\alpha$ και επομένως είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η f έχει τύπο $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ και επομένως είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Για να είναι η f συνεχής, αρκεί να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, δηλαδή αρκεί $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Έχουμε όμως:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2 + 2\alpha) = 2\alpha,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ και}$$

$$f(0) = 2\alpha.$$

Επομένως, αρκεί $2\alpha = 1$ ή, ισοδύναμα, $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα και βασικά θεωρήματα

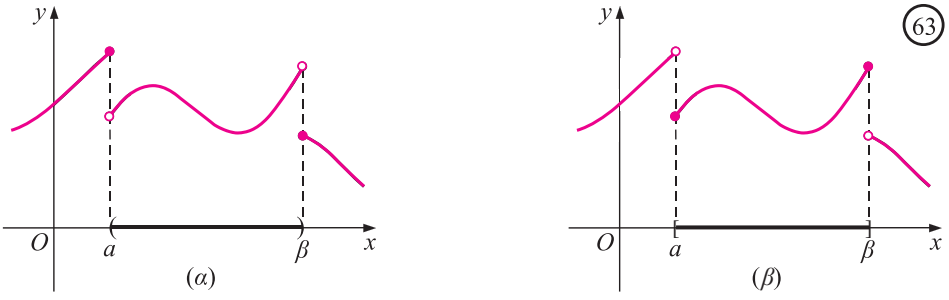
Πολλά από τα θεωρήματα της Ανάλυσης αναφέρονται σε συναρτήσεις οι οποίες είναι συνεχείς σε διαστήματα του πεδίου ορισμού τους. Είναι, επομένως, απαραίτητο να γνωρίζουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα.

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β). (Σχ. 63α)
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha) \text{ και } \lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta) \text{ (Σχ. 63β)}$$

63

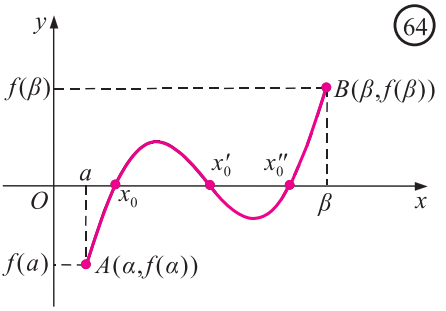


Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$.

Δυο βασικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων σε διαστήματα εκφράζονται από τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα του Bolzano

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

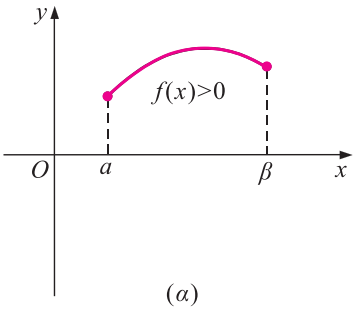
$$f(x_0) = 0.$$

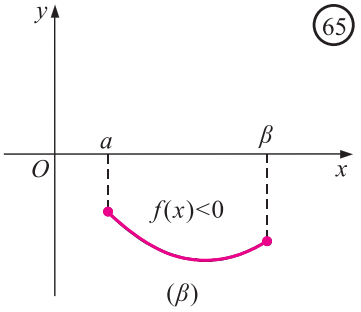
Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β).

ΣΧΟΛΙΟ

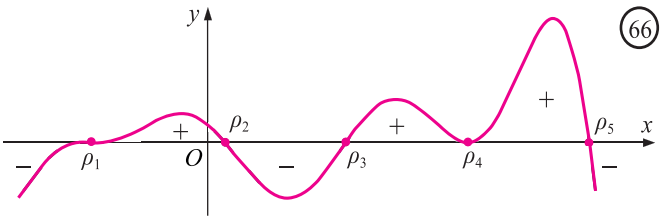
Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. (Σχ. 65)





— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.



Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του προσήμου της f για τις διάφορες τιμές του x. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.

β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης

$$f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x,\ x \in [0, 2\pi].$$

Αρχικά υπολογίζουμε τις ρίζες της $f(x) = 0$ στο $[0, 2\pi]$. Έχουμε

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{4}.$$

Έτσι οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ και } \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right].$$

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του προσήμου της f σε κάθε διάστημα.

Διάστημα	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
$f(x_0)$	–1	1	–1
Πρόσημο	–	+	–

Επομένως, στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ είναι $f(x) < 0$, ενώ στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ είναι $f(x) > 0$.

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Bolzano και είναι γνωστό ως θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

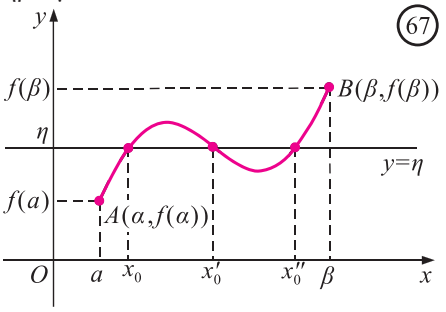
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$,

αφού
$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και
$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■

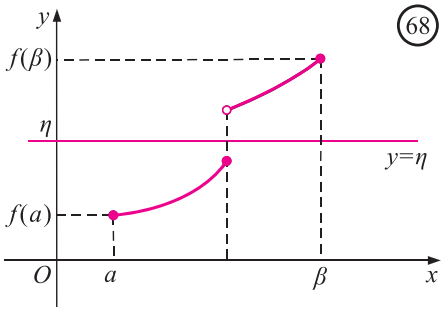
67



ΣΧΟΛΙΟ

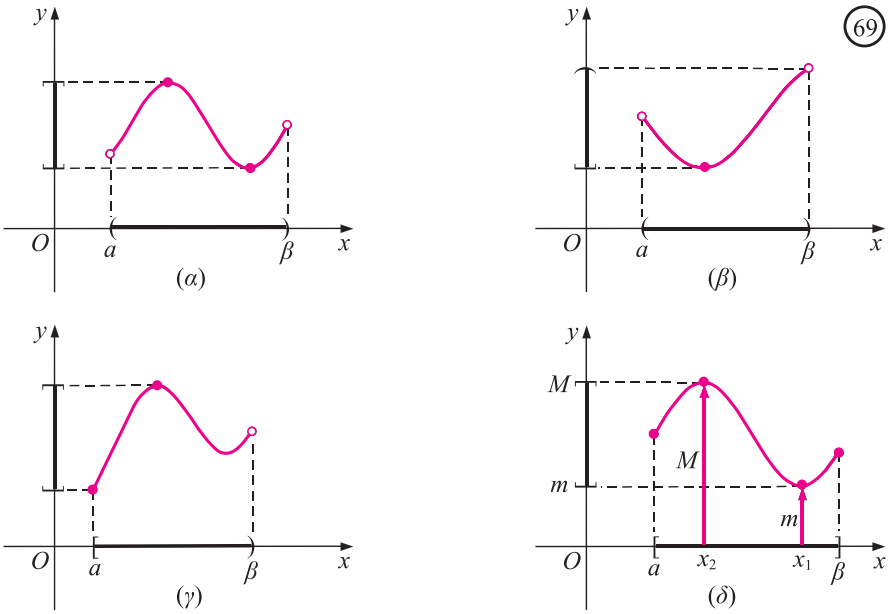
Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

68



- Με τη βοήθεια του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται ότι:

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.



Στην ειδική περίπτωση που το Δ είναι ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής)

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m. (Σχ. 69δ)

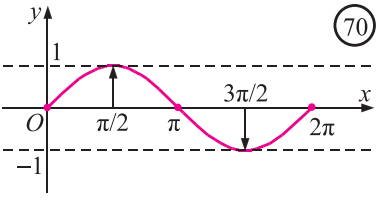
Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\boldsymbol{m \le f(x) \le M}, \textbf{ για κάθε } \boldsymbol{x \in [\alpha, \beta]}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα **$[m, M]$**, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, 2\pi]$ έχει σύνολο τιμών το $[-1, 1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0, 2\pi]$ με $m = -1$ και $M = 1$.

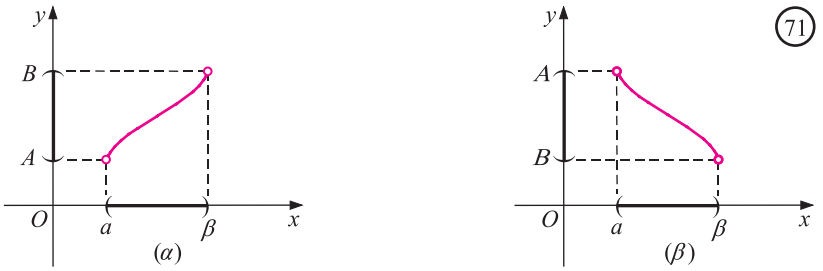


- Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) (Σχ. 71α), όπου

$$A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x) \quad \text{και} \quad B = \lim_{x \to \beta^-} f(x).$$

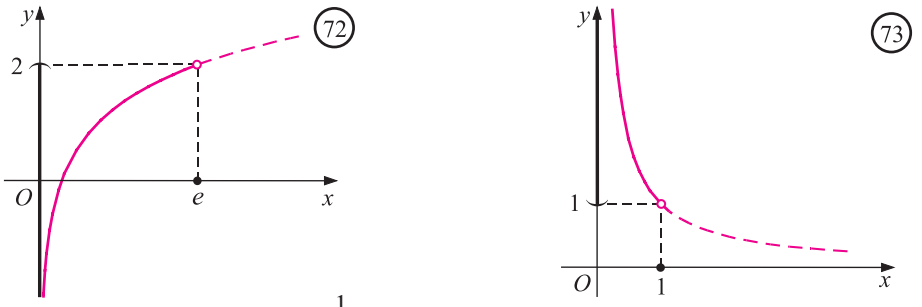
Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) (Σχ. 71β).



Για παράδειγμα,

— Το σύνολο τιμών της $f(x) = \ln x + 1$, $x \in (0, e)$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση (Σχ. 72), είναι το διάστημα $(-\infty, 2)$, αφού

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \to e^-} f(x) = 2.$$



— Το σύνολο τιμών της $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0,1)$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση, (Σχ. 73) είναι το διάστημα $(1, +\infty)$, αφού

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και όταν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε διαστήματα της μορφής $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ και $(\alpha, \beta]$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x + \text{συν}x = 4$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x + \text{συν}x - 4$, $x \in [\pi, 2\pi]$. Τότε:

- Η f είναι συνεχής στο $[\pi, 2\pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- Είναι $f(\pi)\cdot f(2\pi) < 0$, αφού

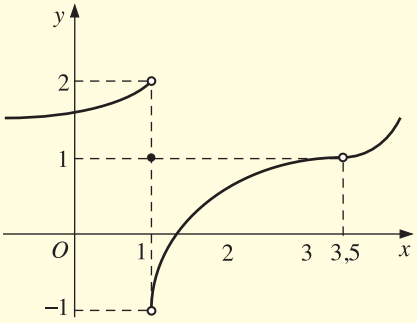
$f(\pi) = \pi + \text{συν}\pi - 4 = \pi - 5 < 0$ και $f(2\pi) = 2\pi + \text{συν}2\pi - 4 = 2\pi - 3 > 0$.

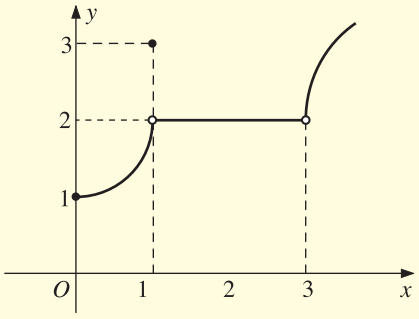
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\pi, 2\pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, οπότε $x_0 + \text{συν}x_0 - 4 = 0$ και συνεπώς $x_0 + \text{συν}x_0 = 4$. Άρα, η εξίσωση $x + \text{συν}x = 4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων. Να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές δεν είναι συνεχείς.





2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4, & x < 2 \\ x^3, & x \geq 2 \end{cases}$, αν $x_0 = 2$

ii) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1\\ \sqrt{3+x}, & x\geq 1\end{cases}$, αν $x_0=1$

iii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}, & x\neq -2\\ -3 \quad , & x=-2\end{cases}$, αν $x_0=-2$.

3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις και μετά να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση, αν

i) $f(x)=\begin{cases}2x^2, & |x|\leq 1\\ \dfrac{2}{x} \quad , & |x|>1\end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2} \quad , & x\neq 2\\ 5 \quad , & x=2\end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases}x \quad , & x<1\\ \ln x \quad , & x\geq 1\end{cases}$ iv) $f(x)=\begin{cases}e^x \quad , & x\leq 0\\ -x^2+1 \quad , & x>0\end{cases}$.

4. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις

i) $f(x)=\begin{cases}2x^2-3 \quad , & x\leq 1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} \quad , & x>1\end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x} \quad , & x<0\\ \sigma\upsilon\nu x \quad , & x\geq 0\end{cases}$.

5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

i) $f(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)$ ii) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$

iii) $f(x)=\eta\mu\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ iv) $f(x)=e^{\eta\mu x}$

v) $f(x)=\ln(\ln x)$

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x - x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.

7. Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις f, να βρείτε έναν ακέραιο α τέτοιον, ώστε στο διάστημα $(\alpha, \alpha+1)$ η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

i) $f(x)=x^3+x-1$ ii) $f(x)=x^5+2x+1$

iii) $f(x)=x^4+2x-4$ iv) $f(x)=-x^3+x+2$.

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\alpha(x-\mu)(x-\nu)+\beta(x-\lambda)(x-\nu)+\gamma(x-\lambda)(x-\mu)=0,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$, έχει δυο ρίζες άνισες, μια στο διάστημα (λ, μ) και μια στο (μ, ν).

9. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x (όπου η f ορίζεται), όταν:

i) $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ ii) $f(x)=x^4-9x^2$

iii) $f(x)=\varepsilon\varphi x-\sqrt{3},\ x\in(-\pi,\pi)$ iv) $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[0,2\pi]$.

10. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

i) $f(x)=\ln x-1,\ x\in[1,e]$ ii) $f(x)=-x+2,\ x\in(0,2)$

iii) $f(x)=2\eta\mu x+1,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ iv) $f(x)=e^x+1,\ x\in(-\infty,0]$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $f(x)=\begin{cases}(x-\kappa)(x+\kappa) & , \quad x\le 2\\ \kappa x+5 & , \quad x>2\end{cases}$, να προσδιορίσετε το κ, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

2. Αν $f(x)=\begin{cases}\alpha^2x^2+\beta x-12 & , \quad x<1\\ 5 & , \quad x=1\\ \alpha x+\beta & , \quad x>1\end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

3. i) Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$. Να βρείτε το $f(0)$, αν για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει

$$xf(x)=\sigma\upsilon\nu x-1.$$

ii) Ομοίως, να βρείτε το $g(0)$ για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0=0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$|xg(x)-\eta\mu x|\le x^2.$$

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ και πληρούν τις σχέσεις $f(0)<g(0)$ και $f(1)>g(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

5. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^4+1}{x-1}+\dfrac{x^6+1}{x-2}=0$ β) $\dfrac{e^x}{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-2}=0$

έχουν μια, τουλάχιστον, ρίζα στο (1, 2).

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο

i) $f(x)=e^x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$ ii) $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$

7. i) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1,1]$, για την οποία ισχύει

$$x^2+f^2(x)=1 \text{ για κάθε } x\in[-1,1].$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

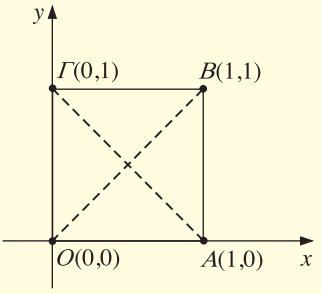
β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1,1)$.

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

ii) Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x)=x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

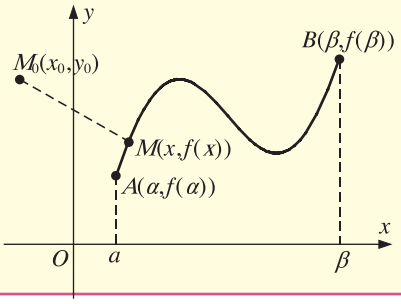
8. Δίνεται το τετράγωνο $OAB\Gamma$ του διπλανού σχήματος και μία συνεχής στο $[0, 1]$ συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο αυτό.



i) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του τετραγώνου και

ii) Να αποδείξετε με το θεώρημα του Bolzano ότι η C_f τέμνει και τις δύο διαγώνιες.

9. Στο διπλανό σχήμα η καμπύλη C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και το $M_0(x_0, y_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου,



i) Να βρείτε τον τύπο της απόστασης $d(x) = (M_0M)$ του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από το σημείο $M(x, f(x))$ της C_f για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και στη συνέχεια ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

α) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^*$ Α Ψ

β) $(f \circ g)(x) = -x,\ x \in \mathbb{R}$ Α Ψ

2. Αν $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{x-1} = l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$. Α Ψ

3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2+x} = 0 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2+x} = 0$. Α Ψ

4. Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0} f(x) > 1$. Α Ψ

5. Ισχύει: α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right) = 1$ Α Ψ

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$. Α Ψ

6. Αν $0 \le f(x) \le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 f(x)) = 0$. Α Ψ

7. Αν $f(x) \le \dfrac{1}{x^2}$, $x \in (\alpha, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Α Ψ

8. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 6}(f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6)\cdot g(6)$. Α Ψ

9. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -1$. Α Ψ

10. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. Α Ψ

11. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x \ne 4$ ισχύει $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$, τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1. Α Ψ

12. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 4, f(1) = 3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \pi$. Α Ψ

ΙΙ.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = m$, $l, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0, τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

Α) $l < m$ Β) $l \le m$ Γ) $l \ge m$ Δ) $l = m$ Ε) $m < l$.

2. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με:

Α) 8 Β) 1 Γ) 0 Δ) $+\infty$ Ε) -8.

3. Το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|x^3 - x^2 - 1| - x^3 + x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

Α) $+\infty$ Β) $-\infty$ Γ) 1 Δ) -1 Ε) 0.

4. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε:

Α) $x_0=0$ Β) $x_0=2$ Γ) $x_0=-1$ Δ) $x_0=1$.

III.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+1 \text{ και } g(x)=\frac{1}{x^2-1}.$$

Από τους Παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

Α) η g είναι συνεχής στο 2

Β) η f είναι συνεχής στο 1

Γ) η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

2. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ Β) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20}-x-1}$

Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$ Δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$

Ε) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x^3+x+1)]$ ΣΤ) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x^3+x-1)]$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta=[0,3]$, με $f(0)=2,\ f(1)=1$ και $f(3)=-1$.

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

Α) Υπάρχει $x_0\in(0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

Β) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-1$.

Γ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

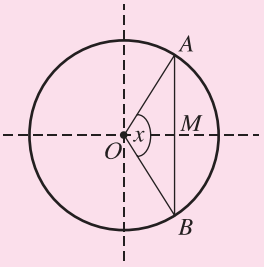
Δ) $[-1,2]\subseteq f(\Delta)$.

Ε) Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια της συνάρτησης

Η έννοια της συνάρτησης, ως έκφραση μιας εξάρτησης ανάμεσα σε δύο συγκεκριμένες ποσότητες, εμφανίζεται μ' έναν υπονοούμενο τρόπο ήδη από την αρχαιότητα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι πίνακες χορδών της "Αλμαγέστης", του Έλληνα μαθηματικού και αστρονόμου της αλεξανδρινής περιόδου Κλαύδιου Πτολεμαίου. Στη μια στήλη αυτών των πινάκων υπάρχουν τα μήκη των τόξων ενός κύκλου και στην άλλη τα μήκη των αντίστοιχων χορδών. Χρησιμοποιώντας την έννοια του ημιτόνου στον μοναδιαίο κύκλο μπορούμε να εκφράσουμε αναλυτικά τη "συνάρτηση" των πινάκων του Πτολεμαίου ως εξής:

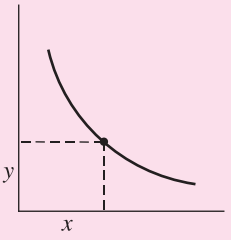


χορδή τόξου $(x) = AB = 2AM = 2\,\eta\mu\dfrac{x}{2}$.

Με τον ίδιο υπονοούμενο τρόπο η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται στους λογαριθμικούς πίνακες που κατασκευάστηκαν στις αρχές του 170υ αιώνα.

Τα γεγονότα που έδωσαν αποφασιστική ώθηση στην ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης ήταν η δημιουργία της Άλγεβρας (χρήση γραμμάτων και ειδικών συμβόλων για την αναπαράσταση μαθηματικών πράξεων, σχέσεων, αγνώστων κ.λπ.) και της αναλυτικής γεωμετρίας (χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού σε γεωμετρικά προβλήματα). Ο Descartes, στο έργο του "La Geometrie" (1637), παρουσιάζοντας τη μέθοδο προσδιορισμού μιας καμπύλης από μια εξίσωση ως προς x και y (τα οποία εκφράζουν τα ευθύγραμμα τμήματα-συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης), περιέγραψε για πρώτη φορά τη δυνατότητα αναλυτικής αναπαράστασης μιας σχέσης εξάρτησης ανάμεσα σε μεταβλητές ποσότητες:

"Αν λοιπόν πάρουμε διαδοχικά ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών τιμών για το τμήμα y τότε θα προκύψει ένα άπειρο πλήθος τιμών για το τμήμα x και επομένως μια απειρία διαφορετικών σημείων, με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να σχεδιαστεί η ζητούμενη καμπύλη".



Ο όρος "συνάρτηση" (από το λατινικό ρήμα fungor, που σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ) εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 1673 σ' ένα χειρόγραφο του Leibniz με τίτλο "Η αντίστροφη μέθοδος των εφαπτομένων ή περί συναρτήσεων" (Methodus tangentium inversa, seu de functionibus), στο οποίο εξετάζεται ο υπολογισμός των τεταγμένων y των σημείων μιας καμπύλης όταν είναι γνωστή κάποια ιδιότητα των

αντίστοιχων εφαπτομένων. Ο όρος αυτός άρχισε να αποκτά από εκείνη την εποχή μια ιδιαίτερη σημασία για την αναπαράσταση ποσοτήτων που εξαρτώνται από άλλες μεταβλητές ποσότητες, ιδιαίτερα όταν η εξάρτηση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή μιας αναλυτικής έκφρασης. Ο J. Bernoulli έδωσε το 1718 τον επόμενο γενικό ορισμό:

"Ονομάζω συνάρτηση ενός μεταβλητού μεγέθους μια ποσότητα που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές".

Η αντίληψη της συνάρτησης ως "αναλυτικής έκφρασης" κυριάρχησε για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, στη διάρκεια του οποίου η μαθηματική ανάλυση ορίζονταν ως η γενική επιστήμη των μεταβλητών και των συναρτήσεών τους. Ο επόμενος ορισμός, που ταυτίζει την έννοια της συνάρτησης με αυτήν της "αναλυτικής έκφρασης", δόθηκε από τον L. Euler το 1748, στο έργο του "Εισαγωγή στην απειροστική ανάλυση".

*"Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας ονομάζεται μια αναλυτική έκφρ*αση *που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτή τη μεταβλητή ποσότητα και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες*".

Η παραπέρα εξέλιξη της έννοιας της συνάρτησης προήλθε κυρίως από την προσπάθεια μαθηματικής ερμηνείας φυσικών προβλημάτων, όπως π.χ. το πρόβλημα μιας παλλόμενης χορδής, στερεωμένης στα δυο άκρα της. Σ' αυτό το πρόβλημα, που απασχόλησε ιδιαίτερα τους επιστήμονες στη διάρκεια του 18ου αιώνα, ζητείται να προσδιοριστεί μια συνάρτηση της μορφής $y = f(x, t)$ που περιγράφει το σχήμα της χορδής σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t. Το είδος όμως των συναρτήσεων που υπεισέρχονται σ' αυτό το ζήτημα είναι τόσο γενικό, που ανάγκασε τους μαθηματικούς να αναθεωρήσουν την καθιερωμένη αντίληψη ότι κάθε συνάρτηση ταυτίζεται με μια αναλυτική έκφραση και να αναζητήσουν γενικότερους ορισμούς. Ο L. Euler, ήδη από το 1755 διατύπωσε ένα τέτοιο ορισμό, απαλλαγμένο από την άμεση αναφορά στην έννοια της "αναλυτικής έκφρασης".

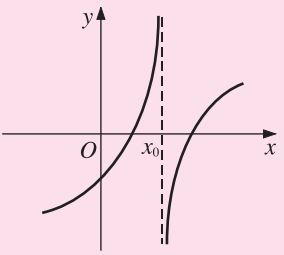
"Αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται από άλλες ποσότητες με τέτοιο τρόπο ώστε, όταν οι τελευταίες αλλάζουν συμβαίνει το ίδιο και με τις πρώτες, τότε οι πρώτες ονομάζονται συναρτήσεις των τελευταίων. Αυτός ο ορισμός είναι πολύ ευρύς και περιλαμβάνει κάθε μέθοδο με την οποία μια ποσότητα θα μπορούσε να προσδιοριστεί από άλλες. Αν λοιπόν το x υποδηλώνει μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το x με οποιοδήποτε τρόπο ή προσδιορίζονται από αυτό, ονομάζονται συναρτήσεις του x".

Οι νέες αυτές αντιλήψεις οδήγησαν βαθμιαία στην έννοια της συνάρτησης ως αυθαίρετης αντιστοιχίας ανάμεσα στα στοιχεία δυο συνόλων, που δεν ακολουθεί υποχρεωτικά κάποιο "νόμο". Ο J. Fourier, το 1822, επισήμανε ρητά αυτό το σημείο με την εξής παρατήρηση: *"Γενικά, η συνάρ*τηση $f(x)$ *παριστάνει μια διαδοχή τιμών*

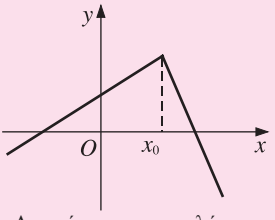
ή τεταγμένων, καθεμιά από τις οποίες είναι αυθαίρετη. Αν δοθεί μια απειρία τιμών στην τετμημένη x, θα υπάρχουν ίσου πλήθους τεταγμένες f(x). Όλες έχουν πραγματικές αριθμητικές τιμές, θετικές ή αρνητικές ή μηδέν. Δεν προϋποθέτουμε ότι αυτές οι τεταγμένες υπόκεινται σ' ένα κοινό νόμο· διαδέχονται η μια την άλλη με οποιοδήποτε τρόπο και καθεμιά από αυτές δίνεται σαν να ήταν μια μοναδική ποσότητα".

Η έννοια της συνέχειας

Την περίοδο που η έννοια της συνάρτησης ταυτίζονταν με αυτήν της "αναλυτικής έκφρασης", υπήρχαν δυο διαφορετικές αντιλήψεις για την έννοια της συνέχειας. Η μία από αυτές, με καθαρά γεωμετρική προέλευση, εξέφραζε την ιδιότητα μιας καμπύλης να μη παρουσιάζει "διακοπές"· η άλλη, με προέλευση κυρίως από τη φυσική, εξέφραζε την ιδιότητα ενός φαινομένου να ακολουθεί τον ίδιο "νόμο", την ιδιότητα μιας συνάρτησης να διατηρεί την ίδια αναλυτική έκφραση σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Σ' αυτήν την τελευταία αντίληψη περί συνέχειας άσκησε έντονη κριτική ο A. L. Cauchy το 1844, σημειώνοντας τα εξής: *"Στα έργα των Euler και Lagrange, μια συνάρτηση ονομάζεται συνεχής ή ασυνεχής ανάλογα με το αν οι διαφορετικές τιμές αυτής της συνάρτησης υπόκεινται ή όχι στον ίδιο νόμο, προκύπτουν ή όχι από μια μοναδική εξίσωση. Όμως αυτός ο ορισμός πολύ απέχει από το να θεωρηθεί μαθηματικά ακριβής· γιατί αν οι διαφορετικές τιμές μιας συνάρτησης εξαρτώνται από δυο ή περισσότερες διαφορετικές εξισώσεις, τίποτα δεν μας εμποδίζει να μειώσουμε τον αριθμό αυτών των εξισώσεων ή ακόμη και να τις αντικαταστήσουμε από μια απλή εξίσωση, της οποίας η ανάλυση θα μας έδινε όλες τις υπόλοιπες. Επομένως, αν κανείς θεωρήσει τον ορισμό των Euler και Langrange εφαρμόσιμο σε όλα τα είδη των συναρτήσεων, τότε μια απλή αλλαγή του συμβολισμού είναι συχνά αρκετή για να μετασχηματίσει μια συνεχή συνάρτηση σε ασυνεχή και αντίστροφα. Έτσι π.χ., αν το x συμβολίζει μια πραγματική μεταβλητή, τότε η συνάρτηση που ισούται με + x ή – x, ανάλογα με το αν η μεταβλητή x είναι θετική ή αρνητική, πρέπει για το λόγο αυτό να τοποθετηθεί στην κλάση των ασυνεχών συναρτήσεων· όμως η ίδια συνάρτηση θα μπορούσε να θεωρηθεί ως συνεχής όταν γραφεί στη μορφή* $\sqrt{x^2}$ [(1)].



Ασυνέχεια στο x_0 λόγω διακοπής της καμπύλης σ' αυτό το σημείο



Ασυνέχεια στο x_0 λόγω μεταβολής της αναλυτικής έκφρασης σ' αυτό το σημείο

(1) Είναι φανερό ότι ο Cauchy χρησιμοποιεί εδώ, χωρίς να την ονομάζει, τη συνάρτηση απόλυτη τιμή.

Έτσι, ο χαρακτήρας της συνέχειας των συναρτήσεων, θεωρούμενος από το σημείο όπου οι γεωμέτρες σταμάτησαν για πρώτη φορά, είναι ασαφής και αβέβαιος. Η αβεβαιότητα όμως θα εξαφανιστεί, αν στη θέση του ορισμού του Euler αντικαταστήσουμε αυτόν που έχω δώσει στο κεφάλαιο ΙΙ του έργου μου "Αλγεβρική ανάλυση" …".

Ο ορισμός, στον οποίο αναφέρεται εδώ ο Cauchy, αποτελεί ουσιαστικά την πρώτη απόπειρα μελέτης της έννοιας της συνέχειας με λογική αυστηρότητα. Αποσυνδέοντας αυτήν την έννοια από κάθε γεωμετρική εποπτεία και εξάρτηση από την έννοια της "αναλυτικής έκφρασης", τη μετασχημάτισε σε μια καθαρά αριθμητική ιδιότητα των συναρτήσεων, που μπορεί να γίνει αντικείμενο λογισμού. Ο ορισμός αυτός του Cauchy, που δόθηκε το 1821, έχει ως εξής: (έναν παρόμοιο ορισμό είχε δώσει και ο B. Bolzano το 1817).

"Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση της μεταβλητής x και ας υποθέσουμε ότι για κάθε τιμή του x σ' ένα δοσμένο διάστημα η συνάρτηση αυτή έχει πάντοτε μια μοναδική και πεπερασμένη τιμή. Αν δώσουμε στην μεταβλητή x μια απειροελάχιστη αύξηση α, η συνάρτηση θα αυξηθεί κατά τη διαφορά $f(x+\alpha)-f(x)$, η οποία εξαρτάται από τη νέα μεταβλητή α και την τιμή που είχε το x. Σ' αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $f(x)$ θα ονομάζεται **συνεχής** *στο διάστημα της μεταβλητής x, αν για κάθε τιμή του x σ' αυτό το διάστημα, η απόλυτη τιμή της διαφοράς $f(x+\alpha)-f(x)$ μικραίνει επ' άπειρον μαζί μ' αυτήν του α. Με άλλα λόγια, η $f(x)$ θα παραμένει συνεχής ως προς x, αν μια απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει πάντοτε μια απειροελάχιστη αύξηση της ίδιας της συνάρτησης".*

Η έννοια του ορίου

Η έννοια της συνέχειας καθώς και ορισμένες άλλες βασικές έννοιες της ανάλυσης που θα γνωρίσουμε στα επόμενα κεφάλαια (όπως π.χ. η παράγωγος και το ολοκλήρωμα) περιείχαν, στα πρώτα στάδια της εξέλιξής τους, ορισμένες ασάφειες, που οφείλονταν κυρίως στην αδυναμία των μαθηματικών να διαπραγματευθούν με λογική αυστηρότητα την έννοια του απείρως μικρού και του απείρως μεγάλου. Αυτή η αδυναμία οδηγούσε πολλούς να αμφισβητούν τα θεμέλια πάνω στα οποία στηρίζονταν το οικοδόμημα της μαθηματικής ανάλυσης και να συνδέουν τα εντυπωσιακά αποτελέσματά της με ορισμένες μεταφυσικές ερμηνείες.

Οι μαθηματικοί προσπάθησαν να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες εισάγοντας την ιδέα του ορίου, με την οποία, αρχικά, εκφράζονταν η δυνατότητα μιας μεταβαλλόμενης ποσότητας να προσεγγίζει επ' άπειρον μια σταθερή ποσότητα χωρίς στην πραγματικότητα να τη φτάνει ποτέ. Ο d' Alembert όρισε το 1765 αυτήν την έννοια στην "Εγκυκλοπαίδεια" του Diderot ως εξής:

"Ένα μέγεθος ονομάζεται ***όριο*** *ενός άλλου όταν το δεύτερο μπορεί να προσεγγίζει το*

πρώτο σε μια απόσταση οσοδήποτε μικρή, αν και ένα μέγεθος δεν μπορεί να ξεπερνά ποτέ το μέγεθος που προσεγγίζει· έτσι ώστε η διαφορά μιας τέτοιας ποσότητας από το όριό της να είναι εντελώς αμελητέα".

Σύμφωνα λοιπόν μ' αυτόν τον ορισμό, που περικλείει την έννοια της κίνησης ως μια διαδικασία προσέγγισης, ο αριθμός 2 είναι το όριο της ακολουθίας 1,9 1,99 1,999 1,9999 …, αλλά όχι όριο ακολουθίας 1,9 1,99 2 2 … (γιατί αυτή "φτάνει" το 2), ούτε όριο της ακολουθίας 1,9 2,01 1,9999 2,0001 … (γιατί αυτή ξεπερνά το 2). Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν την έννοια αυτή του ορίου φαίνεται χαρακτηριστικά στο επόμενο παράδειγμα, στο οποίο ο S.F. Lacroix αποδεικνύει το 1810 ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x}{x+\alpha}=\alpha$:

"Έστω ότι δίνεται η συνάρτηση $\dfrac{\alpha x}{x+\alpha}$*, στην οποία υποθέτουμε ότι το x αυξάνεται θετικά χωρίς τέλος. Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το x, βρίσκουμε* $\dfrac{\alpha}{1+\dfrac{\alpha}{x}}$*, ένα αποτέλεσμα που δείχνει καθαρά ότι η συνάρτηση θα παραμένει πάντοτε μικρότερη από το α αλλά θα προσεγγίζει συνέχεια αυτήν την τιμή, αφού το μέρος* $\dfrac{\alpha}{x}$ *του παρονομαστή μειώνεται όλο και περισσότερο και μπορεί να μειωθεί όσο θέλουμε. Η διαφορά ανάμεσα στο δοσμένο κλάσμα και την τιμή α εκφράζεται ως*

$$\alpha-\frac{\alpha x}{x+\alpha}=\frac{\alpha^2}{x+\alpha}$$

και επομένως γίνεται ολοένα και πιο μικρή, όσο το x γίνεται μεγαλύτερο, και μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε ποσότητα, οσοδήποτε μικρή. Συνεπώς, το δοσμένο κλάσμα μπορεί να προσεγγίζει το α όσο κοντά θέλουμε: άρα το α είναι το όριο της συνάρτησης $\dfrac{\alpha x}{x+\alpha}$ *ως προς την αόριστη αύξηση του x*".

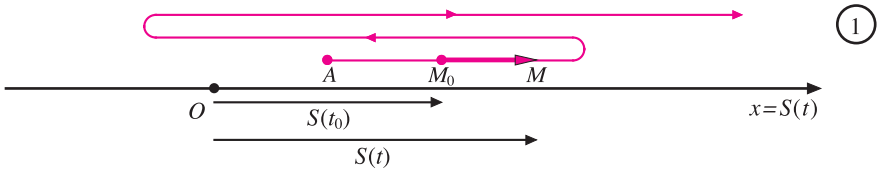
Για να τυποποιήσουμε αυτήν την μακροσκελή διαδικασία, οι μαθηματικοί προσπάθησαν να αποσυνδέσουν την έννοια του ορίου από την έννοια της κίνησης και να την ορίσουν με καθαρά αριθμητικούς όρους, έτσι ώστε να γίνει ένα αντικείμενο μαθηματικού λογισμού. Το αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας υπήρξε ο σημερινός "στατικός" ορισμός με τη βοήθεια των ανισοτήτων και της απόλυσης τιμής, που διατυπώθηκε από τον Weierstrass στα μέσα του 19ου αιώνα. Με αυτόν τον ορισμό, η έννοια του ορίου απογυμνώθηκε από κάθε στοιχείο εποπτείας αλλά έγινε έτσι δυνατό να αποδειχθούν με λογική αυστηρότητα οι ιδιότητες των ορίων και να τυποποιηθεί η διαδικασία υπολογισμού τους.

2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Στιγμιαία ταχύτητα

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t.



Η συνάρτηση S καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t και ονομάζεται **συνάρτηση θέσης** του κινητού.

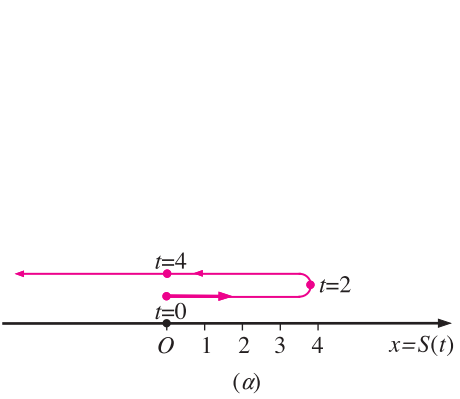
Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι κάποια χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στη θέση M_0 και ότι μετά από παρέλευση χρόνου h, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_0 + h$, βρίσκεται στη θέση M. (Σχ. 1). Στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t η μετατόπιση του κινητού είναι ίση με $S(t) - S(t_0)$. Άρα, **η μέση ταχύτητα** του κινητού σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι

$$\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}.$$

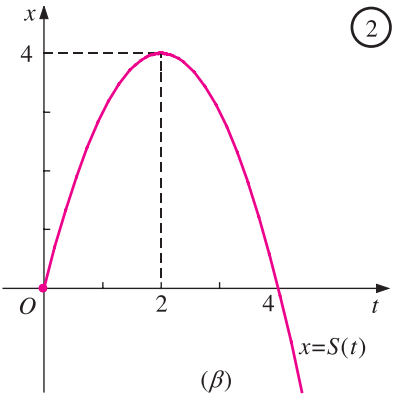
Όσο το t είναι πλησιέστερα στο t_0, τόσο η μέση ταχύτητα του κινητού δίνει με καλύτερη προσέγγιση το *ρυθμό αλλαγής* της θέσης του κινητού κοντά στο t_0. Για το λόγο αυτό το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0, το ονομάζουμε **στιγμιαία ταχύτητα** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $\upsilon(t_0)$. Δηλαδή:

$$\upsilon(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}.$$

Για παράδειγμα, αν $S(t) = -t^2 + 4t$ είναι η συνάρτηση θέσης ενός κινητού (Σχ.2β),



(α)



(β)

2

τότε η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού κατά τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1$, $t_2 = 2$ και $t_3 = 3$ είναι αντιστοίχως:

- $\upsilon(1) = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{S(t)-S(1)}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{-t^2+4t-3}{t-1} = \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{-(t-1)(t-3)}{t-1} = 2$

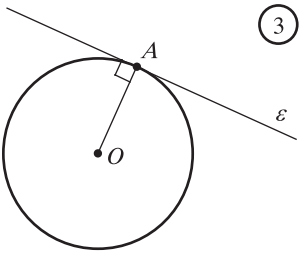
- $\upsilon(2) = \lim\limits_{t\to 2}\dfrac{S(t)-S(2)}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2}\dfrac{-t^2+4t-4}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2}\dfrac{-(t-2)(t-2)}{t-2} = 0$

- $\upsilon(3) = \lim\limits_{t\to 3}\dfrac{S(t)-S(3)}{t-3} = \lim\limits_{t\to 3}\dfrac{-t^2+4t-3}{t-3} = \lim\limits_{t\to 3}\dfrac{-(t-1)(t-3)}{t-3} = -2.$

ΣΧΟΛΙΟ

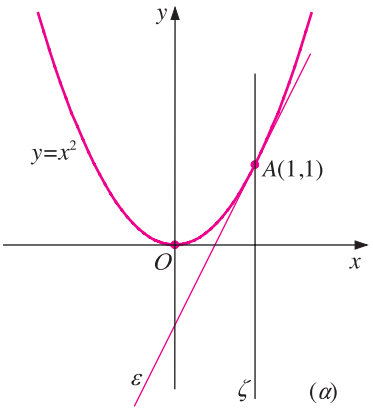
Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} > 0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0) \geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} < 0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0) \leq 0$.

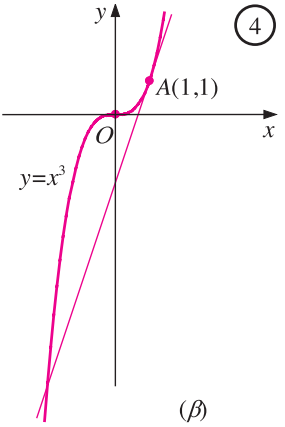
Πρόβλημα εφαπτομένης



3

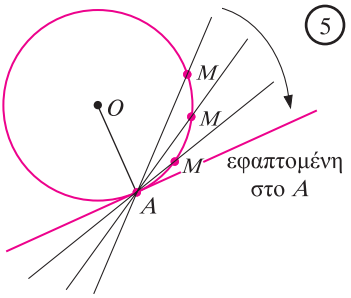
Είναι γνωστό από την Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι εφαπτομένη ενός κύκλου σε ένα σημείο του A ονομάζουμε την ευθεία η οποία έχει με τον κύκλο ένα μόνο κοινό σημείο, το A. Ο ορισμός αυτός δεν μπορεί να γενικευτεί για οποιαδήποτε καμπύλη, γιατί, με έναν τέτοιο ορισμό η παραβολή $y = x^2$ θα είχε στο σημείο $A(1, 1)$ δύο εφαπτόμενες ε και ζ (Σχ. 4α), ενώ η $y = x^3$ δεν θα είχε στο σημείο $A(1,1)$ καμία εφαπτομένη (Σχ. 4β).



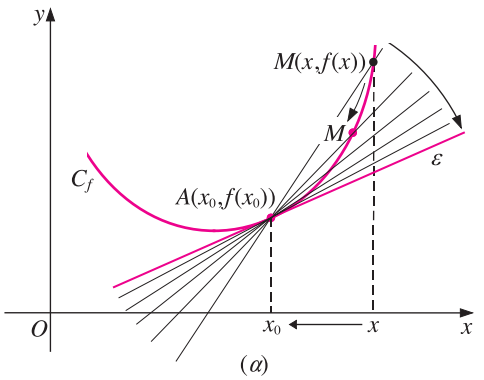


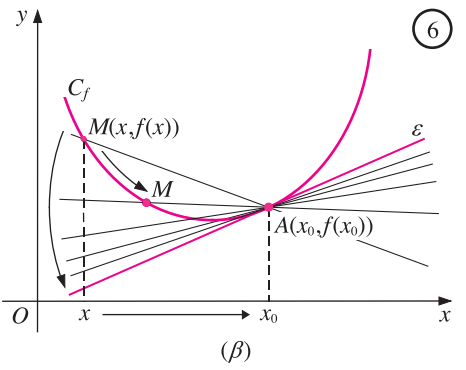
Επομένως, πρέπει να αναζητήσουμε έναν άλλον ορισμό της εφαπτομένης του κύκλου, ο οποίος να μπορεί να γενικευτεί για όλες τις καμπύλες.

Θεωρούμε, λοιπόν, ένα άλλο σημείο M του κύκλου (Σχ. 5). Τα σημεία A, M ορίζουν μια τέμνουσα του κύκλου, την ευθεία AM. Καθώς το σημείο M, κινούμενο πάνω στον κύκλο πλησιάζει στο A, η τέμνουσα AM φαίνεται να έχει ως "οριακή θέση" την εφαπτομένη του κύκλου στο A.
Τη διαπίστωση αυτή θα δούμε, τώρα, πως μπορούμε να την αξιοποιήσουμε για να ορίσουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της.



● Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.





Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο Μ$(x, f(x))$, $x \neq x_0$, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία AM που ορίζουν τα σημεία A και M, παρατηρούμε ότι:

Καθώς το x τείνει στο x_0 με $x > x_0$, η τέμνουσα AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε (Σχ. 6α). Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το x τείνει στο x_0 με $x < x_0$ (Σχ. 6β). Την οριακή θέση της AM θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A. Επειδή η κλίση της τέμνουσας AM είναι ίση με $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, είναι λογικό να αναμένουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα έχει κλίση το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Έτσι δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ.

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)},$$

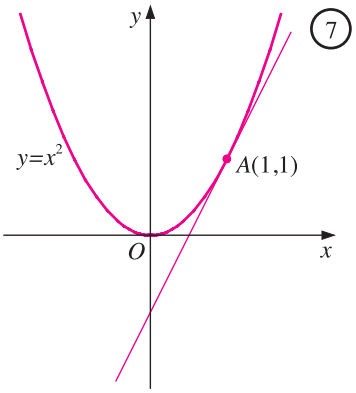
όπου

$$\lambda = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και το σημείο της $A(1,1)$. Επειδή

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2,$$

ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,1)$. Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 2$ και εξίσωση $y - 1 = 2(x - 1)$.



7

Ορισμός παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

Στα προηγούμενα, οι ορισμοί της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού και της εφαπτομένης σε σημείο μιας καμπύλης μας οδήγησαν σε ένα όριο της μορφής

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Για την ιδιαίτερη περίπτωση που το παραπάνω όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.
Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{f'(x_0)}$.
Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Για παράδειγμα, αν $f(x)=x^2+1$, τότε στο $x_0=1$ έχουμε

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

Επομένως, $f'(1)=2$.

Αν, τώρα, στην ισότητα $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θέσουμε $x=x_0+h$, τότε έχουμε

$$\boldsymbol{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}.$$

Πολλές φορές το $h=x-x_0$ συμβολίζεται με Δx, ενώ το $f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$, οπότε ο παραπάνω τύπος γράφεται:

$$\boldsymbol{f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Η τελευταία ισότητα οδήγησε το Leibniz να συμβολίσει την παράγωγο στο x_0 με $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$. Ο συμβολισμός $f'(x_0)$ είναι μεταγενέστερος και οφείλεται στον Lagrange.
Είναι φανερό ότι, αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της f, τότε:

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν και μόνο αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι ίσα.

Για παράδειγμα,

— η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x^2 & , \quad x<0\\ x^2 & , \quad x\geq 0\end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$, αφού

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2-0}{x}=0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x}=0,$$

ενώ

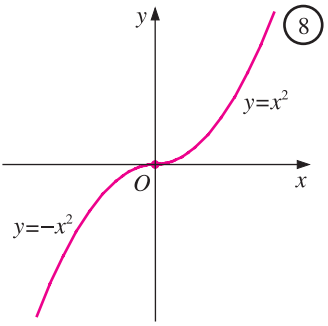
— η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^3 & , \quad x<0\\ 5x & , \quad x\geq 0\end{cases}$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού

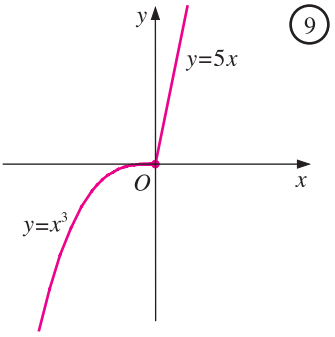
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-0}{x}=0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x-0}{x}=5.$$



8



9

ΣΧΟΛΙΑ

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

- Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή, είναι

$$\boldsymbol{v(t_0)=S'(t_0).}$$

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0. Δηλαδή, είναι

$$\boldsymbol{\lambda=f'(x_0)},$$

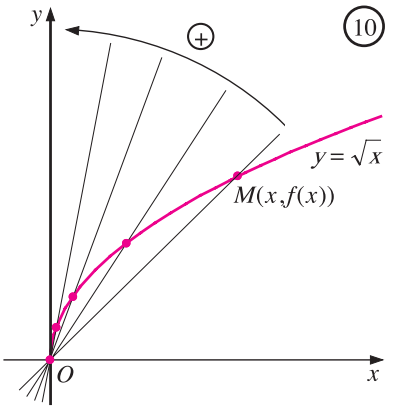
οπότε η εξίσωση της *εφαπτομένης* ε είναι:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_0, f(x_0))$ θα τη λέμε και **κλίση της C_f στο A** ή **κλίση της f στο x_0.**

Κατακόρυφη εφαπτομένη

● Ας δούμε, τώρα, αν μπορούμε να ορίσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνεχούς συνάρτησης f σ' ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$, όταν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.



— Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (\Sigma\chi.\ 10).$$

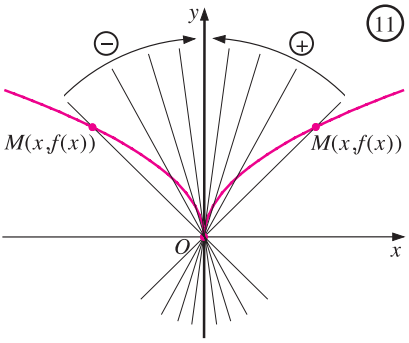
Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Παρατηρούμε όμως ότι, αν $M(x, f(x))$, $x \neq 0$, είναι ένα σημείο της C_f, τότε, καθώς το x τείνει στο 0, η τέμνουσα OM φαίνεται να παίρνει ως οριακή θέση την κατακόρυφη ευθεία που περνάει από το O, δηλαδή τείνει να συμπέσει με τον άξονα $y'y$. Στην περίπτωση αυτή ως εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $O(0,0)$ ορίζουμε την κατακόρυφη ευθεία $x = 0$.

— Έστω τώρα και η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{|x|}. \qquad (\Sigma\chi.\ 11)$$



Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Παρατηρούμε όμως και εδώ ότι, αν $M(x, f(x))$, $x \neq 0$, είναι ένα σημείο της C_f, τότε, καθώς το x τείνει στο 0, η τέμνουσα OM τείνει να συμπέσει με τον άξονα $y'y$. Στην περίπτωση αυτή ως εφαπτομένη της C_f στο $O(0, 0)$ ορίζουμε την κατακόρυφη ευθεία $x = 0$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο x_0 και ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:

α) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ (ή $-\infty$)

β) $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$,

γ) $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$,

τότε ορίζουμε ως **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ την κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$.

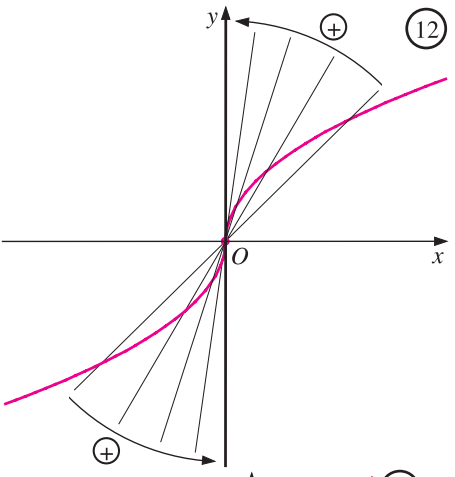
Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}\ , & x<0\\ \sqrt{x}\ , & x\geq 0\end{cases}$$ (Σχ. 12)

δέχεται στο σημείο της $O(0,0)$ κατακόρυφη εφαπτομένη, την $x = 0$, αφού είναι συνεχής στο 0 και ισχύει

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{-x}}=+\infty$$

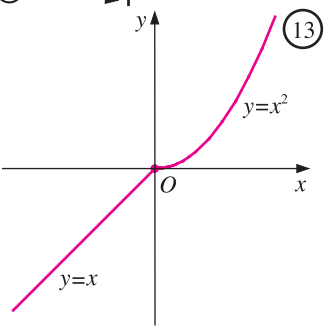
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$



● Αν μια συνάρτηση f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και **δεν** ισχύουν οι προϋποθέσεις του παραπάνω ορισμού, τότε **δεν ορίζουμε** εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}x\ , & x<0\\ x^2\ , & x\geq 0\end{cases},$$

δεν έχει εφαπτομένη στο $O(0,0)$, αφού



$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,$$

ενώ

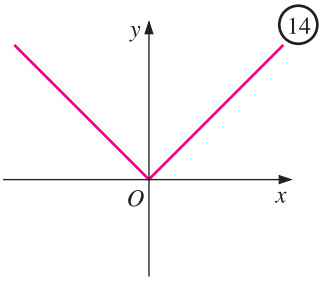
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x=0.$$

Παράγωγος και συνέχεια

Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1, \text{ ενώ}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1.$$



Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 χωρίς να είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό. Αν, όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε θα είναι και συνεχής στο x_0, δηλαδή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x\neq x_0$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0),$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$

$$=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+x+\alpha^2 & , \ x<0 \\ x^3+\alpha x+1 & , \ x\geq 0 \end{cases}$ είναι:

i) συνεχής στο $x_0 = 0$; **ii) παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$;**

ΛΥΣΗ

i) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \ \text{ή} \ \alpha = -1.$$

ii) Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\alpha \neq 1, -1$, η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής και επομένως δεν είναι παραγωγίσιμη.
- Αν $\alpha = 1$, η συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & , \ x<0 \\ x^3+x+1 & , \ x\geq 0 \end{cases}.$$

— Για $x < 0$, έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2+x+1-1}{x} = \frac{x(x+1)}{x} = x+1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1.$$

— Για $x > 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^3+x+1-1}{x} = \frac{x(x^2+1)}{x} = x^2+1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(x^2+1)=1.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

και επομένως, για $\alpha = 1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

- Αν $\boldsymbol{\alpha = -1}$, η συνάρτηση γράφεται

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & , \quad x<0\\ x^3-x+1 & , \quad x\geq 0\end{cases}$$

— Για $x < 0$, έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^2+x+1-1}{x}=\frac{x(x+1)}{x}=x+1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(x+1)=1.$$

— Για $x > 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3-x+1-1}{x}=\frac{x(x^2-1)}{x}=x^2-1,$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}(x^2-1)=-1.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

και επομένως, για $\alpha = -1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν

i) $f(x) = x^2 + 1, x_0 = 0$ ii) $f(x)=\frac{1}{x^2}, x_0 = 1$

iii) $f(x) = \eta\mu^2 x, x_0 = 0.$

2. Να βρείτε (αν υπάρχει) την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν

i) $f(x) = x|x|$, $x_0 = 0$ ii) $f(x) = |x-1|$, $x_0 = 1$

iii) $f(x) = |x^2 - 3x|$, $x_0 = 1$ iv) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , \quad x < 0 \\ x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x < 0 \\ x^3 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$, αν $x_0 = 0$ ii) $f(x) = |x-1| + 1$, αν $x_0 = 1$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f (αν ορίζεται) στο $A(x_0, f(x_0))$ για κάθε μία από τις συναρτήσεις των ασκήσεων 1 και 2.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = 2 - x + x\eta\mu|x|$ στο σημείο $x_0 = 0$.

2. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f(1 + h) = 2 + 3h + 3h^2 + h^3$, για κάθε $h \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(1) = 2$ ii) $f'(1) = 3$.

3. Αν $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & , \quad x < 0 \\ \eta\mu x + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$, να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $A(0,1)$ και σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

4. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ στο $x_0 = 0$.

5. Αν $x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 1$

ii) $1 \geq \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \geq x+1$, για $x < 0$ και

$1 \leq \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \leq x+1$, για $x > 0$

iii) $f'(0) = 1$.

6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\eta\mu^2 x - x^4 \leq xf(x) \leq \eta\mu^2 x + x^4$$

να αποδείξετε ότι

i) $f(0) = 0$ ii) $f'(0) = 1$.

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0 και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 4$, να αποδείξετε ότι:

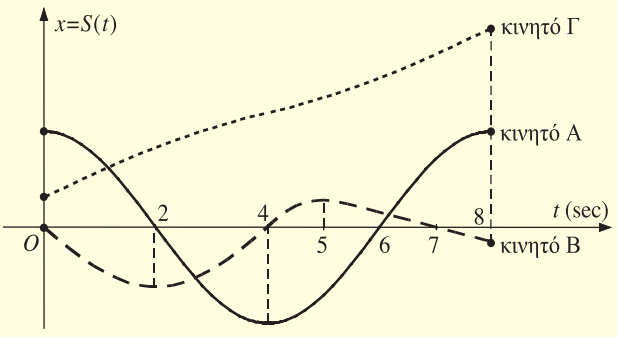
i) $f(0) = 0$ ii) $f'(0) = 4$.

8. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

i) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h} = -f'(x_0)$

ii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} = 2f'(x_0)$.

9. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως τριών κινητών που κινήθηκαν πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 8 sec. Να βρείτε:



i) Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;

ii) Ποιο κινητό κινήθηκε μόνο προς τα δεξιά;

iii) Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή $t = 2$ sec, ποιο τη χρονική στιγμή $t = 4$ sec και ποιο τη χρονική στιγμή $t = 5$ sec;

iv) Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα αριστερά σε όλο το χρονικό διάστημα από 0 sec έως 4 sec;

v) Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;

vi) Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

● Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Θα λέμε ότι:

— Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, **παραγωγίσιμη**, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β)** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

— Η f είναι **παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$** του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}.$$

● Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} f' : A_1 &\to R \\ x &\to f'(x), \end{aligned}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος της f** ή απλά **παράγωγος της f**. Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται "ντε εφ προς ντε χι". Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

Αν υποθέσουμε ότι το A_1 είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τότε η παράγωγος της f', αν υπάρχει, λέγεται **δεύτερη παράγωγος της** f και συμβολίζεται με f''.

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της** f, με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$. Δηλαδή

$$f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]', \nu \geq 3.$$

Η εύρεση της παραγώγου συνάρτησης, με βάση τον ορισμό που δώσαμε, δεν είναι πάντα εύκολη. Στη συνέχεια θα δούμε μερικές βασικές περιπτώσεις παραγώγισης συναρτήσεων, που θα τις χρησιμοποιούμε στην εύρεση παραγώγου συναρτήσεων (αντί να χρησιμοποιούμε τον ορισμό κάθε φορά).

Παράγωγος μερικών βασικών συναρτήσεων

● Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή

$$\boxed{(c)' = 0}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή $(c)' = 0$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή $(x)' = 1$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu x^{\nu-1}$, δηλαδή

$$(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0} = x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.1 η $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.** ■

● Έστω συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, δηλαδή

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h}$$

$$= \eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h} = 1 \text{ και } \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή, $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$, δηλαδή

$$\boxed{(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu x \cdot \eta\mu h - \sigma\upsilon\nu x}{h}$$

$$= \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} - \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h}\right) - \lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}\right)$$

$$= \sigma\upsilon\nu x \cdot 0 - \eta\mu x \cdot 1 = -\eta\mu x.$$

Δηλαδή, $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0,$$

τα οποία χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι η παράγωγος στο $x_0 = 0$ των συναρτήσεων f, g αντιστοίχως, αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x-\eta\mu 0}{x-0}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 0}{x-0}=g'(0).$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=e^x$, δηλαδή

$$(e^x)'=e^x$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Αποδεικνύεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$, δηλαδή

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

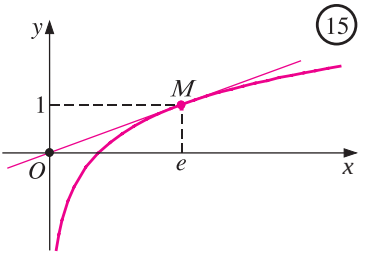
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\ln x$, στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

Επειδή $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f σε ένα σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$



Η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, αν και μόνο αν

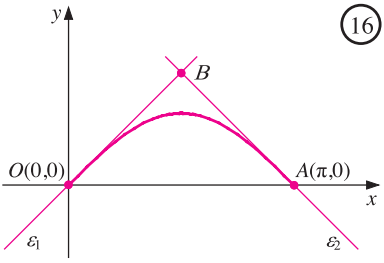
$$0-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(0-x_0)\Leftrightarrow \ln x_0=1\Leftrightarrow x_0=e.$$

Άρα, το ζητούμενο σημείο είναι το $M(e,1)$.

2. **Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$ στα σημεία $O(0,0)$ και $A(\pi,0)$ αντιστοίχως. Να βρεθούν:**

i) Οι εξισώσεις των ε_1 και ε_2

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ε_1, ε_2 και ο άξονας των x.



ΛΥΣΗ

i) Επειδή $f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$, είναι $f'(0) = 1$ και $f'(\pi) = -1$ οπότε οι ε_1, ε_2 έχουν εξισώσεις

$$y = x \qquad \text{και} \qquad y = -(x - \pi)$$

αντιστοίχως.

ii) Αν λύσουμε το σύστημα των παραπάνω δύο εξισώσεων βρίσκουμε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται στο σημείο $B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα, το τρίγωνο OAB έχει εμβαδόν $E = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

i) $f(x) = x^4$, $x_0 = -1$ ii) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 9$

iii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$ iv) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$

v) $f(x) = e^x$, $x_0 = \ln 2$.

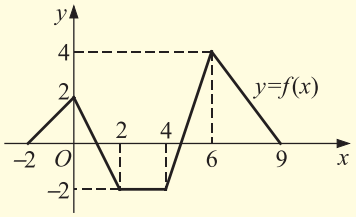
2. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x < 1 \\ \sqrt{x} , & x \geq 1 \end{cases}$ ii) $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x , & x < 0 \\ x , & x \geq 0 \end{cases}$

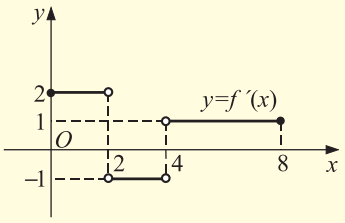
iii) $f(x) = \begin{cases} x^3 , & x < 2 \\ x^4 , & x \geq 2 \end{cases}$ iv) $f(x) = \begin{cases} x^2 , & x \leq 2/3 \\ x^3 , & x > 2/3 \end{cases}$.

3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της παραβολής $y = x^2$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης να είναι μεταξύ τους παράλληλες. Ισχύει το ίδιο για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$;

4. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος.



5. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, με $f(0) = 0$, και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο διπλανό σχήμα.



Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x & ,x<\pi\\ \alpha x+\beta & ,x\geq\pi\end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = \pi$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $A(\xi, f(\xi))$, $\xi \neq 0$ της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ εφάπτεται της C_f στο A.

3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha, \alpha^3)$, $\alpha \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο N εκτός του M. Στο σημείο N η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο M.

4. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi,\frac{1}{\xi}\right)$. Αν A, B είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι

i) Το M είναι μέσο του AB.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi \in \mathbb{R}^*$.

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος αθροίσματος

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0). \quad \blacksquare$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$\boldsymbol{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).}$$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Δηλαδή, αν f_1, f_2, …, f_k, είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \cdots + f_k'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$(\eta\mu x + x^2 + e^x + 3)' = (\eta\mu x)' + (x^2)' + (e^x)' + (3)' = \sigma\upsilon\nu x + 2x + e^x.$$

Παράγωγος γινομένου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}g(x) + f(x_0)\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad \blacksquare$$

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$(e^x \ln x)' = (e^x)'\ln x + e^x(\ln x)' = e^x \ln x + e^x\frac{1}{x},\ x>0.$$

Το παραπάνω θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι, για τρεις παραγωγίσιμες συναρτήσεις ισχύει:

$$(f(x)g(x)h(x))' = [(f(x)g(x))\cdot h(x)]' = (f(x)g(x))'\cdot h(x) + (f(x)g(x))\cdot h'(x)$$

$$= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

$$= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

Για παράδειγμα,

$$(\sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\ln x)' = (\sqrt{x})'\cdot\eta\mu x\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot(\eta\mu x)'\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot(\ln x)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\eta\mu x\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\ln x + \sqrt{x}\cdot\eta\mu x\cdot\frac{1}{x} \qquad x>0.$$

Αν f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και $c\in\mathbb{R}$, επειδή $(c)'=0$, σύμφωνα με το θεώρημα (2) έχουμε:

$$\boxed{(cf(x))' = cf'(x)}$$

Για παράδειγμα,

$$(6x^3)' = 6(x^3)' = 6\cdot 3x^2 = 18x^2.$$

Παράγωγος πηλίκου

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Η απόδειξη παραλείπεται.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει $g(x)\neq 0$, τότε για κάθε $x\in\Delta$ έχουμε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Για παράδειγμα,

$$\left(\frac{x^2}{5x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(5x-1) - x^2(5x-1)'}{(5x-1)^2} = \frac{2x(5x-1) - x^2\cdot 5}{(5x-1)^2}$$

$$= \frac{10x^2 - 2x - 5x^2}{(5x-1)^2} = \frac{5x^2-2x}{(5x-1)^2}, \quad x\neq\frac{1}{5}.$$

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες προτάσεις μπορούμε τώρα να βρούμε τις παραγώγους μερικών ακόμη βασικών συναρτήσεων.

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή

$$\boxed{(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}. \blacksquare$$

Για παράδειγμα,

$$(x^{-4})' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5},\ x \neq 0.$$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu > 1$. Επομένως, αν $\kappa \in \mathbb{Z} - \{0,1\}$, τότε

$$\boldsymbol{(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}}.$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \,|\, \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \blacksquare$$

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \,|\, \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή

$$\boxed{(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης** $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x \ln x}{x-1}}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{x\ln x}{x-1}\right)'=\frac{(x\ln x)'(x-1)-x\ln x(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x\ln x-\ln x+x-1-x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$$

2. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{1}{x+1}$ και $g(x)=x^2-x+1$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $A(0,1)$ και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης αυτής.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(0)=g'(0)$. Έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x+1}\right)'=\frac{(1)'(x+1)-1(x+1)'}{(x+1)^2}=-\frac{1}{(x+1)^2}$$

και

$$g'(x)=(x^2-x+1)'=2x-1,$$

οπότε

$$f'(0)=-1 \text{ και } g'(0)=-1.$$

Άρα

$$f'(0)=-1=g'(0).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0,1)$ είναι:

$$y-1=-1(x-0)\Leftrightarrow y=-x+1.$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Έστω ότι ζητάμε την παράγωγο της συνάρτησης $y=\eta\mu 2x$, η οποία είναι σύνθεση της $g(x)=2x$ και της $f(x)=\eta\mu x$. Επειδή $\eta\mu 2x=2\,\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$, έχουμε

$$(\eta\mu 2x)'=(2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x)'=2(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'$$

$$=2\sigma\upsilon\nu^2x-2\eta\mu^2x=2(\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x)=2\sigma\upsilon\nu 2x.$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της $y=\eta\mu 2x$ δεν είναι η συνάρτηση $y=\sigma\upsilon\nu 2x$, όπως ίσως θα περίμενε κανείς από τον τύπο $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$. Αυτό εξηγείται με το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$\boldsymbol{(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).}$$

Δηλαδή, αν $\boldsymbol{u = g(x)}$, τότε

$$\boldsymbol{(f(u))' = f'(u) \cdot u'.}$$

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{du}} \cdot \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{dx}}$$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, πράγμα που ευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα.
Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι τα εξής:

- Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (1)$$

Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha$, δηλαδή

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$$

(1) Αποδεικνύεται ότι, για $\alpha > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη και στο σημείο $x_0 = 0$ και η παράγωγός της είναι ίση με 0, επομένως δίνεται από τον ίδιο τύπο.

Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u = x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x\ln\alpha} \cdot \ln\alpha = \alpha^x \ln\alpha.$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

Πράγματι·

— αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Ανακεφαλαιώνοντας, αν η συνάρτηση $\boldsymbol{u = f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε έχουμε:

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	$(\varepsilon\varphi u)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u} \cdot u'$
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\sigma\varphi u)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 u} \cdot u'$
$(\eta\mu u)' = \sigma\upsilon\nu u \cdot u'$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\sigma\upsilon\nu u)' = -\eta\mu u \cdot u'$	$(\alpha^u)' = \alpha^u \ln\alpha \cdot u'$
$(\ln\|u\|)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων**

i) $\boldsymbol{f(x) = (3x^2 + 5)^9}$ **ii)** $\boldsymbol{g(x) = e^{-x^2+1}}$ **iii)** $\boldsymbol{h(x) = \ln\sqrt{x^2 + 1}}$.

ΛΥΣΗ

i) Αν θέσουμε $u = 3x^2 + 5$, τότε η συνάρτηση $y = f(x)$ γράφεται

$$y = u^9,$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} y' = (u^9)' &= 9u^8 \cdot u' \\ &= 9(3x^2 + 5)^8 \cdot (3x^2 + 5)' \\ &= 9(3x^2 + 5)^8 \cdot 6x \\ &= 54x(3x^2 + 5)^8. \end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε

ii) $g'(x) = (e^{-x^2+1})' = e^{-x^2+1}(-x^2+1)'$ (θέσαμε $u = -x^2 + 1$)

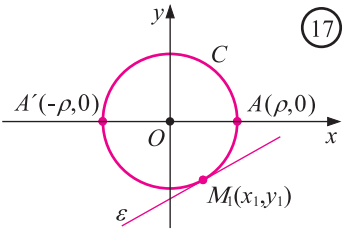
$= e^{-x^2+1}(-2x) = -2xe^{-x^2+1}$

iii) $h'(x) = (\ln(\sqrt{x^2+1}))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)'$ (θέσαμε $u = \sqrt{x^2+1}$)

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'$$

$$= \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+1} \cdot$$

2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $M_1(x_1, y_1)$.



17

ΛΥΣΗ

Αν λύσουμε την εξίσωση του κύκλου ως προς y, βρίσκουμε ότι

$$y = \sqrt{\rho^2 - x^2}, \text{ αν } y \geq 0 \text{ και } y = -\sqrt{\rho^2 - x^2}, \text{ αν } y \leq 0.$$

Επομένως, ο κύκλος C αποτελείται από τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f_1(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2} \quad \text{και} \quad f_2(x) = -\sqrt{\rho^2 - x^2}$$

οι οποίες είναι ορισμένες στο κλειστό διάστημα $[-\rho, \rho]$ και παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα $(-\rho, \rho)$.
Αν, τώρα, με $y = f(x)$ συμβολίσουμε εκείνη από τις παραπάνω συναρτήσεις στην οποία ανήκει το $M_1(x_1, y_1)$, τότε θα ισχύει

$$\lambda_\varepsilon = f'(x_1) \qquad (1) \qquad \text{και} \qquad x^2 + f^2(x) = \rho^2 \qquad (2)$$

Έτσι, με παραγώγιση και των δύο μελών της (2), έχουμε

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0$$

οπότε, για $x = x_1$, θα ισχύει

$$x_1 + f(x_1)f'(x_1) = 0.$$

Έτσι, λόγω της (1) θα έχουμε

$$x_1 + y_1 \cdot \lambda_\varepsilon = 0$$

οπότε, για $y_1 \neq 0$, θα είναι

$$\boldsymbol{\lambda_\varepsilon = \frac{-x_1}{y_1}}.$$

Άρα, η εφαπτομένη ε έχει εξίσωση:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

η οποία γράφεται διαδοχικά:

$$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$
$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$
$$\boldsymbol{xx_1 + yy_1 = \rho^2}, \qquad (3)$$

αφού $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$.

Αν $y_1 = 0$, που συμβαίνει όταν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι το $A(\rho,0)$ ή το $A'(-\rho,0)$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία αυτά είναι οι κατακόρυφες ευθείες

$$x = \rho \qquad \text{και} \qquad x = -\rho$$

αντιστοίχως. Και οι δυο αυτές εξισώσεις δίνονται από τον παραπάνω τύπο (3) για $(x_1, y_1) = (\rho, 0)$ και $(x_1, y_1) = (-\rho, 0)$ αντιστοίχως.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης οποιασδήποτε άλλης κωνικής τομής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x) = x^7 - x^4 + 6x - 1$ ii) $f(x) = 2x^3 + \ln x - \sqrt{3}$

iii) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$ iv) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\eta\mu x + \ln 3$.

2. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 3)$ ii) $f(x) = e^x \eta\mu x$

iii) $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ iv) $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$

v) $f(x) = x^2 \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$.

3. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$ ii) $f(x) = \varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x$

iii) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{e^x}$ iv) $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}$.

4. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & , \ x < 0 \\ 12\sqrt{x} + 6x & , \ x \geq 0 \end{cases}$ ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \eta\mu x & , \ x \leq 0 \\ x & , \ x > 0 \end{cases}$.

5. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα των x, όταν

i) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ ii) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ iii) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

6. Αν $f(x) = \frac{2(x+1)}{x-1}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, να βρείτε τις συναρτήσεις f', g'. Ισχύει $f' = g'$;

7. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}$ στο κοινό σημείο τους $A(1,1)$, είναι κάθετες.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η κλίση της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι ίση με $\frac{1}{2}$.

9. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x + 5$, στα οποία η εφαπτομένη είναι:

i) παράλληλη προς την ευθεία $y = 9x + 1$

ii) κάθετη προς την ευθεία $y = -x$.

10. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ η οποία άγεται από το σημείο $A(0, -1)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f, διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων.

12. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = (3x^4 + 4x^3)^{-2}$ ii) $f(x) = (x-1)^{2/3}$

iii) $f(x) = \eta\mu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ iv) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x} - x\right)$

v) $f(x) = e^{-x^2}$.

13. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο x_0 όταν:

i) $f(x) = x^2\sqrt{1+x^3}$, $x_0 = 2$ ii) $f(x) = (2x)^{1/3} + (2x)^{2/3}$, $x_0 = 4$

iii) $f(x) = x^3\eta\mu^3(\pi x)$, $x_0 = \frac{1}{6}$ iv) $f(x) = \frac{x^2+2}{2-x}$, $x_0 = 3$.

14. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^{\ln x}$ ii) $f(x) = 2^{5x-3}$

iii) $f(x) = (\ln x)^x$, $x > 1$ iv) $f(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$

15. Αν $f(x) = \eta\mu^2 x$, να αποδείξετε ότι $f''(x) + 4\ f(x) = 2$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτομένες τους είναι κάθετες.

2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x - 2$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ δύο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = -x^2 - x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στην C_g.

5. Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε $f(0) = 4$, $f'(-1) = 2$, $f''(2) = 4$ και $f^{(3)}(1) = 6$.

6. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο f δεύτερου βαθμού του οποίου η γραφική παράσταση να εφάπτεται των ευθειών $y = x + 1$ και $y = 3x - 1$ στα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,2)$ αντιστοίχως.

7. Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$, να αποδείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{xf(x) - \alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = f(\alpha) + \alpha f'(\alpha)$

ii) $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{e^x f(x) - e^\alpha f(\alpha)}{x - \alpha} = e^\alpha (f(\alpha) + f'(\alpha))$.

8. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \eta\mu 2x - 2\eta\mu^2 x,\ x \in [0, 2\pi],$$

στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα των x.

9. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, ii) $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

και στη συνέχεια την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$ σε καθεμια περίπτωση χωριστά.

10. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(1) = 1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x) = f(x^2 + x + 1) - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε οτι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0, g(0))$.

11. Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$, για την οποία ισχύει

$$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x, \text{ για κάθε } x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

i) Να βρείτε την $f'(0)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Στην αρχή του κεφαλαίου αυτού, ορίσαμε τη στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ως το όριο

$$\lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = S'(t_0).$$

Το όριο αυτό το λέμε και **ρυθμό μεταβολής** της τετμημένης S του κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Γενικά,

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

Για παράδειγμα, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$, της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0. Η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha(t_0)}$. Είναι δηλαδή

$$\boldsymbol{\alpha(t_0) = \upsilon'(t_0) = S''(t_0).}$$

Στην οικονομία, το κόστος παραγωγής K, η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και

λέγεται **οριακό κόστος στο x_0.** Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες **οριακή είσπραξη στο x_0** και **οριακό κέρδος στο x_0.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ένα βότσαλο που ρίχνεται σε μία λίμνη προκαλεί κυκλικό κυματισμό. Μία συσκευή μέτρησης δείχνει ότι τη χρονική στιγμή t_0 που η ακτίνα r του κυματισμού είναι 50 cm, ο ρυθμός μεταβολής της r είναι 20 cm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E που περικλείεται από το κυκλικό κύμα, τη χρονική στιγμή t_0.

ΛΥΣΗ

Επειδή $E = \pi \cdot r^2$ και η ακτίνα r είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε

$$E(t) = \pi r^2(t),$$

οπότε

$$E'(t) = 2\pi r(t) \cdot r'(t).$$

Επομένως,

$$E'(t_0) = 2\pi r(t_0) \cdot r'(t_0) = 2\pi \cdot 50 \cdot 20 = 2000\pi \ (\text{cm}^2/\text{sec}).$$

2. Αν το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x)$ και η συνολική είσπραξη από την πώλησή τους είναι $E(x)$, τότε $P(x) = E(x) - K(x)$ είναι το συνολικό κέρδος και $K_\mu(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ είναι το μέσο κόστος.

i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους και ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης είναι ίσοι.

ii) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ίσο με το οριακό κόστος.

ΛΥΣΗ

i) Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι

$$P'(x) = E'(x) - K'(x).$$

Επομένως,

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) = K'(x).$$

ii) Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι

$$K'_{\mu}(x) = \frac{K'(x)\cdot x - K(x)}{x^2}.$$

Επομένως

$$K'_{\mu}(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x)\cdot x - K(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x}$$
$$\Leftrightarrow K'(x) = K_{\mu}(x).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

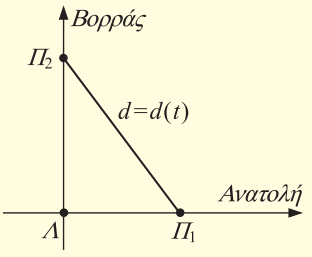
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1$sec. (Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$).

2. Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό 100 cm^3/sec. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με 9 cm;

3. Το κόστος παραγωγής, $K(x)$, και η τιμή πώλησης, $\Pi(x)$, x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις $K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 20x^2 + 600x + 1000$ και $\Pi(x) = 420x$ αντιστοίχως. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους, $P(x) = \Pi(x) - K(x)$, είναι θετικός.

4. Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι $Λ$. Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15 km/h και το Π_2 βόρεια με ταχύτητα 20 km/h.



i) Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Π_1 και Π_2

ii) Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (\Pi_1\Pi_2)$ των δυο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

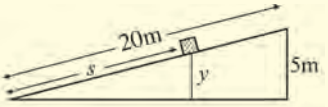
5. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2,\ x \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

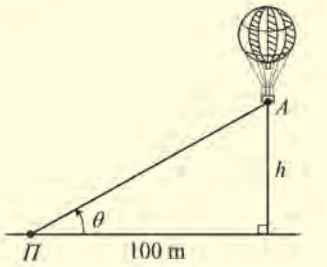
1. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10 cm^2/sec, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν r = 85 cm.

2. Έστω T το εμβαδόν του τριγώνου OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$, με $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού T, όταν x = 5cm.

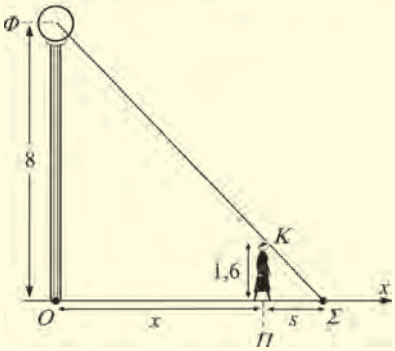
3. Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3 m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του y.



4. Ένα αερόστατο A αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100 m από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50 m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η $A\Pi$ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 100 m.



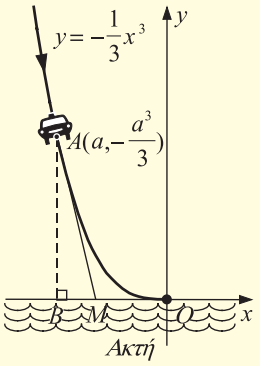
5. Μία γυναίκα ύψους 1,60 m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8 m με ταχύτητα 0,8 m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;



6. Ένα περιπολικό A κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\alpha(t)$$

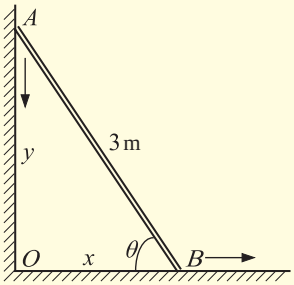
να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη –3.



7. Μία σκάλα μήκους 3 m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1 m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5 m, να βρείτε:

i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).

ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας.



8. Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A.

2.5 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε ένα από τα πλέον βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού που είναι γνωστό ως **Θεώρημα Μέσης Τιμής**. Αρχικά διατυπώνουμε το Θεώρημα του Rolle, το οποίο είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής και στη συνέχεια διατυπώνουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής, το οποίο αποδεικνύεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Rolle.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Rolle)

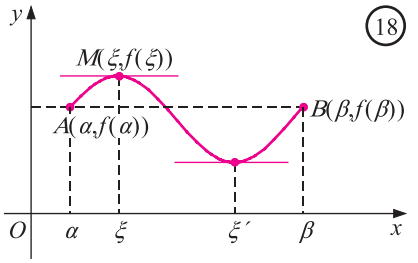
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = 0$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



18

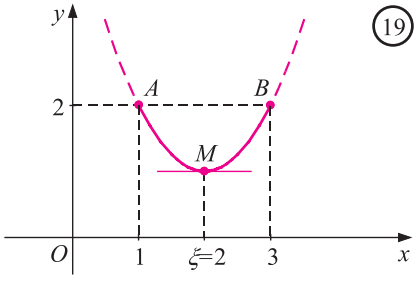
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$f(x) = x^2 - 4x + 5,\ x \in [1,3]$. (Σχ. 19)

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,3]$, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$, με $f'(x) = 2x - 4$ και $f(1) = 2 = f(3)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (1,3)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Για την εύρεση του αριθμού ξ, έχουμε:

$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 4 = 0 \Leftrightarrow \xi = 2$.



19

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Θ.Μ.Τ.)

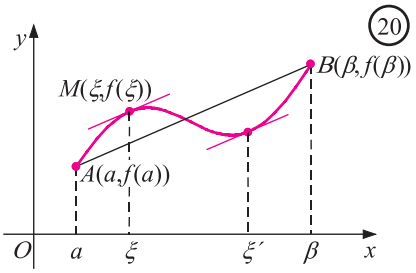
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

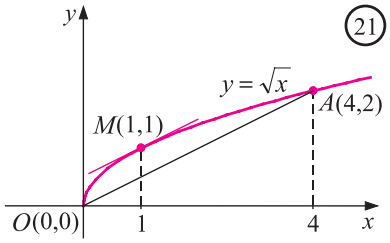
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0,4].$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,4)$, με $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, θα υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0,4)$ τέτοιος, ώστε



$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Για την εύρεση του αριθμού ξ, έχουμε:

$$f'(\xi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\xi} = 1 \Leftrightarrow \xi = 1.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να αποδειχτεί ότι:**

i) Η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^3 + x^2 - (\lambda + 1)x$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,1]$.

ii) Η εξίσωση $3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0,1]$ αφού

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x) = 3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1)$ και
- ισχύει $f(0) = f(1) = 0$.

ii) Αφού, λοιπόν, για τη συνάρτηση $f(x) = \lambda x^3 + x^2 - (\lambda + 1)x$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, θα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ ή, ισοδύναμα, $3\lambda\xi^2 + 2\xi - (\lambda + 1) = 0$. Επομένως, το $\xi \in (0,1)$ θα είναι ρίζα της εξίσωσης $3\lambda x^2 + 2x - (\lambda + 1) = 0$.

2. Να αποδειχτεί ότι για τη συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ και για οποιοδήποτε διάστημα $[x_1, x_2]$, ο αριθμός $x_0 \in (x_1, x_2)$, που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, είναι το κέντρο του διαστήματος $[x_1, x_2]$, δηλαδή είναι $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), με $f'(x) = 2\alpha x + \beta$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad . \tag{1}$$

Είναι όμως:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma - \alpha x_1^2 - \beta x_1 - \gamma}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + \beta(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)[\alpha(x_1 + x_2) + \beta]}{x_2 - x_1} = \alpha(x_1 + x_2) + \beta.$$

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$2\alpha x_0 + \beta = \alpha(x_1 + x_2) + \beta \Leftrightarrow x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

3. Ένα αυτοκίνητο διήνυσε μία διαδρομή 200 χιλιομέτρων σε 2,5 ώρες. Να αποδειχθεί ότι κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν 80 χιλιόμετρα την ώρα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $x = S(t)$, $t \in [0, 2,5]$ η συνάρτηση θέσης του κινητού. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $t_0 \in [0, 2,5]$, τέτοια ώστε $\upsilon(t_0) = S'(t_0) = 80$.
Η συνάρτηση S είναι συνεχής στο $[0, 2,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2,5)$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $t_0 \in (0, 2,5)$ τέτοιο, ώστε

$$\upsilon(t_0) = S'(t_0) = \frac{S(2,5) - S(0)}{2,5} = \frac{200 - 0}{2,5} = 80 \text{ χιλιόμετρα την ώρα.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

i) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $[0, 2]$ ii) $f(x) = \eta\mu 3x$, $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$

iii) $f(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu 2x$, $[0, \pi]$ iv) $f(x) = |x|$, $[-1, 1]$.

2. Να εξετάσετε, ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα που αναφέρεται και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει το θεώρημα, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

i) $f(x) = x^2 + 2x$, $[0, 4]$ ii) $f(x) = 3\eta\mu 2x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

iii) $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & , \quad x \le -1 \\ x^3 - x & , \quad x > -1 \end{cases}$, $[-3, 2]$

3. Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και στη συνέχεια ότι:

$$e^\alpha < \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} < e^\beta \quad \text{και} \quad \frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}.$$

Για τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$ υποθέτουμε επιπλέον ότι $0 < \alpha < \beta$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

ii) Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 1 - x$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

3. i) Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu\dfrac{x}{2} = x$ αληθεύει μόνο για $x = 0$.

4. i) Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|.$$

5. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 4]$ και ισχύει $2 \leq f'(x) \leq 5$ για κάθε $x \in (0,4)$. Αν $f(0) = 1$, να αποδείξετε ότι $9 \leq f(4) \leq 21$.

6. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και ισχύει $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$.

7. Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 2^x \text{ και } g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα $A(0,1)$, $B(1,2)$.

2.6 ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού θεωρείται μία από τις σπουδαιότερες προτάσεις της ανάλυσης, αφού με τη βοήθειά του αποδεικνύονται πολλά άλλα θεωρήματα. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το Θ.Μ.Τ. για να αποδείξουμε τα επόμενα δύο βασικά θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει:

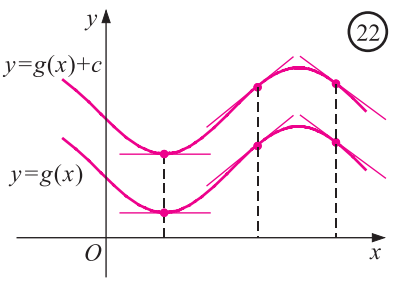
$$f(x) = g(x) + c$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■



22

ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω θεώρημα καθώς και το πόρισμά του ισχύουν σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-1 & , \quad x<0\\ 1 & , \quad x>0\end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$\boldsymbol{f'(x)=f(x)\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}} \qquad \textbf{(1)}$$

i) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή και

ii) Να βρεθεί ο τύπος της f, αν δίνεται επιπλέον ότι $f(0)=1$.

ΛΥΣΗ

i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\varphi'(x)=\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)'=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}\overset{(1)}{=}0,$$

Επομένως, η φ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

ii) Επειδή η φ είναι σταθερή, υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα, $\dfrac{f(x)}{e^x}=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως

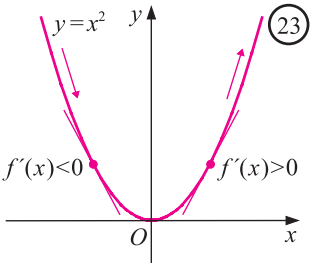
$$f(x)=ce^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Επειδή $f(0)=1$, έχουμε $1=c$, οπότε

$$f(x)=e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Μονοτονία συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(-\infty,0)$, στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $f'(x) = 2x < 0$, ενώ στο διάστημα $(0,+\infty)$, στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) = 2x > 0$. Βλέπουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στη μονοτονία και στο πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης. Συγκεκριμένα ισχύει:



ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι *συνεχής* σε ένα διάστημα Δ.

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

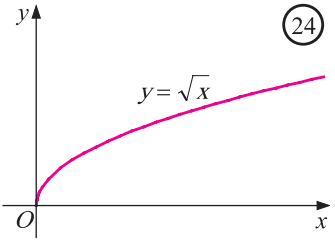
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

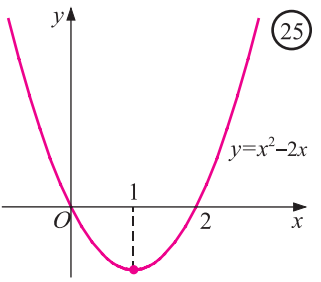
- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

Για παράδειγμα:

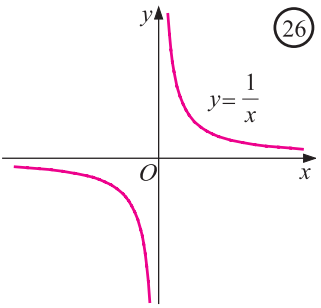
— η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.



— η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x) = 2(x-1) > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$ και $f'(x) = 2(x-1) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,1)$.

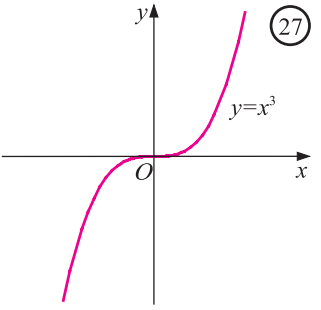


— η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, και $(0,+\infty)$, αφού $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)$ και για κάθε $x \in (0,+\infty)$.



ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος **δεν ισχύει**. Δηλαδή, αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο Δ, η παράγωγός της **δεν είναι υποχρεωτικά** θετική (αντιστοίχως αρνητική) στο εσωτερικό του Δ.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$, αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$. Το πρόσημο της f' δίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως, η συνάρτηση f:

— είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, αφού είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$.

— είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, αφού είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(0,1)$.

— είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, αφού είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$.

Το πρόσημο της f' και το είδος μονοτονίας της f στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0,1]$ και $[1, +\infty)$ συγκεντρώνονται συνοπτικά στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(0)$	↘	$f(1)$	↗	

2. i) Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x - \sigma\upsilon\nu x - 2$, $x \in [0, \pi]$ είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = x - 2$ έχει ακριβώς μια λύση στο $[0, \pi]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Είναι

$$f'(x) = (x - \sigma\upsilon\nu x - 2)' = 1 + \eta\mu x > 0, \text{ για κάθε } [0, \pi].$$

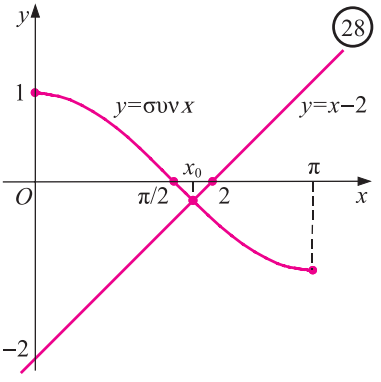
Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, σύμφωνα με την παράγραφο 1.8, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(0), f(\pi)] = [-3, \pi - 1]$.

ii) Έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x = x - 2 \Leftrightarrow x - \sigma\upsilon\nu x - 2 = 0,$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0,\ x \in [0, \pi].$$

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-3, \pi - 1]$, που περιέχει το 0, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, \pi)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$, η x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό. Η ρίζα αυτή, όπως φαίνεται και στο σχήμα 28, είναι η τετμημένη του σημείου τομής της $y = x - 2$ και της $y = \sigma\upsilon\nu x$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν:

$$f'(x) = g(x) \text{ και } g'(x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2$ είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^3 + 3x - 4$ ii) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

iii) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

3. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & , \quad x \le 1 \\ x + 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$ ii) $f(x) = |x^2 - 1|$

4. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ ii) $f(x) = \ln x - x$ iii) $f(x) = \eta\mu x + |\eta\mu x|,\ x \in [0, 2\pi]$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^5 + 5x - 6$ και $g(x) = 2\sqrt{x} + x - 3$.

i) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

iii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$x^5 + 5x - 6 = 0 \text{ και } 2\sqrt{x} + x - 3 = 0$$

έχουν ακριβώς μία ρίζα την $x = 1$.

6. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 + \ln(x + 1)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x + 1)$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ' όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x)-f(y)|\leq (x-y)^2 \text{ για όλα τα } x, y\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

2. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1,1]$.

iii) Αν $-2 < \alpha < 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1,1)$.

3. Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση:

$$x = S(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 16t + 160,\ 0 \leq t \leq 5.$$

Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

i) Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν;

ii) Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά;

iii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται;

4. Η τιμή V (σε ευρώ) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την παραγωγή του, δίνεται από τον τύπο

$$V = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2}\cdot$$

Να αποδείξετε ότι το προϊόν συνεχώς υποτιμάται χωρίς, όμως, η τιμή του να μπορεί να γίνει μικρότερη από το μισό της αρχικής τιμής του.

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

ii) Η εξίσωση $x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \alpha$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

7. Να αποδείξετε οτι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii) $\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

iii) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Να αποδείξετε ότι:

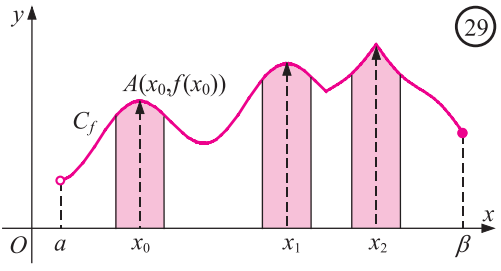
i) Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) $2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x \geq 3x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

2.7 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η έννοια του τοπικού ακροτάτου

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα $(\alpha, \beta]$. Παρατηρούμε ότι στο σημείο $x = x_0$ η τιμή της συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε "γειτονικό" σημείο του x_0. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία x_1 και x_2. Γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:



ΟΡΙΣΜΟΣ

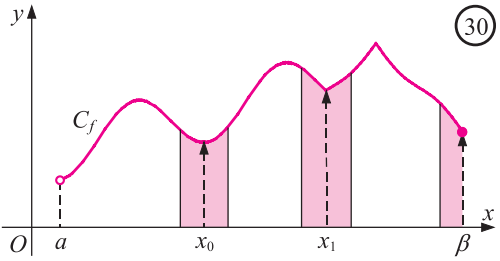
Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της** f.

Αν η ανισότητα $f(x) \le f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**, το $\boldsymbol{f(x_0)}$.

Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι στο σημείο $x = x_0$ η τιμή της συνάρτησης είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε "γειτονικό" σημείο του x_0. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο. Το ίδιο συμβαίνει και στα σημεία x_1 και β. Γενικά, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:



30

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \ge f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Το x_0 λέγεται **θέση** ή **σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της** $\boldsymbol{f}$.

Αν η ανισότητα $f(x) \ge f(x_0)$ ισχύει για κάθε $x \in A$, τότε, όπως είδαμε στην παράγραφο 1.3, η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**, το $\boldsymbol{f(x_0)}$.

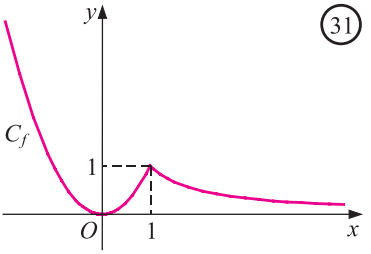
Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** ή, απλά, **ακρότατα** αυτής, ενώ τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα λέγονται **θέσεις τοπικών ακροτάτων**. Το μέγιστο και το ελάχιστο της f λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad \text{αν } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & , \quad \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

παρουσιάζει:

i) στο $x = 0$ τοπικό ελάχιστο, το $f(0) = 0$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο και



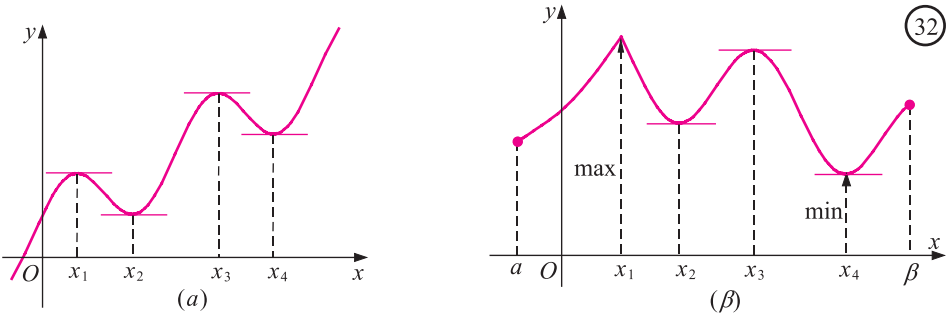
31

ii) στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο, το $f(1) = 1$.

Η συνάρτηση f αν και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, εντούτοις δεν παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο.

ΣΧΟΛΙΑ

i) Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο (Σχ.32α).



ii) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα, ενώ αν παρουσιάζει, ελάχιστο, τότε αυτό θα είναι το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα. (Σχ. 32β). Το μεγαλύτερο όμως από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε μέγιστο αυτής. Επίσης το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μίας συνάρτησης δεν είναι πάντοτε ελάχιστο της συνάρτησης (Σχ. 32α).

Προσδιορισμός των τοπικών ακροτάτων

Με μια προσεκτική παρατήρηση του σχήματος 32β βλέπουμε ότι αν σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι οριζόντια, δηλαδή ισχύει $f'(x_0) = 0$. Αυτό επιβεβαιώνεται από το παρακάτω θεώρημα, που είναι γνωστό ως **Θεώρημα του Fermat.**

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

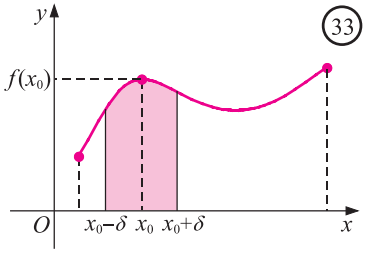
$$f'(x_0) = 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,.$$

Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \tag{2}$$

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0\,. \tag{3}$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία του Δ, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων. Επομένως, όπως φαίνεται και στα σχήματα 29 και 30, οι *πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.**

2. **Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.**

3. **Τα άκρα του Δ** (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

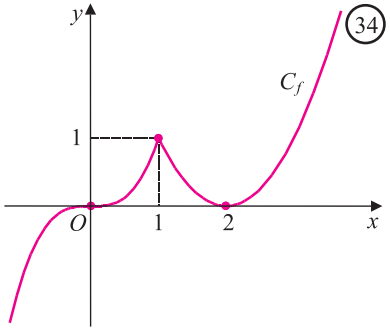
Τα *εσωτερικά* σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f στο διάστημα Δ.
Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^3 & ,\quad x<1\\ (x-2)^2 & ,\quad x\geq 1\end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ εκτός από το 1, με:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & ,\quad x<1\\ 2(x-2) & ,\quad x>1\end{cases}.$$

Οι ρίζες της $f'(x)=0$ είναι οι 0 και 2.



Επειδή η f' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι αριθμοί 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, ενώ το σημείο 0 δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου. Άρα δεν είναι όλα τα κρίσιμα σημεία θέσεις τοπικών ακροτάτων της f. Επομένως, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο το οποίο να μας πληροφορεί ποια από τα κρίσιμα σημεία της f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων αυτής. Σχετικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής.**

i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. (Σχ. 35α)

ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. (Σχ. 35β)

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β). (Σχ. 35γ).

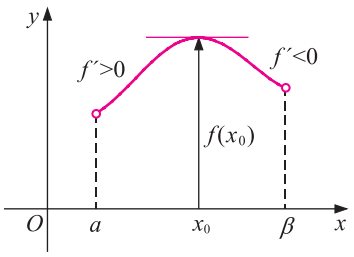
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

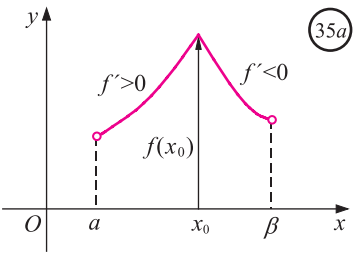
i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, x_0]. \quad (1)$$

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in [x_0, \beta). \quad (2)$$



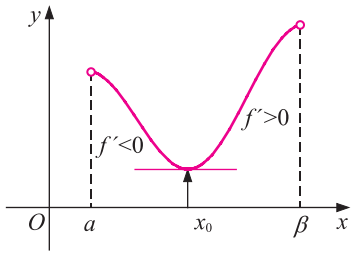


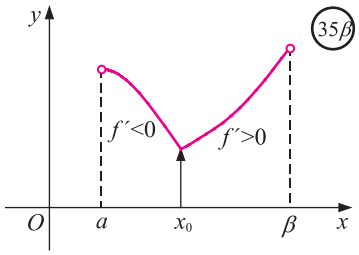
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

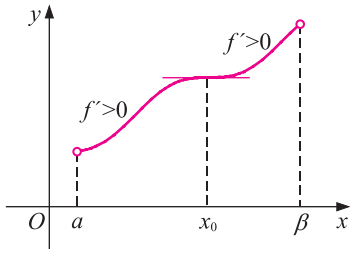
ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

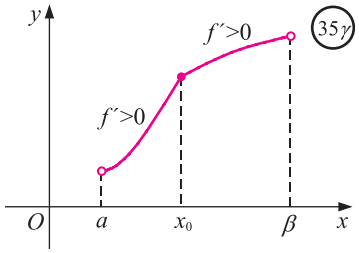




iii) Έστω ότι

$f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.





Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3$ που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι $x = 0$ (διπλή) ή $x = 3$, το δε πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,3]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$ και παρουσιάζει ένα μόνο τοπικό ακρότατο, συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο για $x = 3$, το $f(3) = -27$.

ΣΧΟΛΙΑ

● Όπως είδαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος στην πρώτη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f στο (α, β), ενώ στη δεύτερη περίπτωση το $f(x_0)$ είναι η ελάχιστη τιμή της f στο (α, β).

● Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα § 1.8),η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο. Για την εύρεση του μέγιστου και ελάχιστου εργαζόμαστε ως εξής:

1. **Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f.**
2. **Υπολογίζουμε τις τιμές της f στα σημεία αυτά και στα άκρα των διαστημάτων.**
3. **Από αυτές τις τιμές η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο και η μικρότερη το ελάχιστο της f.**

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 19$, $x \in [0,5]$. Έχουμε $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$, $x \in [0,5]$. Οι ρίζες της $f'(x) = 0$ είναι οι $x = 1$, $x = 4$. Επομένως, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $x = 1$, $x = 4$. Οι τιμές της f στα κρίσιμα σημεία και στα άκρα του διαστήματος [0, 5] είναι

$$f(1) = 30,\ f(4) = 3,\ f(0) = 19 \text{ και } f(5) = 14.$$

Άρα, η μέγιστη τιμή της f στο [0, 5] είναι ίση με 30 και παρουσιάζεται για $x = 1$, ενώ η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και παρουσιάζεται για $x = 4$.

● Για να εφαρμόσουμε το προηγούμενο θεώρημα απαιτείται να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_0. Όταν ο προσδιορισμός αυτός δεν είναι εύκολος ή είναι αδύνατος, τότε το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μπορεί να μας πληροφορήσει αν το x_0 είναι θέση τοπικού ακρότατου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και x_0 ένα σημείο του (α, β) στο οποίο η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη.

● Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο.

● Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = x + 2\sigma\upsilon\nu x,\ x \in (0, 2\pi).$$

Έχουμε

$$f'(x) = 1 - 2\eta\mu x \text{ και } f''(x) = -2\sigma\upsilon\nu x,$$

οπότε οι ρίζες της f' είναι οι $\frac{\pi}{6}$ και $\frac{5\pi}{6}$.

Για $x = \frac{\pi}{6}$, είναι $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$, ενώ για $x = \frac{5\pi}{6}$, είναι $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3} > 0$.

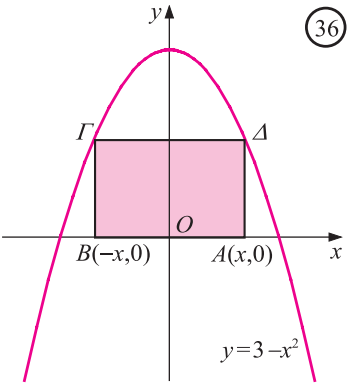
Έτσι έχουμε

α) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ και $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$, οπότε το $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

β) $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0$ και $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) > 0$, οπότε το $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να βρεθεί το $x \in [0, \sqrt{3}]$ έτσι, ώστε το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος να έχει μέγιστο εμβαδό.**



36

ΛΥΣΗ

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι

$$E(x) = (AB)(A\Delta) = 2x(3 - x^2) = -2x^3 + 6x.$$

Έχουμε $E'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x + 1)(x - 1)$. Οι ρίζες της $E'(x) = 0$ είναι οι $x = -1$, $x = 1$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της E φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

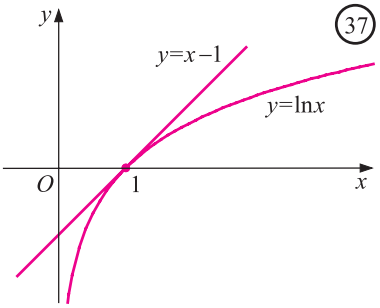
x	0		1		$\sqrt{3}$
$E'(x)$		+	0	−	
$E(x)$	0 min	↗	4 max	↘	0 min

Άρα, η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με 4 και παρουσιάζεται όταν $x = 1$.

2. **Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - 1 - \ln x$.**

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδειχτεί ότι $\ln x \le x - 1$, για κάθε $x > 0$.



37

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα, την $x = 1$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	↘		0 min	↗	

ii) Επειδή η f για $x = 1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$f(x) \ge f(1) \Leftrightarrow x - 1 - \ln x \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x \le x - 1 .$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 1$.

3. **Μία βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\Pi(x)$, σε ευρώ, κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής, σύμφωνα με τον τύπο $\Pi(x) = 40000 - 6x$. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 4000 ευρώ. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 1200 ευρώ για κάθε μονάδα προϊόντος, να βρεθεί πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.**

ΛΥΣΗ

Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων παραγωγής είναι

$$E(x) = x\Pi(x) = x(40000 - 6x) = -6x^2 + 40000x.$$

Το κόστος από την παραγωγή x μονάδων είναι

$$K(x) = 4000x.$$

Το ολικό κόστος μετά την πληρωμή του φόρου είναι:

$$K_{ολ}(x) = 4000x + 1200x = 5200x.$$

Επομένως, το κέρδος της βιομηχανίας είναι

$$\begin{aligned} P(x) &= E(x) - K_{ολ}(x) \\ &= -6x^2 + 40000x - 5200x \\ &= -6x^2 + 34800x. \end{aligned}$$

Έχουμε $P'(x) = -12x + 34800$, οπότε η $P'(x) = 0$ έχει ρίζα την $x = 2900$.

Η μονοτονία και τα ακρότατα της P στο $(0,+\infty)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0		2900		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	–	
$P(x)$		↗	50460 max	↘	

Επομένως, το μέγιστο κέρδος παρουσιάζεται όταν η βιομηχανία παράγει 2900 μονάδες από το προϊόν αυτό και είναι ίσο με 50460 χιλιάδες ευρώ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η παράγωγος μιας συνάρτησης f είναι

$$f'(x) = 3(x-1)^3(x-2)^2(x-3).$$

Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και για ποιες παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο;

2. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ ii) $g(x) = x^3 - 3x + 2$

iii) $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών των εξισώσεων:

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0, \quad x^3 - 3x + 2 = 0, \quad 2x^3 - 3x^2 - 1 = 0.$$

3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\le 1 \\ e^{1-x} & , \quad x>1 \end{cases}$ ii) $g(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & , \quad x<1 \\ x^2-4x+3 & , \quad x\ge 1 \end{cases}$.

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=e^x-x$ ii) $f(x)=x^x$, $x>0$.

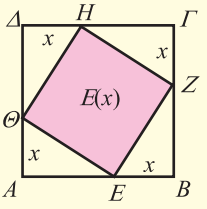
5. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x+1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=-1$ και $x_2=1$. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

6. Να αποδείξετε ότι, από όλα τα οικόπεδα σχήματος ορθογωνίου με εμβαδό 400 m^2, το τετράγωνο χρειάζεται τη μικρότερη περίφραξη.

7. Με συρματόπλεγμα μήκους 80 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

8. Μία ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $T(x)=x^2-\frac{x^3}{4}$, $0<x<3$. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x, να γίνει μέγιστος.

9. Δίνεται τετράγωνο $ABΓΔ$ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο $EZHΘ$ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του $ABΓΔ$,



i) να εκφράσετε την πλευρά EZ συναρτήσει του x.

ii) να βρείτε το x έτσι, ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του $EZHΘ$ να γίνει ελάχιστο.

10. Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x)=\frac{1}{3}x^3-20x^2+600x+1000$ ευρώ, για $0\le x\le 105$, ενώ η είσπραξη από την πώληση των x μονάδων είναι $E(x)=420x-2x^2$ ευρώ. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - x + 3,\ x \in [0, \pi]$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, \pi)$.

2. i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x + 3$$

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x\ln x \text{ και } h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

i) α) $e^x > 1 + x$ ii) α) $\sigma\upsilon\nu x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

β) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ β) $\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$

iii) α) $(1 + x)^\nu > 1 + \nu x$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$

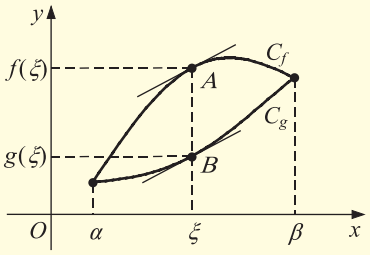
β) $(1+x)^\nu > 1 + \nu x + \frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 3$.

4. Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει

$$2f^3(x) + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1,$$

τότε η f δεν έχει ακρότατα.

5. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Το σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ είναι το σημείο στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή.
Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες.



6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2, \text{ με } \alpha < \beta < \gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

7. Με ένα σύρμα μήκους 4 m κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς x m και ένα τετράγωνο πλευράς y m.

i) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων συναρτήσει της πλευράς x του ισοπλεύρου τριγώνου.

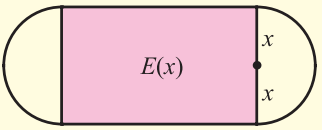
ii) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2}, 0\right)$.

i) Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

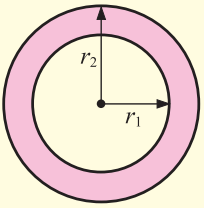
ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM.

9. Όπως γνωρίζουμε, ο στίβος του κλασικού αθλητισμού αποτελείται από ένα ορθογώνιο και δύο ημικύκλια. Αν η περίμετρος του στίβου είναι 400 m, να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου μέρους να γίνει μέγιστο.



10. Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώνουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 1000 ευρώ το άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 ευρώ. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή, ώστε να έχουμε τα περισσότερα έσοδα;

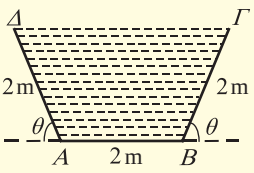
11. Έστω E το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος. Υποθέτουμε οτι τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $r_1 = 3$ cm και $r_2 = 5$ cm και ότι για $t > 0$ η ακτίνα r_1 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,05 cm/s, ενώ η ακτίνα r_2 αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 0,04 cm/s. Να βρείτε:



i) πότε θα μηδενιστεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και

ii) πότε θα μεγιστοποιηθεί το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου.

12. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή $ΑΒΓΔ$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

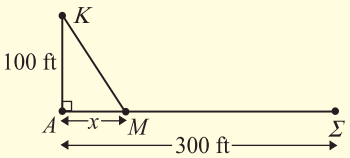


i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής $ΑΒΓΔ$ είναι ίσο με

$$E = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$$

ii) Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

13. Ένας κολυμβητής K βρίσκεται στη θάλασσα 100 ft[(1)] μακριά από το πλησιέστερο σημείο A μιας ευθύγραμμης ακτής, ενώ το σπίτι του $Σ$ βρίσκεται 300 ft μακρυά από το σημείο A. Υποθέτουμε ότι ο κολυμβητής μπορεί να κολυμβήσει με ταχύτητα 3 ft/s και να τρέξει στην ακτή με ταχύτητα 5 ft/s.

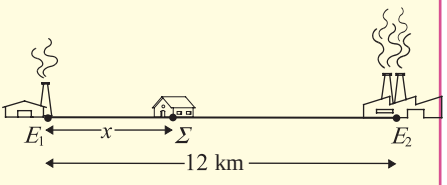


i) Να αποδείξετε οτι για να διανύσει τη διαδρομή $ΚΜΣ$ του διπλανού σχήματος χρειάζεται χρόνο

$$T(x) = \frac{\sqrt{100^2 + x^2}}{3} + \frac{300 - x}{5}\ .$$

ii) Για ποια τιμή του x ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο δυνατό χρόνο για να φθάσει στο σπίτι του;

14. Ένας εργολάβος επιθυμεί να χτίσει ένα σπίτι στο δρόμο που συνδέει δύο εργοστάσια E_1 και E_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 12 km και εκπέμπουν καπνό με παροχές P και



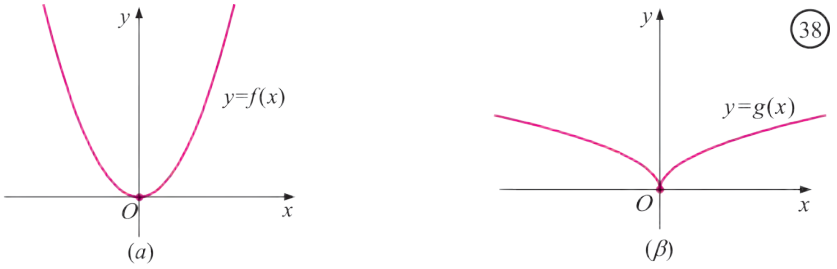
(1) 1 ft = 30,48 cm

8P αντιστοίχως. Αν η πυκνότητα του καπνού σε μια απόσταση d από ένα τέτοιο εργοστάσιο είναι ανάλογη της παροχής καπνού του εργοστασίου και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης d, να βρείτε σε ποια απόσταση x από το εργοστάσιο E_1 πρέπει ο εργολάβος να χτίσει το σπίτι για να έχει τη λιγότερη δυνατή ρύπανση. (Παροχή καπνού μιας καπνοδόχου ενός εργοστασίου λέγεται η ποσότητα του καπνού που εκπέμπεται από την καπνοδόχο στη μονάδα του χρόνου).

2.8 ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Κοίλα - κυρτά συνάρτησης

● Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sqrt{|x|}$ (Σχ. 38).



Οι πληροφορίες τις οποίες μας δίνει η πρώτη παράγωγος για τη συμπεριφορά κάθε μιας από τις δύο συναρτήσεις, όπως φαίνεται και στο σχήμα 38 είναι ίδιες. Δηλαδή οι συναρτήσεις,

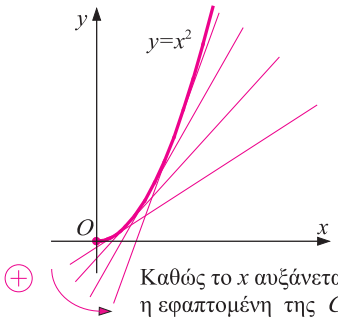
— είναι γνησίως φθίνουσες στο $(-\infty, 0]$

— είναι γνησίως αύξουσες στο $[0, +\infty)$

— παρουσιάζουν τοπικό ελάχιστο για $x = 0$, το οποίο είναι ίσο με 0.

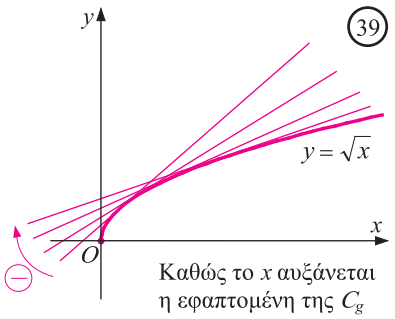
Όμως, οι συναρτήσεις αυτές έχουν διαφορετικές γραφικές παραστάσεις. Δηλαδή, "ανέρχονται" και "κατέρχονται" με διαφορετικό τρόπο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$. Επομένως, οι πληροφορίες που μας δίνει το πρόσημο της πρώτης παραγώγου δεν είναι ικανές για τη χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Ας θεωρήσουμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο διάστημα $[0, +\infty)$.



Καθώς το x αυξάνεται η εφαπτομένη της C_f στρέφεται κατά τη θετική φορά

(α)



Καθώς το x αυξάνεται η εφαπτομένη της C_g στρέφεται κατά την αρνητική φορά

(β)

Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται:

— η κλίση $f'(x)$ της C_f αυξάνεται, δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, ενώ

— η κλίση της $g'(x)$ της C_g ελαττώνεται, δηλαδή η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

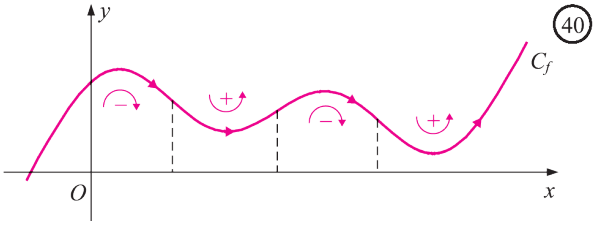
Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $(0,+\infty)$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι η g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(0,+\infty)$. Γενικότερα, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μία συνάρτηση f *συνεχής* σ' ένα διάστημα Δ και *παραγωγίσιμη* στο *εσωτερικό* του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα άνω** ή είναι **κυρτή** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο *εσωτερικό* του Δ.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο *εσωτερικό* του Δ.

Εποπτικά, μία συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ, όταν ένα κινητό, που κινείται πάνω στη C_f, για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά τη θετική (αντιστοίχως αρνητική) φορά. (Σχ. 40)



Για να δηλώσουμε στον πίνακα μεταβολών ότι μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σε ένα διάστημα Δ, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\smile$ (αντιστοίχως $\frown$).

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι, αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση (Σχ. 39), με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

● Η μελέτη μιας συνάρτησης ως προς τα κοίλα και κυρτά διευκολύνεται με τη βοήθεια του επόμενου θεωρήματος, που είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου ορισμού και του θεωρήματος μονοτονίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

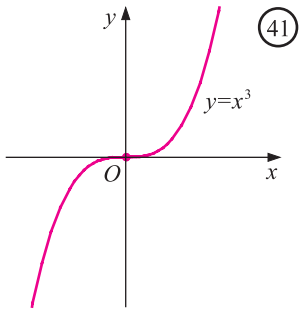
Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής* σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο *εσωτερικό* του Δ.

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε *εσωτερικό* σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3$ (Σχ. 41),

— είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, αφού $f''(x) = 6x < 0$, για $x \in (-\infty, 0)$ και η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ ενώ,

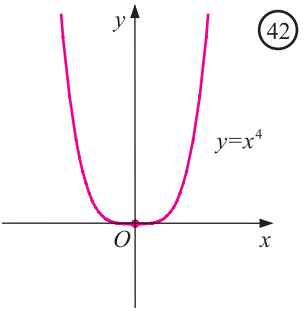
— είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$, αφού $f''(x) = 6x > 0$, για $x \in (0, +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.



41

ΣΧΟΛΙΟ

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.



42

Σημεία καμπής

Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ (Σχ. 41) παρατηρούμε ότι,

(α) στο σημείο $O(0, 0)$ η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη και

(β) εκατέρωθεν του $x_0 = 0$, η κυρτότητα της καμπύλης αλλάζει.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η γραφική παράσταση της f "κάμπτεται" στο σημείο $O(0, 0)$. Το σημείο O λέγεται **σημείο καμπής της C_f**. Γενικά δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται **σημείο καμπής** της γραφικής παράστασης της f.

Όταν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, τότε λέμε ότι η **f παρουσιάζει στο x_0 καμπή** και το x_0 λέγεται **θέση σημείου καμπής**. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f "διαπερνά" την καμπύλη. Αποδεικνύεται, επιπλέον, ότι:

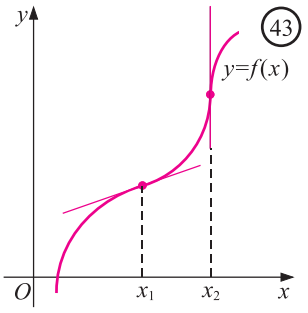
ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ στα οποία η f'' είναι διαφορετική από το μηδέν δεν είναι θέσεις σημείων καμπής. Επομένως, *οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής* μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

i) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και**

ii) **τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''** (Σχ. 43).



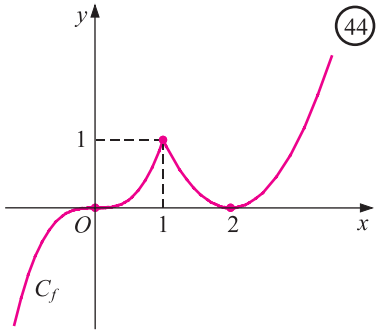
43

Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < 1 \\ (x-2)^4 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad (\Sigma\chi.\ 44)$$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$ με

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & , \quad x < 1 \\ 12(x-2)^2 & , \quad x > 1 \end{cases}.$$



44

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	κοίλη		κυρτή		κυρτή		κυρτή		

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία 0 και 2, ενώ δεν υπάρχει στο 1, οι πιθανές θέσεις των σημείων καμπής είναι τα σημεία 0, 1 και 2. Όμως, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα και στο σχήμα, τα σημεία 1 και 2 δεν είναι θέσεις σημείων καμπής, αφού σ' αυτά η f δεν αλλάζει κυρτότητα, ενώ το σημείο 0 είναι θέση σημείου καμπής, αφού στο $O(0, f(0))$ υπάρχει εφαπτομένη της C_f και η f στο 0 αλλάζει κυρτότητα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι από τις πιθανές θέσεις σημείων καμπής, θέση σημείου καμπής είναι μόνο το 0, εκατέρωθεν του οποίου η f'' αλλάζει πρόσημο. Γενικά:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να προσδιορισθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5,$$

είναι κυρτή ή κοίλη και να βρεθούν τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

ΛΥΣΗ

i) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x) = 12(x-1)(x+1)$. Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		∪	0 Σ.Κ	∩	0 Σ.Κ	∪	

Επομένως, η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $[-1, 1]$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στα σημεία –1, 1 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο, τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(1,0)$ είναι σημεία καμπής της C_f. Τα συμπεράσματα αυτά καταχωρούνται στην τελευταία γραμμή του παραπάνω πίνακα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων

i) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2$ ii) $g(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{x^3}$.

2. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = xe^{1-x}$ ii) $g(x) = x^2(2\ln x - 5)$

iii) $h(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & , \quad x < 0 \\ -x^3 + 3x^2 + 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$.

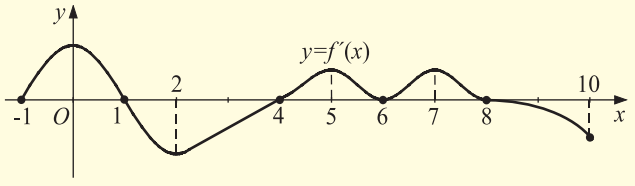
3. Ομοίως για τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = e^{-x^2}$ ii) $g(x) = \varepsilon\varphi x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

iii) $h(x) = x\,|x|$ iv) $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$

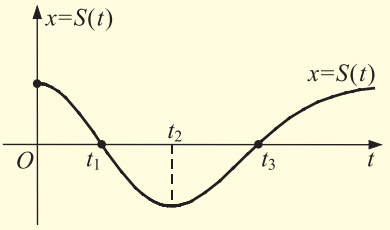
v) $\psi(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & , \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$.

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x = S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:



i) Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά.

ii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-2, 2)$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

5. Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, για την οποία ισχύει

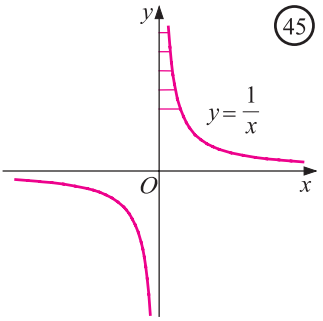
$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

2.9 ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

Ασύμπτωτες

● Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (Σχ. 45).



45

Όπως είδαμε:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο 0 από θετικές τιμές, η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπέσει με την ευθεία $x = 0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $x = 0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.

● Για την ίδια συνάρτηση παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο $+\infty$, η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπέσει με την ευθεία $y = 0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y = 0$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$.

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι, καθώς το x τείνει στο $-\infty$, η γραφική παράσταση της f τείνει να συμπέσει με την ευθεία $y = 0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y = 0$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $-\infty$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

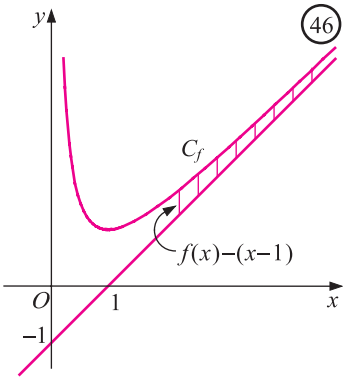
Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

● Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x}$$

και η ευθεία

$$g(x)=x-1 \qquad (\Sigma\chi.\ 46).$$



Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, καθώς το x τείνει στο $+\infty$, οι τιμές της f προσεγγίζουν τις τιμές της g. Δηλαδή, η γραφική παράσταση της f προσεγγίζει την ευθεία $y=x-1$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία $y=x-1$ είναι **ασύμπτωτη (πλάγια)** της C_f στο $+\infty$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0,$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(\lambda x+\beta)]=0.$$

Η ασύμπτωτη $y=\lambda x+\beta$ είναι **οριζόντια** αν $\lambda=0$, ενώ αν $\lambda\neq 0$ λέγεται **πλάγια** ασύμπτωτη. Για τον προσδιορισμό των ασυμπτώτων μιας συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R},$$

αντιστοίχως

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]=\beta\in\mathbb{R}.$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$ αντιστοίχως $(-\infty, \alpha)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι συνεχής σ' αυτό, θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0 και πλάγιες στο $-\infty$ και $+\infty$.

Είναι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$

Άρα, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. Εξετάζουμε, τώρα, αν υπάρχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y = \lambda x + \beta$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1, \text{ οπότε } \lambda = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ οπότε } \beta = 0.$$

Επομένως, η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $-\infty$.

Κανόνες de L' Hospital

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^3}$. Για να εξετάσουμε αν η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, χρειάζεται να υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^3}. \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι, αν εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου πηλίκου, παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\dfrac{0}{0}$. Οι μέθοδοι που εφαρμόσαμε στο κεφάλαιο του ορίου για την άρση της απροσδιοριστίας (απλοποίηση κτλ.) δεν εφαρμόζονται στο πιο πάνω όριο.

Για τα όρια πηλίκου που οδηγούν σε απροσδιόριστες μορφές $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα (η απόδειξή τους παραλείπεται), που είναι γνωστά ως **κανόνες de l' Hospital.**

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο $\left(\textbf{μορφή } \dfrac{0}{0}\right)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Έτσι το παραπάνω όριο (1) υπολογίζεται ως εξής:
Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}(e^x - 1) = 0, \ \lim_{x\to 0} x^3 = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{3x^2} = +\infty$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^3} = +\infty,$$

που σημαίνει ότι η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο $\left(\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Για παράδειγμα, ο υπολογισμός του $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$ γίνεται ως εξής:

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Το θεώρημα 2 ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$.

2. Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$. Να αποδειχτεί ότι:

i) Η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

ii) Η ευθεία $y = x - 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (x+2)] = 0.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4e^x}{e^x+1}=\frac{-4\cdot 0}{0+1}=0.$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\left[4-\frac{4e^x}{e^x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^x+1}=0.$$

2. **Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης**

$$f(x)=\frac{x}{e^x}.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Θα αναζητήσουμε, επομένως, ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

- Για να είναι η $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί τα όρια $\lambda=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$, η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

- Για να είναι η $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αρκεί τα όρια $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\lambda x]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί. Έχουμε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0 \text{ και}$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$$

$$\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'} \qquad \text{(Κανόνας De L' Hospital)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Άρα, η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ ii) $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

iii) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ iv) $f(x)=\begin{cases} x & ,\ x\le 0\\ \dfrac{1}{x} & ,\ x>0\end{cases}$.

2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ ii) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-1}$ ii) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ iii) $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{\ln(x+1)}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x^2}{x^4}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}$ και οι ευθείες ε_1: $y=-x-1$ και ε_2: $y=x+1$. Να αποδείξετε ότι

i) Η ε_1 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, ενώ η ε_2 είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii) Για κάθε $x\in\mathbf{R}$ ισχύει $x^2+2x+2>(x+1)^2\ge 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $+\infty$.

2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f όταν:

i) $f(x)=\dfrac{x^2}{2^x}$ ii) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

3. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\alpha & , \quad x\le 0\\ e^{\beta x} & , \quad x>0\end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x} & , \quad 0<x\ne 1\\ -1 & , \quad x=1\end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής ii) $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1} & , \quad \text{αν} \quad x\ne 1\\ 0 & , \quad \text{αν} \quad x=1\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases}x^2 & , \quad \text{αν} \quad x\le 1\\ 1+\dfrac{\ln x}{x} & , \quad \text{αν} \quad x>1\end{cases}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, ενώ

ii) Η g είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x=0\\ (1-e^{-x})\ln x & , \quad x\in(0,1]\end{cases}.$$

i) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}x\ln x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $O(0,0)$.

2.10 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς, με τη βοήθεια των πληροφοριών που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, μπορούμε να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με ικανοποιητική ακρίβεια. Η πορεία την οποία ακολουθούμε λέγεται **μελέτη της συνάρτησης** και περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1ο Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f.

2ο Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο πεδίο ορισμού της.

3ο Βρίσκουμε τις παραγώγους f' και f'' και κατασκευάζουμε τους πίνακες των προσήμων τους. Με τη βοήθεια του προσήμου της f' προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f, ενώ με τη βοήθεια του προσήμου της f'' καθορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

4ο Μελετούμε τη "συμπεριφορά" της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της (οριακές τιμές, ασύμπτωτες, κτλ.)

5ο Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω συμπεράσματα σ' ένα συνοπτικό πίνακα που λέγεται και **πίνακας μεταβολών της f** και με τη βοήθειά του χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f. Για καλύτερη σχεδίαση της C_f κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της f.

ΣΧΟΛΙΟ

1) Όπως είναι γνωστό, αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι *άρτια*, τότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$, ενώ αν είναι *περιττή*, η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O. Επομένως, για τη μελέτη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορούμε να περιοριστούμε στα $x \in A$, με $x \geq 0$.

2) Αν μια συνάρτηση f είναι *περιοδική* με περίοδο T, τότε περιορίζουμε τη μελέτη της C_f σ' ένα διάστημα πλάτους T.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση**

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 11.$$

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

3. Έχουμε

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3).$$

Οι ρίζες της f' είναι οι $x = 3$, $x = 0$ (διπλή) και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↘	-16	↗	
					Τ.Ε.		

Έχουμε επίσης

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

Οι ρίζες της f'' είναι οι $x = 0$, $x = 2$ και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και βρίσκουμε τα σημεία καμπής.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		∪	11	∩	-5	∪	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

4) Η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ και $-\infty$, αφού είναι πολυωνυμική τέταρτου βαθμού. Είναι όμως:

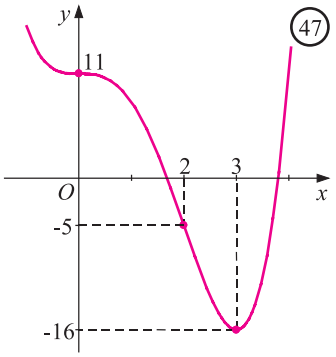
$$\lim_{x\to+\infty}(x^4 - 4x^3 + 11) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}(x^4 - 4x^3 + 11) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty.$$

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	11 Σ.Κ.	↘	-5 Σ.Κ.	↗	-16 Τ.Ε.	↗	$+\infty$



2. **Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση**

$$f(x)=\frac{x^2-x+4}{x-1}.$$

ΛΥΣΗ

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{1\}$.

2. Η f είναι συνεχής ως ρητή.

3. Έχουμε

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}\right)'=\frac{(2x-1)(x-1)-x^2+x-4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}.$$

Οι ρίζες της f' είναι -1, 3 και το πρόσημό της δίνονται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		-3 T.M.	↘		↘	5 T.E.	↗	

Έχουμε επίσης

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4}=\frac{8}{(x-1)^3}.$$

Η f'' δεν έχει ρίζες και το πρόσημό της δίνεται στο διπλανό πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	∩			∪	

4) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Εξετάζουμε τώρα αν υπάρχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+4}{x^2-x}=1, \text{ οπότε } \lambda=1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x-1}=0, \text{ οπότε } \beta=0.$$

Επομένως, η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

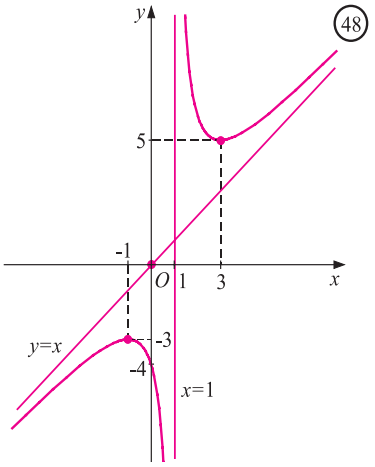
Ανάλογα βρίσκουμε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+4}{x-1} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+4}{x-1} = +\infty.$$

5) Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της f και χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3 (T.M.)	↘	$+\infty$	↘	5 (T.E.)	↗	$+\infty$



48

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ ii) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ iii) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

2. Ομοίως τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ ii) $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-1}$.

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = x + \eta\mu x$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και $g(x)=x^2-3x+3,\ x\in(0,+\infty)$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(1,1)$.

ii) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g στο διάστημα $(0,+\infty)$.

2. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με

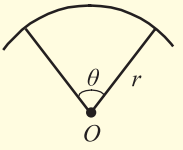
$$f(0)=g(0) \text{ και } f'(x)>g'(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι

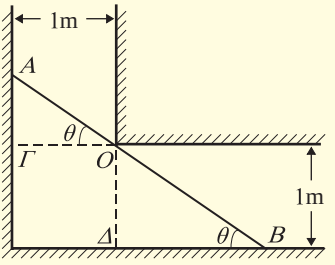
$$f(x)<g(x) \text{ στο } (-\infty,0) \text{ και } f(x)>g(x) \text{ στο } (0,+\infty).$$

3. Ισοσκελές τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με ακτίνα 1. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του είναι $E=(1+\text{συν}\theta)\text{ημ}\theta$. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta\in(0,\pi)$ για την οποία εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

4. Ένα σύρμα μήκους 20 m διατίθεται για την περίφραξη ενός ανθόκηπου σχήματος κυκλικού τομέα. Να βρείτε την ακτίνα r του κύκλου, αν επιθυμούμε να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια του κήπου.



5. Δύο διάδρομοι πλάτους 1 m τέμνονται κάθετα (Σχήμα). Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στη γωνία.



Υπόδειξη:

i) Να εκφράσετε τα OA, OB συναρτήσει της γωνίας θ, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $(AB)=\dfrac{1}{\text{ημ}\theta}+\dfrac{1}{\text{συν}\theta}=f(\theta)$.

iii) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ, για την οποία το AB γίνεται ελάχιστο.

6. i) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^{\alpha}$ για κάθε $\alpha > e$.

iii) Να αποδείξετε ότι για $x>0$ ισχύει $2^x = x^2 \Leftrightarrow f(x) = f(2)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x = x^2$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2, x_2 = 4$.

7. i) Αν $\alpha, \beta > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x + \beta^x \geq 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$.

ii) Αν $\alpha > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x \geq x+1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

8. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι κυρτή, ενώ η $g(x) = \ln x$ είναι κοίλη.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ και της C_g στο $B(1,0)$.

iii) Να αποδείξετε ότι:

α) $e^x \geq x+1, \quad x \in \mathbb{R}$ β) $\ln x \leq x-1, \quad x \in (0,+\infty)$.

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

iv) Η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.

9. i) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

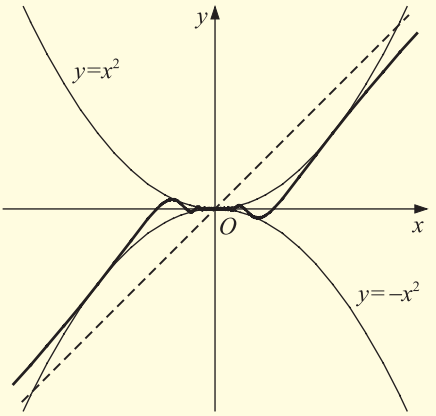
$$f(x) = e^x - \lambda x, \lambda > 0.$$

ii) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$e^x \geq \lambda x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii) Για την τιμή του λ που θα βρείτε παραπάνω να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$.



Να αποδείξετε ότι

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια ότι η ευθεία $y = 0$ (ο άξονας $x'x$) είναι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0, 0)$.

ii) Ο άξονας $x'x$ έχει με την C_f άπειρα κοινά σημεία, παρόλο που εφάπτεται της C_f.

iii) Η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

11. Α. Έστω μια συνάρτηση φ τέτοια, ώστε

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0 \text{ και } \varphi''(x) + \varphi(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $\psi(x) = [\varphi'(x)]^2 + [\varphi(x)]^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της.

ii) $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Έστω δύο συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε:

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1 \text{ και } f''(x) + f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

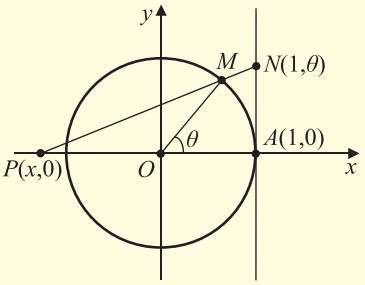
$$g(0) = 1,\ g'(0) = 0 \text{ και } g''(x) + g(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) Οι συναρτήσεις $\varphi(x) = f(x) - \eta\mu x$ και $\psi(x) = g(x) - \sigma\upsilon\nu x$ ικανοποιούν τις υποθέσεις (1) του ερωτήματος A.

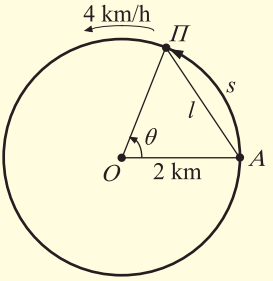
ii) $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα 1 cm και η ε εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο A. Το τόξο AM είναι θ rad και το ευθ. τμήμα AN είναι θ cm. Η ευθεία MN τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $P(x, 0)$. Να δείξετε ότι:



i) $x = \dfrac{\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\theta - \eta\mu\theta} = x(\theta)$ ii) $\lim\limits_{\theta\to 0} x(\theta) = -2$.

13. Ένας πεζοπόρος Π ξεκινάει από ένα σημείο A και βαδίζει γύρω από μια κυκλική λίμνη ακτίνας $\rho = 2$ km με ταχύτητα $\upsilon = 4$ km/h. Αν S είναι το μήκος του τόξου $A\Pi$ και ℓ το μήκος της απόστασης $A\Pi$ του πεζοπόρου από το σημείο εκκίνησης τη χρονική στιμή t:



A) Να αποδείξετε ότι

i) $\theta = \dfrac{S}{2}$ και $\ell = 4\eta\mu\dfrac{\theta}{2}$, ii) $S = 4t$, $\theta = 2t$ και $\ell = 4\eta\mu t$.

B) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ℓ ως προς τον χρόνο t. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ℓ ως προς τον χρόνο t, όταν

α) $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, β) $\theta = \pi$ και γ) $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$;

14. Ένας αγρότης θέλει να προσλάβει εργάτες για να μαζέψουν 12500 κιλά ντομάτες. Κάθε εργάτης μαζεύει 125 κιλά την ώρα και πληρώνεται 6 ευρώ την ώρα. Για το συντονισμό και επιστασία των εργατών ο αγρότης θα προσλάβει και έναν επιστάτη τον οποίο θα πληρώνει 10 ευρώ την ώρα. Ο αγρότης, επιπλέον, θα πληρώσει στο σωματείο των εργατών εισφορά 10 ευρώ για τον επιστάτη και κάθε εργάτη. Να βρείτε πόσους εργάτες πρέπει να προσλάβει ο αγρότης για να του κοστίσει το ελάχιστο δυνατόν και ποιο θα είναι το ελάχιστο κόστος.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντηση σας.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$. Α Ψ

2. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$. Α Ψ

3. Αν οι f, g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες. Α Ψ

4. Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f Α Ψ

β) το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f Α Ψ

5. α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. Α Ψ

6. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής. Α Ψ

7. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής. Α Ψ

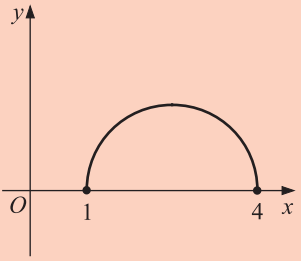
8. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. Α Ψ

9. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

α) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ Α Ψ

β) $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$ Α Ψ

10. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:



i) το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$ Α Ψ

ii) το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$ Α Ψ

iii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,4)$ Α Ψ

iv) υπάρχει $x_0 \in (1,4) : f'(x_0) = 0$. Α Ψ

11. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει:

α) μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,1)$ Α Ψ

β) μια, ακριβώς, ρίζα στο $(-1,0)$ Α Ψ

γ) τρεις πραγματικές ρίζες Α Ψ

12. Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0) = 4,\ f'(0) = 3,\ f'(5) = 6, g(0) = 5, g'(0) = 1, g'(4) = 2,$ τότε $(f \circ g)'(0) = (g \circ f)'(0)$ Α Ψ

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με:

Α) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Β) $\dfrac{4}{3}$ Γ) $\sqrt{3}$ Δ) 0 Ε) $\dfrac{3}{4}$.

2. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

Α) $\dfrac{1}{x^2}$ Β) $-\dfrac{2}{x^2}$ Γ) $-\dfrac{1}{x^2}$ Δ) $-\dfrac{2}{x}$ Ε) 0

3. Αν $f(x)=5^{3x}$ τότε η $f'(x)$ ισούται με:

Α) $3x5^{3x-1}$ Β) $\dfrac{5^{3x}}{3\ln 5}$ Γ) $3\cdot 5^{2x}$

Δ) $3\cdot 5^{3x}$ Ε) $5^{3x}\ln 125$

4. Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu^3(x+1)$ τότε η $f'(\pi)$ ισούται με:

Α) $3\sigma\upsilon\nu^3(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ Β) $3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

Γ) $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ Δ) $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

5. Αν $f(x)=(x^2-1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

Α) 1 Β) -1 Γ) 0

Δ) 27 Ε) δεν υπάρχει.

6. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

Α) 0 Β) $\dfrac{1}{4}$ Γ) $\dfrac{1}{2}$ Δ) 1 Ε) 2.

7. Αν $f(x)=e^{\beta x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ και $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με:

Α) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}$ Β) $\dfrac{\alpha^2}{\alpha+1}$ Γ) $\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}$

Δ) $\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$ Ε) $\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$.

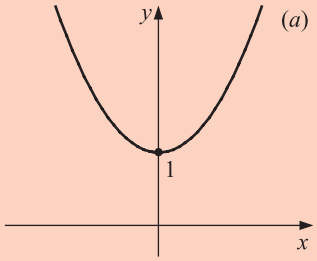
8. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=0$, τότε:

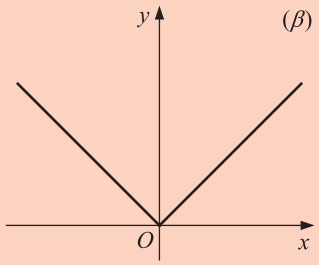
Α) $f(1)=-1$ Β) $f(-1)>0$

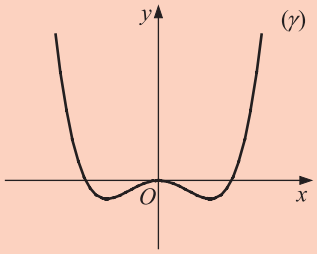
Γ) $f(1)>0$ Δ) $f(-1)=0$.

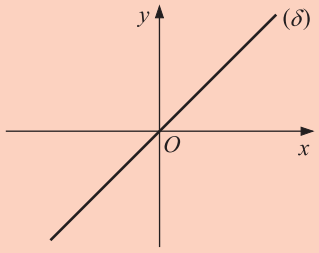
III.

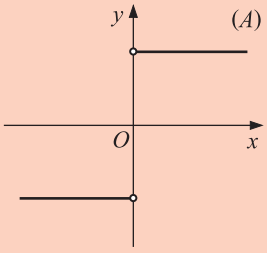
1. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.

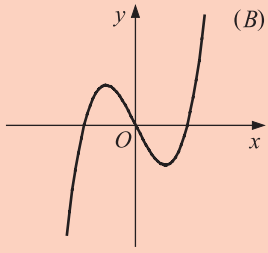


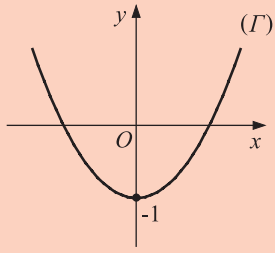


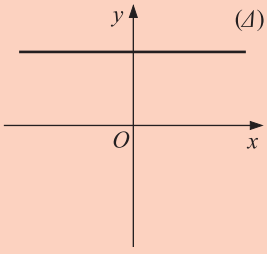


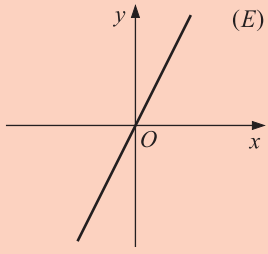


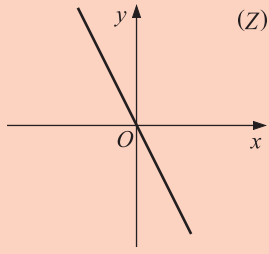












2. Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$.

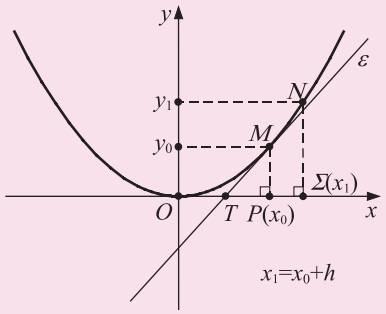
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	**ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ**
1. $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$	Α. $y = 2$
2. $f(x)=-x+1+\frac{1}{e^x}$	Β. $y = x - 1$
3. $f(x)=2+\frac{3}{x-2}$	Γ. $y = -x + 1$
	Δ. $y = x$
	Ε. $y = -x$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η έννοια της παραγώγου

Οι αρχαίοι Έλληνες ονόμαζαν εφαπτομένη μιας καμπύλης την ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο μ' αυτήν, χωρίς να την τέμνει και την κατασκεύαζαν με βάση γεωμετρικές ιδιότητες που απορρέουν απ' αυτόν τον ορισμό. Έτσι ήταν γνωστός ο τρόπος κατασκευής εφαπτομένων στον κύκλο και τις κωνικές τομές (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή). Επίσης, με προσφυγή σε κινηματικές μεθόδους, ο Αρχιμήδης είχε επινοήσει μέθοδο κατασκευής της εφαπτομένης μιας καμπύλης που είναι σήμερα γνωστή ως "έλικα του Αρχιμήδη".

Η επόμενη εξέλιξη στο ζήτημα αυτό έγινε στις αρχές του 17ου αιώνα, όταν άρχισε η συστηματική εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων στη γεωμετρία. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει τον τρόπο με τον οποίο η Άλγεβρα εφαρμόζεται στον προσδιορισμό της εφαπτομένης μιας παραβολής.



Έστω $y = f(x) = x^2$ η εξίσωση μιας παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων και $M(x_0, y_0)$ ένα σημείο της, στο οποίο ζητείται να κατασκευαστεί μια εφαπτομένη ε. Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει αν προσδιορίσουμε ένα άλλο χαρακτηριστικό σημείο της ε, όπως π.χ. το σημείο T στο οποίο τέμνει τον άξονα των τετμημένων.

Θεωρούμε ένα άλλο σημείο της παραβολής, το $N(x_1, y_1)$, πολύ γειτονικό του M, τέτοιο ώστε $x_1 = x_0 + h$ (το h θεωρείται εδώ μια απειροελάχιστη μεταβολή του x_0). Στην περίπτωση αυτή τα ορθογώνια τρίγωνα MPT και $N\Sigma T$ μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση όμοια και άρα θα ισχύει κατά προσέγγιση η αναλογία $\frac{N\Sigma}{MP} = \frac{\Sigma T}{TP}$. Αν θέσουμε $TP = s$, τότε διαδοχικά θα ισχύει:

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{s+h}{s} \text{ ή } y_1 = y_0\left(1+\frac{h}{s}\right) \text{ ή } y_1 - y_0 = y_0\frac{h}{s} \text{ ή } \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{y_0}{s}. \quad (1)$$

Το πρώτο μέλος αυτής της κατά προσέγγιση ισότητας γράφεται:

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h$$

και έτσι η (1) γίνεται $2x_0 + h = \frac{y_0}{s}$. Αν τώρα θέσουμε, όπως οι μαθηματικοί του 17ου αιώνα, $h = 0$ βρίσκουμε από την τελευταία ότι $2x_0 = \frac{y_0}{s}$ ή $s = \frac{y_0}{2x_0}$. Γνωρίζοντας λοιπόν το σημείο επαφής $M(x_0, y_0)$, προσδιορίζουμε από την τελευταία το μήκος $TP = s$

που μας δίνει αμέσως το σημείο *T*. Η ευθεία *MT* είναι η ζητούμενη εφαπτομένη της παραβολής. Η προηγούμενη διαδικασία ήταν ένας από τους δρόμους που οδήγησαν ιστορικά, στην έννοια της παραγώγου.

Κανόνες παραγώγισης

Στο δεύτερο μισό του 17ου αιώνα, οι μαθηματικοί είχαν κατορθώσει να μετασχηματίσουν όλη τη μακροσκελή διαδικασία παραγώγισης σε εφαρμογή ορισμένων κανόνων και τύπων, με τη βοήθεια κατάλληλα επιλεγμένων συμβόλων. Πρωτοπόροι προς αυτήν την κατεύθυνση υπήρξαν οι I. Newton και ο G. Leibniz. Ο Leibniz συμβόλιζε την απειροελάχιστη μεταβολή μιας ποσότητας x με dx (διαφορικό του x)· έτσι, π.χ. για τη συνάρτηση $y = x^2$ του προηγούμενου παραδείγματος, η αντίστοιχη μεταβολή του y (διαφορικό του y) ήταν:

$$dy = d(x^2) = (x + dx)^2 - x^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2.$$

Παραλείποντας την πολύ μικρή (συγκρινόμενη με τις άλλες) ποσότητα $(dx)^2$ προέκυπτε η $dy = 2xdx$ (εδώ η παράγωγος $2x$ ονομάζονταν "διαφορικός συντελεστής") και τελικά η $\frac{dy}{dx} = 2x$, ένας συμβολισμός που διατηρείται μέχρι σήμερα, χωρίς όμως να έχει νόημα πηλίκου. Με τον τρόπο αυτό ο Leibniz απέδειξε το 1677 τον κανόνα για τον υπολογισμό της μεταβολής του γινομένου δύο μεταβλητών x και y, που αποτελεί μια "πρωτόγονη" μορφή του σημερινού κανόνα της παραγώγου ενός γινομένου συναρτήσεων

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x + dx)(y + dy) - xy \\ &= xy + xdy + ydx + dxdy - xy \\ &= xdy + ydx + dxdy. \end{aligned}$$

Παραλείποντας και εδώ την πολύ μικρή ποσότητα $dxdy$, παίρνουμε τη σχέση

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

Με την εισαγωγή και καθιέρωση αυτών των κανόνων και συμβολισμών, η έννοια της παραγώγου εξελίχθηκε σ' ένα εξαιρετικά αποτελεσματικό εργαλείο και διεύρυνε σε μεγάλο βαθμό τις εφαρμογές της μαθηματικής ανάλυσης. Παράλληλα όμως, οι ασάφειες που επισημάναμε αποτελούσαν μια διαρκή πρόκληση για τους μαθηματικούς που αντιμετώπιζαν με κριτικό πνεύμα τα θεμέλια της επιστήμης τους. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός αυτής της έννοιας, που στηρίζεται στην έννοια του ορίου, δόθηκε για πρώτη φορά το 1823 από τον A.L. Cauchy:

"*Όταν η συνάρτηση $y = f(x)$ παραμένει συνεχής σ' ένα διάστημα της μεταβλητής x και δοθεί σ' αυτή τη μεταβλητή μια τιμή που ανήκει σ' αυτό το διάστημα, τότε κάθε απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει μια απειροελάχιστη αύξηση της συνάρτησης. Συνεπώς, αν τεθεί $\Delta x = i$, τότε οι δυο όροι του πηλίκου διαφορών*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

θα είναι απειροελάχιστες ποσότητες. Αλλά ενώ αυτοί οι δυο όροι θα προσεγγίζουν επ' άπειρον και ταυτόχρονα το όριο μηδέν, το πηλίκο μπορεί να συγκλίνει προς κάποιο άλλο όριο, θετικό ή αρνητικό. Αυτό το όριο, όταν υπάρχει έχει μια ορισμένη τιμή για κάθε συγκεκριμένο x, αλλά μεταβάλλεται μαζί με το x.
Η μορφή της νέας συνάρτησης που θα εκφράζει το όριο του λόγου

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$

θα εξαρτάται από τη μορφή της δοσμένης συνάρτησης $y = f(x)$.
Για να ξεχωρίσουμε αυτήν την εξάρτηση, δίνουμε στη νέα συνάρτηση το όνομα ***παράγωγος συνάρτηση*** *και τη συμβολίζουμε, με τη βοήθεια ενός τόνου,* y' *ή* $f'(x)$".
Με αφετηρία αυτόν τον ορισμό, ο Cauchy υπολόγισε τις παραγώγους των βασικών συναρτήσεων και απέδειξε τους κανόνες της παραγώγισης. Π.χ. για τον ιδιαίτερα σημαντικό κανόνα της παραγώγου μιας σύνθετης συνάρτησης, έδωσε την ακόλουθη απόδειξη:
"Έστω z μια δεύτερη συνάρτηση του x, συνδεόμενη με την πρώτη $y = f(x)$ *μέσω του τύπου* $z = F(y)$. *Η z ή* $F[f(x)]$ *είναι αυτή που ονομάζεται συνάρτηση μιας συνάρτησης της μεταβλητής x και αν οι απειροελάχιστες και ταυτόχρονες αυξήσεις των x, y και z συμβολιστούν με* Δx, Δy, Δz *αντίστοιχα, τότε θα είναι*

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Από αυτήν, περνώντας στα όρια, έχουμε

$$z' = F'(y)\cdot y' = F'[f(x)]\cdot f'(x)"^{(*)}$$

(*) Ένα αδύνατο σημείο αυτής της απόδειξης, που αφορά την ισότητα (1), είναι ότι για μικρές, μη μηδενικές τιμές του Δx, μπορεί να ισχύει $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 0$.

3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

3.1 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Αρχική συνάρτηση

Πολλές φορές στην πράξη παρουσιάζονται προβλήματα, που η λύση τους απαιτεί πορεία αντίστροφη της παραγώγισης. Τέτοια προβλήματα είναι για παράδειγμα τα παρακάτω:

— Η εύρεση της θέσης $S(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστή η ταχύτητά του $\upsilon(t)$ που, όπως γνωρίζουμε, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = S(t)$.

— Η εύρεση της ταχύτητας $\upsilon(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστή η επιτάχυνσή του $\gamma(t)$ που, όπως γνωρίζουμε, είναι η παράγωγος της συνάρτησης $\upsilon = \upsilon(t)$.

— Η εύρεση του πληθυσμού $N(t)$ μιας κοινωνίας βακτηριδίων τη χρονική στιγμή t, αν είναι γνωστός ο ρυθμός αύξησης $N'(t)$ του πληθυσμού.

Το κοινό χαρακτηριστικό των προβλημάτων αυτών είναι ότι, δίνεται μια συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μια άλλη συνάρτηση F για την οποία να ισχύει $F'(x) = f(x)$ σε ένα διάστημα Δ. Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ**[1] ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta .$$

[1] Αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $F(x) = x^3$ είναι μια παράγουσα της $f(x) = 3x^2$ στο $\mathbb{R}$, αφού $(x^3)' = 3x^2$. Παρατηρούμε ότι και όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = x^3 + c = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο $\mathbb{R}$, αφού $(x^3 + c)' = 3x^2$. Γενικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής
$$G(x) = F(x) + c, \; c \in \mathbb{R},$$
είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή
$$G(x) = F(x) + c, \; c \in \mathbb{R}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού
$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε
$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta. \blacksquare$$

Αόριστο ολοκλήρωμα

Το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της f στο Δ**, συμβολίζεται $\int f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα εφ του x ντε x". Δηλαδή,

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \; c \in \mathbb{R},$$

όπου F μια παράγουσα της f στο Δ.

Για παράδειγμα,

$$\int \text{συν}x dx = \text{ημ}x + c, \text{ αφού } (\text{ημ}x)' = \text{συν}x.$$

Από τον τρόπο που ορίστηκε το αόριστο ολοκλήρωμα προκύπτει ότι:

Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c\,,\ c \in \mathbb{R}$$

Η διαδικασία εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος είναι αντίστροφη πορεία της παραγώγισης και λέγεται **ολοκλήρωση**. Η σταθερά c λέγεται **σταθερά ολοκλήρωσης**.
Από τον πίνακα των παραγώγων βασικών συναρτήσεων βρίσκουμε τον παρακάτω πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων.
Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε **διάστημα** στο οποίο οι παραστάσεις του x που εμφανίζονται έχουν νόημα.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ			
1.	$\int 0dx = c$	6.	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$
2.	$\int 1dx = x + c$	7.	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \varepsilon\varphi x + c$
3.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + c$	8.	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx = -\sigma\varphi x + c$
4.	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ \ \alpha \neq -1$	9.	$\int e^x dx = e^x + c$
5.	$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$	10.	$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + c$

Συνέπεια του ορισμού του αόριστου ολοκληρώματος και των κανόνων παραγώγισης είναι οι εξής δύο ιδιότητες:

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ, τότε

- $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx\,,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$
- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους έχουμε για παράδειγμα:

$$\int 4x^2 dx = 4\int x^2 dx = 4\frac{x^3}{3} + c$$

$$\int (3\eta\mu x - 2e^x)dx = \int 3\eta\mu x dx - \int 2e^x dx$$

$$= 3\int \eta\mu x dx - 2\int e^x dx$$

$$= -3\sigma\upsilon\nu x - 2e^x + c$$

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{3x}{\sqrt{x}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 3\int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + c.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί συνάρτηση f τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(2, 3)$ και να ισχύει $f'(x) = 2x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $f'(x) = 2x - 1$, έχουμε διαδοχικά:

$$\int f'(x)dx = \int (2x-1)dx$$

$$f(x) + c_1 = x^2 - x + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 - x + c_2 - c_1,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 - x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Για να διέρχεται η f από το σημείο $A(2, 3)$ πρέπει και αρκεί $f(2) = 3$ ή, ισοδύναμα, $2^2 - 2 + c = 3$, δηλαδή $c = 1$. Επομένως, $f(x) = x^2 - x + 1$.

2. Η είσπραξη $E(x)$, από την πώληση x μονάδων ενός προϊόντος ($0 \le x \le 100$) μιας βιομηχανίας, μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(x) = 100 - x$ (σε χιλιάδες ευρώ ανά μονάδα προϊόντος), ενώ ο ρυθμός μεταβολής του κόστους παραγωγής είναι σταθερός και ισούται με 2 (σε χιλιάδες ευρώ ανά μονάδα προϊόντος). Να βρεθεί το κέρδος της βιομηχανίας από την παραγωγή 100 μονάδων προϊόντος, υποθέτοντας ότι το κέρδος είναι μηδέν όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα.

ΛΥΣΗ

Αν $P(x)$ είναι το κέρδος και $K(x)$ είναι το κόστος παραγωγής για x μονάδες προϊόντος, τότε

$$P(x) = E(x) - K(x),$$

οπότε

$$P'(x) = E'(x) - K'(x) = 100 - x - 2 = 98 - x.$$

Δηλαδή

$$P'(x) = 98 - x,$$

οπότε

$$\int P'(x)dx = \int (98 - x)dx$$

και άρα

$$P(x) = 98x - \frac{x^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Όταν η βιομηχανία δεν παράγει προϊόντα, το κέρδος είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει $P(0) = 0$,οπότε $c = 0$. Επομένως,

$$P(x) = 98x - \frac{x^2}{2}.$$

Άρα, το κέρδος από 100 μονάδες προϊόντος είναι

$$P(100) = 98 \cdot 100 - \frac{100^2}{2} = 9800 - 5000 = 4800 \text{ (σε χιλιάδες ευρώ)}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int (x^3 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)dx$

ii) $\int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx$

iii) $\int 3x\sqrt{x}dx$

iv) $\int \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx$

v) $\int \left(e^x - \frac{3}{x} + \sigma\upsilon\nu 2x \right) dx$

vi) $\int \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x} \right) dx$

vii) $\int \frac{x+3}{x+2} dx.$

2. Να βρείτε τη συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ και } f(9)=1.$$

3. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x)=3$, $f'(1)=6$ και $f(0)=4$.

4. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x)=12x^2+2$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της $A(1, 1)$ έχει κλίση 3.

5. Ο πληθυσμός $N(t)$, σε εκατομμύρια, μιας κοινωνίας βακτηριδίων, αυξάνεται με ρυθμό $N'(t)=\frac{1}{20}e^{t/20}$ ανά λεπτό. Να βρείτε την αύξηση του πληθυσμού στα πρώτα 60 λεπτά.

6. Μια βιομηχανία έχει διαπιστώσει ότι για εβδομαδιαία παραγωγή x εξαρτημάτων έχει οριακό κόστος x^2+5x (ευρώ ανά μονάδα προϊόντος). Να βρείτε τη συνάρτηση κόστους της εβδομαδιαίας παραγωγής, αν είναι γνωστό ότι τα σταθερά εβδομαδιαία έξοδα της βιομηχανίας, όταν δεν παράγει κανένα εξάρτημα, είναι 100 (ευρώ).

7. Μια νέα γεώτρηση εξώρυξης πετρελαίου έχει ρυθμό άντλησης που δίνεται από τον τύπο $R'(t)=20+10t-\frac{3}{4}t^2$, όπου $R(t)$ είναι ο αριθμός, σε χιλιάδες, των βαρελιών που αντλήθηκαν στους t πρώτους μήνες λειτουργίας της. Να βρείτε πόσα βαρέλια θα έχουν αντληθεί τους 8 πρώτους μήνες λειτουργίας της.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η θερμοκρασία T ενός σώματος, που περιβάλλεται από ένα ψυκτικό υγρό, ελαττώνεται με ρυθμό $-\kappa\alpha e^{-kt}$, όπου α, κ είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος. Η αρχική θερμοκρασία $T(0)$ του σώματος είναι $T_0+\alpha$, όπου T_0 η θερμοκρασία του υγρού η οποία με κατάλληλο μηχάνημα διατηρείται σταθερή. Να βρείτε τη θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t.

2. Ένας βιομήχανος, ο οποίος επενδύει x χιλιάδες ευρώ στη βελτίωση της παραγωγής του εργοστασίου του, αναμένει να έχει κέρδος $P(x)$ χιλιάδες ευρώ από αυτή την επένδυση. Μια ανάλυση της παραγωγής έδειξε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $P(x)$, που οφείλεται στην επένδυση αυτή, δίνεται από τον τύπο $P'(x)=5{,}8e^{-x/2000}$. Να βρείτε το συνολικό κέρδος που οφείλεται σε αύξηση της επένδυσης από 4.000.000 ευρώ σε 6.000.000 ευρώ.

3. Από την πώληση ενός νέου προϊόντος μιας εταιρείας διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(t)$ δίνεται από τον τύπο $K'(t)=800-0{,}6t$ (σε ευρώ την

ημέρα), ενώ ο ρυθμός μεταβολής της είσπραξης $E(t)$ στο τέλος των t ημερών δίνεται από τον τύπο $E'(t) = 1000 + 0{,}3t$ (σε ευρώ την ημέρα). Να βρείτε το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την τρίτη έως και την έκτη ημέρα παραγωγής.

4. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1) + 1$ και $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) = g(x) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν η συνάρτηση g έχει δύο ρίζες α, β με $\alpha < 0 < \beta$, τότε η συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστον, ρίζα στο (α, β).

3.2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Ο πίνακας των αόριστων ολοκληρωμάτων, που δώσαμε παραπάνω, δεν είναι αρκετός για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μίας οποιασδήποτε συνάρτησης, όπως π.χ. τα ολοκληρώματα $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$ και $\int xe^x dx$. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο υπολογισμός γίνεται απλούστερος με τη βοήθεια των παρακάτω μεθόδων ολοκλήρωσης.

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Η μέθοδος αυτή εκφράζεται με τον τύπο:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

που είναι συνέπεια του κανόνα παραγώγισης του γινομένου δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σε ένα διάστημα Δ.

Πράγματι, για κάθε $x \in \Delta$, έχουμε

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

οπότε

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

Επομένως

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx - \int f'(x)g(x)dx$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + c - \int f'(x)g(x)dx. \qquad (1)$$

Επειδή το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της (1) περιέχει μια σταθερά ολοκλήρωσης, το c μπορεί να παραλειφθεί, οπότε έχουμε τον παραπάνω τύπο. ■

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα του β΄ μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int xe^x dx$. Έχουμε:

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

Αν, τώρα, δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα, αλλάζοντας τους ρόλους των x και e^x, βρίσκουμε

$$\int xe^x dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx.$$

Το τελευταίο, όμως, ολοκλήρωμα είναι πιο σύνθετο από το αρχικό.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα**

i) $\int x^2 e^x dx$ **ii)** $\int x\eta\mu 2x dx$

iii) $\int (4x^3 + 1)\ln x dx$ **iv)** $\int e^x \eta\mu 2x dx$ **.**

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 (e^x)'dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$
$$= x^2 e^x - \int 2x(e^x)'dx = x^2 e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx$$
$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x)e^{\alpha x}dx$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

ii) Έχουμε

$$\int x\eta\mu 2xdx = \frac{1}{2}\int x(-\sigma\upsilon\nu 2x)'dx = -\frac{1}{2}x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2xdx = -\frac{1}{2}x\sigma\upsilon\nu 2x + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x)\eta\mu(\alpha x)dx, \qquad \int P(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)dx$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

iii) Έχουμε

$$\int (4x^3+1)\ln x dx = \int (x^4+x)'\ln x dx = (x^4+x)\ln x - \int (x^4+x)\frac{1}{x}dx$$

$$= (x^4+x)\ln x - \int (x^3+1)dx = (x^4+x)\ln x - \frac{x^4}{4} - x + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x)\ln(\alpha x)dx,$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x και $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

iv) Θέτουμε $I = \int e^x \eta\mu(2x)dx$, οπότε έχουμε

$$I = \int (e^x)'\eta\mu(2x)dx = e^x\eta\mu(2x) - 2\int e^x\sigma\upsilon\nu(2x)dx$$

$$= e^x\eta\mu(2x) - 2\int (e^x)'\sigma\upsilon\nu(2x)dx$$

$$= e^x\eta\mu(2x) - 2e^x\sigma\upsilon\nu(2x) - 4\int e^x\eta\mu 2xdx$$

$$= e^x\eta\mu(2x) - 2e^x\sigma\upsilon\nu(2x) - 4I.$$

Επομένως,

$$5I = e^x\eta\mu(2x) - 2e^x\sigma\upsilon\nu(2x) + c_1,$$

οπότε

$$I = \frac{1}{5}e^x\eta\mu(2x) - \frac{2}{5}e^x\sigma\upsilon\nu(2x) + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int e^{\alpha x}\eta\mu(\beta x)dx, \qquad \int e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu(\beta x)dx$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$.

2. Ο πληθυσμός $P(t)$, $0 \le t \le 20$, μιας πόλης, που προέκυψε από συγχώνευση 10 κοινοτήτων, αυξάνεται με ρυθμό (σε άτομα ανά έτος) που δίνεται από τον τύπο $P'(t) = te^{t/10}$, $0 \le t \le 20$, όπου t είναι ο αριθμός των ετών μετά τη συγχώνευση. Να βρεθεί ο πληθυσμός $P(t)$ της πόλης t χρόνια μετά τη συγχώνευση, αν γνωρίζουμε ότι ο πληθυσμός ήταν 10000 κάτοικοι κατά τη στιγμή της συγχώνευσης.

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$\begin{aligned}\int P'(t)dt &= \int te^{t/10}dt\\ &= 10\int (e^{t/10})'tdt\\ &= 10e^{t/10}\cdot t - 10\int e^{t/10}dt\\ &= 10te^{t/10} - 100e^{t/10} + c,\end{aligned}$$

οπότε

$$P(t) = 10te^{t/10} - 100e^{t/10} + c, \text{ για κάποιο } c \in \mathbb{R}.$$

Όταν $t = 0$, ο πληθυσμός είναι 10000. Συνεπώς:

$$P(0) = 10000 \Leftrightarrow 10e^0\cdot 0 - 100e^0 + c = 10000 \Leftrightarrow c = 10100.$$

Άρα, ο πληθυσμός της πόλης, t χρόνια μετά τη συγχώνευση, είναι

$$P(t) = 10te^{t/10} - 100e^{t/10} + 10100.$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή $\int f(g(x))g'(x)dx$. Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du,$$
$$\text{όπου } u = g(x) \text{ και } du = g'(x)dx$$

Ο παραπάνω τύπος χρησιμοποιείται με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα $\int f(u)du$ του

δευτέρου μέλους υπολογίζεται ευκολότερα.

Η απόδειξη του τύπου αυτού στηρίζεται στο γνωστό κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης. Πράγματι, αν F είναι μια παράγουσα της f, τότε

$$F'(u) = f(u), \tag{1}$$

οπότε

$$F'(g(x)) = f(g(x))$$

και άρα

$$\begin{aligned}\int f(g(x))g'(x)dx &= \int F'(g(x))g'(x)dx \\ &= \int (F(g(x)))'dx \quad \left(\text{αφού } (F(g(x))' = F'(g(x))g'(x)\right) \\ &= F(g(x)) + c \\ &= F(u) + c, \quad (\text{όπου } u = g(x)) \\ &= \int f(u)du \quad (\text{λόγω της (1)}) \blacksquare\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$. Θέτουμε $u = x^2 + 1$ και $du = (x^2 + 1)'dx = 2xdx$, οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{u}du \\ &= \int u^{1/2}du \\ &= \frac{2}{3}u^{3/2} + c \\ &= \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + c \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c.\end{aligned}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα**

i) $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$ **ii)** $\int \varepsilon\varphi x dx$.

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $u = 1 + e^x$, οπότε $du = (1 + e^x)'dx = e^x dx$. Επομένως,

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = -\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{1+e^x} + c$$

ii) Έχουμε $\int \varepsilon\varphi x dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx$. Επομένως, αν θέσουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε $du = (\sigma\upsilon\nu x)'dx = -\eta\mu x dx$, έχουμε:

$$\int \varepsilon\varphi x dx = -\int \frac{1}{u}du = -\ln|u| + c = -\ln|\sigma\upsilon\nu x| + c.$$

2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i) $\int \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)dx$ **ii)** $\int \frac{1}{1-2x}dx$ **iii)** $\int x(x^2-1)^{99}dx$.

ΛΥΣΗ

i) Θέτουμε $u = 2x + \frac{\pi}{6}$, οπότε $du = \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)'dx = 2dx$.

Επομένως,

$$\int \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)dx = \frac{1}{2}\int \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\cdot 2dx = \frac{1}{2}\int \eta\mu u du$$

$$= -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu u + c = -\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + c.$$

ii) Θέτουμε $u = 1 - 2x$, οπότε $du = (1 - 2x)'dx = -2dx$.

Επομένως,

$$\int \frac{1}{1-2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}\ln|u| + c = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + c.$$

iii) Θέτουμε $u = x^2 - 1$, οπότε $du = 2xdx$. Άρα

$$\int x(x^2-1)^{99}dx = \frac{1}{2}\int u^{99}du = \frac{1}{2}\frac{u^{100}}{100} + c = \frac{1}{200}(x^2-1)^{100} + c.$$

3. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$ **ii)** $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx$.

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{2,3\}$ και γράφεται

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}.$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι, ώστε να ισχύει

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{2,3\}.$$

Με απαλοιφή παρονομαστών έχουμε τελικά:

$$(A+B-2)x=3A+2B+1,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{2,3\}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{2,3\}$, αν και μόνο αν

$$\begin{cases} A+B-2=0 \\ 3A+2B+1=0 \end{cases} \text{ ή, ισοδύναμα, } \begin{cases} A=-5 \\ B=\ \ 7 \end{cases}.$$

Επομένως,

$$\int\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{7}{x-3}\right)dx=\int\frac{-5}{x-2}dx+\int\frac{7}{x-3}dx$$

$$=-5\ln|x-2|+7\ln|x-3|+c.$$

Με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx,\ \text{με}\ \beta^2-4\alpha\gamma>0$$

ii) Αν εκτελέσουμε τη διαίρεση του πολυωνύμου x^2-3x+7 με το πολυώνυμο x^2-5x+6, βρίσκουμε ότι

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}=1+\frac{2x+1}{x^2-5x+6}.$$

Επομένως,

$$\int\frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}dx=\int 1dx+\int\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$$

$$=x-5\ln|x-2|+7\ln|x-3|+c \qquad \text{(λόγω του (i)).}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int\frac{P(x)}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx,$$

όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 και $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int x^2 e^{-x} dx$ ii) $\int (3x^2 - 2x + 1)e^{2x} dx$ iii) $\int x^3 \ln x dx$

iv) $\int 2x^2 \eta\mu 2x dx$ v) $\int 4x \sigma\upsilon\nu 2x dx$ vi) $\int \ln x dx$,

vii) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ viii) $\int e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$ ix) $\int e^x \eta\mu x dx$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \eta\mu 3x dx$ ii) $\int (4x^2 - 16x + 7)^3 (x - 2) dx$

iii) $\int \frac{x+3}{(x^2+6x)^4} dx$ iv) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}} dx$

v) $\int x\sqrt{x+1} dx$.

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int e^x \eta\mu e^x dx$ ii) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$ iii) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$

iv) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)} dx$ v) $\int \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{\eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ ii) $\int \varepsilon\varphi x \cdot \ln(\sigma\upsilon\nu x) dx$ iii) $\int \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x} dx$.

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}} \cdot \frac{1}{x^4} dx$ ii) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ iii) $\int x \ln(x^2+1) dx.$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int x^2 \ln x^2 dx$ ii) $\int (\ln t)^2 dt$ iii) $\int e^{2x} \sigma\upsilon\nu e^x dx.$

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \varepsilon\varphi x dx$ και $\int \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$

ii) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$ και $\int \frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$

iii) $\int \eta\mu^3 x dx$ και $\int \sigma\upsilon\nu^3 x dx$.

5. Με τη βοήθεια των τύπων

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \eta\mu^2 x dx$ ii) $\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx$ iii) $\int \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx.$

6. Με τη βοήθεια των τύπων

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu(\alpha-\beta) + \eta\mu(\alpha+\beta),$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) - \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$$

να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int \eta\mu x \sigma\upsilon\nu 2x dx$ ii) $\sigma\upsilon\nu 3x \sigma\upsilon\nu 5x dx$ iii) $\int \eta\mu 2x \eta\mu 4x dx$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+2} dx$ ii) $\int \frac{3x+2}{x^2-3x+2} dx$

iii) $\int \frac{x^3-2x}{x^2+3x+2} dx$ iv) $\int \frac{2}{x^2-1} dx.$

3.3 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Γενικά

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι, όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση θέσης $y = S(t)$ ενός κινητού, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού. Πολλές φορές, όμως, είναι γνωστή η ταχύτητα $\upsilon = \upsilon(t)$ ή η επιτάχυνση $\alpha = \alpha(t)$ του κινητού και ζητείται η θέση του. Για παράδειγμα:

— Αν ένα κινητό κινείται ευθυγράμμως με σταθερή ταχύτητα c, για να προσδιορίσουμε τη θέση του $y = S(t)$, αρκεί να λύσουμε ως προς y την εξίσωση

$$y' = c. \tag{1}$$

— Αν σε ένα σώμα μάζας m ασκείται δύναμη $F = F(t)$, τότε το σώμα κινείται με επιτάχυνση $\alpha = \alpha(t)$ η οποία, σύμφωνα με το 2ο νόμο της μηχανικής, δίνεται από τον τύπο $F = m\alpha$ ή, ισοδύναμα, $F = my''$, όπου $y = S(t)$ η συνάρτηση θέσης του σώματος. Επομένως, για να προσδιορίσουμε τη θέση $y = S(t)$ του σώματος, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$m \cdot y'' = F. \tag{2}$$

Εξισώσεις όπως οι (1) και (2) λέγονται **διαφορικές εξισώσεις**. Γενικά,

ΟΡΙΣΜΟΣ

Διαφορική εξίσωση λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει τη μεταβλητή x, μια άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$ και κάποιες από τις παραγώγους της y', y'', ….

Για παράδειγμα, οι εξισώσεις

$$y' = 2x,\ y' = 2y,\ y'' + y = 0$$

είναι διαφορικές εξισώσεις.

Η μεγαλύτερη από τις τάξεις των παραγώγων που εμφανίζονται στην εξίσωση ονομάζεται **τάξη** της διαφορικής εξίσωσης. Έτσι οι εξισώσεις $y' = 2x$ και $y' = 2y$ είναι διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, ενώ η $y'' + y = 0$ είναι δευτέρας τάξεως.
Κάθε συνάρτηση $y = f(x)$ που επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση λέγεται **λύση** της εξίσωσης.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y = x^2$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = 2x$, αφού $y' = (x^2)' = 2x$.
Το σύνολο όλων των λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης λέγεται **γενική λύση** της εξίσωσης.

Για παράδειγμα, η γενική λύση της εξίσωσης $y' = 2x$ είναι η $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Συχνά ζητάμε εκείνη τη λύση $y = f(x)$ της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί μια **αρχική συνθήκη** $y_0 = f(x_0)$. Για να βρούμε τη λύση αυτή, βρίσκουμε πρώτα τη γενική λύση της εξίσωσης και με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης προσδιορίζουμε τη ζητούμενη λύση.

Για παράδειγμα, η λύση $y = f(x)$ της διαφορικής εξίσωσης $y' = 2x$, που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $f(1) = 2$, είναι η συνάρτηση $y = x^2 + 1$, αφού από τη γενική λύση $y = x^2 + c$, για $x = 1$ και $y = 2$ είναι $c = 1$.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με δυο ειδικές μορφές διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως:

- Τις εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές και
- Τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως.

Διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

Έχει αποδειχτεί πειραματικά, ότι ο ρυθμός μεταβολής, ως προς το χρόνο, του πληθυσμού $y = P(t)$ μιας κοινωνίας, η οποία δεν επηρεάζεται από εξωτερικούς παράγοντες, είναι ανάλογος του πληθυσμού. Δηλαδή, ισχύει

$$P'(t) = \alpha P(t),$$

όπου α θετική σταθερά.
Αν ο αρχικός πληθυσμός της κοινωνίας είναι P_0, δηλαδή $P(0) = P_0$, για να βρούμε τον πληθυσμό $P(t)$ ύστερα από χρόνο t, θα λύσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση.

Επειδή $y = P(t) > 0$, η εξίσωση γράφεται

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \alpha,$$

οπότε ολοκληρώνοντας και τα δυο μέλη της, έχουμε διαδοχικά:

$$\int \frac{P'(t)}{P(t)}\,dt = \int \alpha\,dt$$

$$\ln P(t) = \alpha t + c_1.$$

$$P(t) = e^{\alpha t + c_1},$$

$$P(t) = ce^{\alpha t}, \text{ με } c = e^{c_1}.$$

Επειδή $P(0) = P_0$, είναι $c = P_0$, οπότε

$$\boldsymbol{P(t) = P_0 e^{\alpha t}}.$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση λέγεται διαφορική εξίσωση με **χωριζόμενες μεταβλητές**. Γενικά,

ΟΡΙΣΜΟΣ

Διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha(y)\cdot y' = \beta(x) \qquad (1),$$

όπου $y = f(x)$ η άγνωστη συνάρτηση, $\alpha(y)$ συνάρτηση του y και $\beta(x)$ συνάρτηση του x.

Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της ως προς x. Έχουμε

$$\int \alpha(y)y'dx = \int \beta(x)dx.$$

Επειδή $y = f(x)$, είναι $dy = f'(x)dx = y'dx$, οπότε έχουμε

$$\int \boldsymbol{\alpha(y)dy} = \int \boldsymbol{\beta(x)dx}. \qquad (2)$$

Αν $A(y)$ είναι μια παράγουσα $\alpha(y)$ και $B(x)$ μια παράγουσα της $\beta(x)$, τότε η (2) γράφεται

$$A(y) = B(x) + c,\ c \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Από την τελευταία εξίσωση προσδιορίζουμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

ΣΧΟΛΙΟ

Η ισότητα (2) μας επιτρέπει να γράφουμε τη διαφορική εξίσωση (1) στην "άτυπη" μορφή της

$$\alpha(y)dy = \beta(x)dx$$

και να ολοκληρώνουμε τα μέλη της, το μεν πρώτο μέλος της ως προς y, το δε δεύτερο μέλος της ως προς x.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

i) $\boldsymbol{2y - xy' = 0,\quad x \neq 0}$ **και** $\boldsymbol{y > 0}$

ii) $\boldsymbol{y' = 2xy^2,\quad y \neq 0}$

iii) $\boldsymbol{x + yy' = 0,\quad y > 0.}$

ΛΥΣΗ

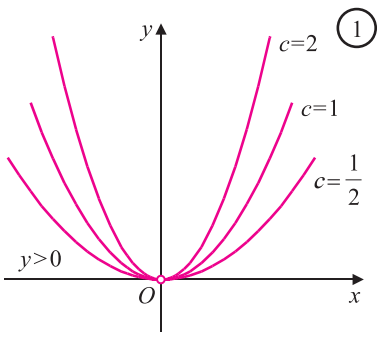
i) Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x},$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{2}{x}dx.$$

$$\int\frac{1}{y}dy = \int\frac{2}{x}dx$$



$$\ln y = 2\ln|x| + c_0 = \ln x^2 + c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{\ln x^2 + c_0} = e^{c_0}\cdot e^{\ln x^2} = cx^2,\ c > 0.$$

Άρα, σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ είναι $y = cx^2$, όπου $c > 0$

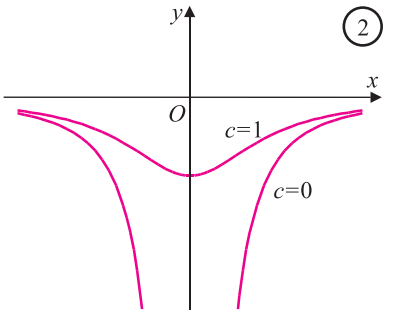
ii) Η εξίσωση γράφεται:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2xdx.$$

$$\int\frac{dy}{y^2} = \int 2xdx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$



Άρα, $y = -\dfrac{1}{x^2+c}$, όπου $c \in \mathbb{R}$ (Σχ. 2).

iii) Η εξίσωση γράφεται διαδοχικά

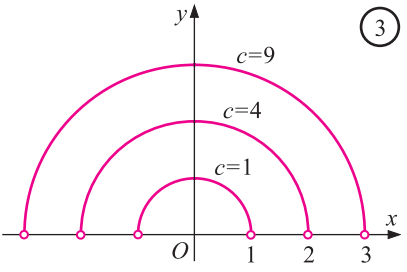
$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$ydy = -xdx$$

$$\int ydy = -\int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$$x^2 + y^2 = c,\ c > 0$$

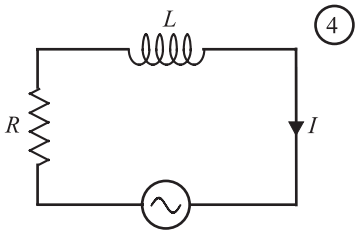


Άρα, $y = \sqrt{c - x^2}$, όπου $c > 0$ (Σχ. 3).

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως

Από τη Φυσική γνωρίζουμε ότι στο διπλανό κύκλωμα ισχύει ο κανόνας του Kirchhoff. Δηλαδή,

$$L \cdot \frac{dI(t)}{dt} + R \cdot I(t) = V(t). \qquad (1)$$



Για να προσδιορίσουμε την ένταση, $I(t)$, του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, είναι ανάγκη να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση (1). Η εξίσωση αυτή λέγεται γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής

$$y' + \alpha(x)y = \beta(x),$$

όπου $y = f(x)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση και $\alpha(x)$, $\beta(x)$ συναρτήσεις του x.

Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής:

— Αναζητούμε μια παράγουσα $A(x)$ της συνάρτησης $\alpha(x)$ και έπειτα

— Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της εξίσωσης με $e^{A(x)}$.

Έτσι, έχουμε διαδοχικά

$$y'e^{A(x)} + \alpha(x)e^{A(x)} \cdot y = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$y'e^{A(x)} + A'(x)e^{A(x)} \cdot y = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$y'e^{A(x)} + (e^{A(x)})' \cdot y = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$(ye^{A(x)})' = \beta(x)e^{A(x)}$$

$$\int (ye^{A(x)})'dx = \int \beta(x)e^{A(x)}dx$$

$$ye^{A(x)} = B(x) + c,$$

όπου $B(x)$ μια παράγουσα της $\beta(x)e^{A(x)}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1. **Να λυθεί η διαφορική εξίσωση**

$$y' + 2y = 2.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή μια παράγουσα της $\alpha(x) = 2$ είναι η $A(x) = 2x$, πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της εξίσωσης με e^{2x}. Έτσι, έχουμε διαδοχικά

$$y'e^{2x} + 2e^{2x}y = 2e^{2x}$$

$$(ye^{2x})' = (e^{2x})'$$

$$ye^{2x} = e^{2x} + c$$

$$y = 1 + ce^{-2x},\ c \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις:

i) $y' = -4xy^2$, $y > 0$ ii) $y'y = x$, $y > 0$

iii) $\frac{1}{xy}y' = 2$ iv) $y' = e^{-y}\sigma\upsilon\nu x$.

2. Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις:

i) $y' + 2y = 3$ ii) $y' + 2y = e^{-x}$

iii) $y' + y = 2x$ iv) $y' + 2xy = x$.

3. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = 2x^2y^2$, $y < 0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0, -3)$.

4. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = 2 - 3y$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(0) = 2/3$.

5. Να λύσετε τις διαφορικές εξισώσεις:

i) $y' + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}y = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, αν $y(0) = -3$

ii) $(x + 1)y' + y = \ln x$, αν $y(1) = 10$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος I σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{dI}{dt} + I = \eta\mu t$. Αν $I(0) = 0$, να βρείτε την ένταση $I(t)$.

2. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης $ye^{y^2}\, y' = e^{2x}$, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$.

3. Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y' - \frac{1}{x}y = x,\ x > 0$.

4. Η κλίση της εφαπτομένης μιας γραμμής (C) με εξίσωση $y = y(x),\ y > 0$ στο σημείο $M(x, y)$ είναι ίση με xy. Να βρείτε την εξίσωση της (C), αν είναι γνωστό ότι διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

5. Έστω $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ σταθερές, με $\alpha > \lambda > 0$.

i) Να λύσετε την εξίσωση $y' + \alpha y = \beta e^{-\lambda t}$.

ii) Αν $y = y(t)$ είναι μια λύση της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ισχύει $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$.

6. Έχει αποδειχτεί πειραματικά ότι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας θ ενός σώματος, όταν αυτό βρεθεί σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας T με $\theta > T$, είναι

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - T),\ k > 0.$$

Να βρείτε τη θερμοκρασία $\theta(t)$, αν $\theta(0) = \theta_0$.

7. Ο πληθυσμός $P = P(t)$ μιας χώρας μεταναστεύει με σταθερό ρυθμό $m > 0$. Δίνεται ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού P, αν δεν υπήρχε η μετανάστευση, θα ήταν ανάλογος του P.

i) Να δικαιολογήσετε ότι ο πληθυσμός P ικανοποιεί την εξίσωση $P' = kP - m$, $k > 0$ σταθερά.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση $P = P(t)$, αν $P(0) = P_0$

iii) Να αποδείξετε ότι:

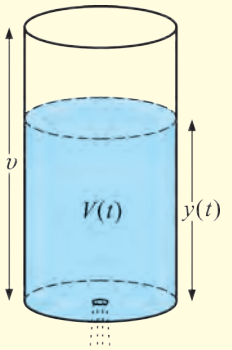
— Αν $m < kP_0$, τότε ο πληθυσμός αυξάνεται.

— Αν $m > kP_0$, τότε ο πληθυσμός μειώνεται.

— Αν $m = kP_0$, τότε ο πληθυσμός παραμένει σταθερός.

8. Έστω $y = y(t)$ το ύψος και $V = V(t)$ ο όγκος του νερού μιας δεξαμενής τη χρονική στιγμή t. Η δεξαμενή αδειάζει από μια κυκλική οπή εμβαδού α που βρίσκεται στον πυθμένα της. Σύμφωνα με το νόμο του Torricelli ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού είναι

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha\sqrt{2gy},\ g = 10\ \text{m/s}^2.$$



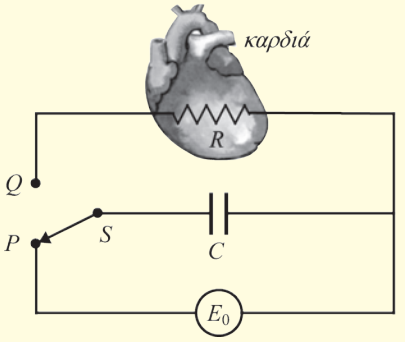
i) Αν η δεξαμενή είναι κυλινδρική με ύψος 3,6 m, ακτίνα 1 m και η ακτίνα της οπής είναι 0,1 m, να αποδείξετε ότι το y ικανοποιεί την εξίσωση

$$y' = -\frac{\sqrt{5}}{50}\sqrt{y}$$

ii) Να βρείτε το ύψος $y(t)$, αν είναι γνωστό ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η δεξαμενή ήταν γεμάτη.

iii) Πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να αδειάσει τελείως η δεξαμενή; (Δίνεται ότι ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V = \pi r^2 \upsilon$).

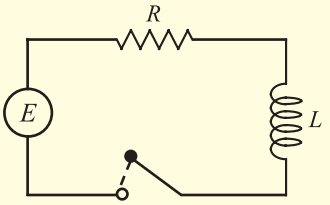
9. Ένας βηματοδότης αποτελείται από μια μπαταρία και έναν πυκνωτή, ενώ η καρδιά παίζει το ρόλο της αντίστασης, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν ο διακόπτης S βρίσκεται στη θέση P, ο πυκνωτής φορτίζεται ενώ, όταν βρίσκεται στη θέση Q, ο πυκνωτής εκφορτίζεται και προκαλεί ηλεκτρικό ερέθισμα στην καρδιά. Κατά τη διάρκεια αυτή στην καρδιά εφαρμόζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη E που ικανοποιεί την εξίσωση



$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E,\ t_1 < t < t_2.$$

όπου R, C σταθερές. Να βρείτε την $E(t)$, αν $E(t_1) = E_0$.

10. Σύμφωνα με τον κανόνα του Kirchhoff για το κύκλωμα του διπλανού σχήματος ισχύει



$$L\frac{dI}{dt}+RI=E(t).$$

i) Αν $R=12\ \Omega$, $L=4\ H$, $E=60\ V$,

α) να βρείτε την ένταση $I(t)$ του ρεύματος, t sec μετά το κλείσιμο του κυκλώματος.

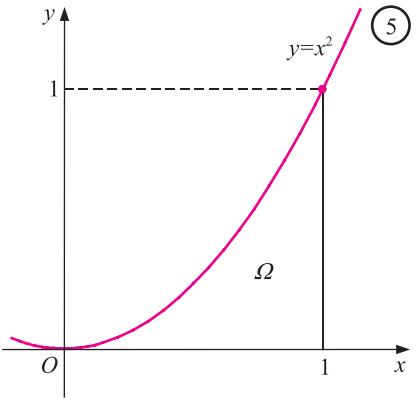
β) να βρείτε το $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)$. Τι συμπεραίνετε;

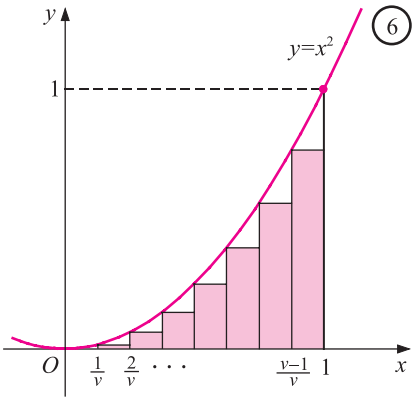
ii) Αν στο κύκλωμα αντί για μπαταρία που δίνει σταθερή ηλεκτρεγερτική δύναμη E χρησιμοποιήσουμε μια γεννήτρια που δίνει $E(t)=60\eta\mu 3t$, να βρείτε την ένταση $I(t)$.

3.4 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Εμβαδόν παραβολικού χωρίου

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ (Παραβολικό χωρίο Σχ. 5).





Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής:

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\frac{1}{\nu}$, με άκρα τα σημεία:

$$x_0 = 0,\quad x_1 = \frac{1}{\nu},\ x_2 = \frac{2}{\nu},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ x_{\nu-1} = \frac{\nu-1}{\nu},\ x_\nu = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

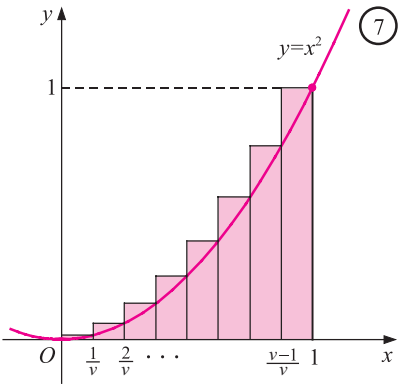
● Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. (Σχ. 6). Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_ν, των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\nu &= f(0)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}\\ &= \frac{1}{\nu}\left[0^2 + \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right]\\ &= \frac{1}{\nu^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2]\\ &= \frac{1}{\nu^3}\frac{(\nu-1)\cdot\nu(2\nu-1)}{6} = \frac{2\nu^2 - 3\nu + 1}{6\nu^2}.\end{aligned}$$

● Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7), τότε το άθροισμα

$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Είναι όμως,



7

$$\begin{aligned}E_\nu &= f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\cdot\frac{1}{\nu}\\ &= \frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2\right]\\ &= \frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) = \frac{1}{\nu^3}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{2\nu^2 + 3\nu + 1}{6\nu^2}.\end{aligned}$$

Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν E βρίσκεται μεταξύ των ε_ν και E_ν. Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_\nu \le E \le E_\nu$, οπότε

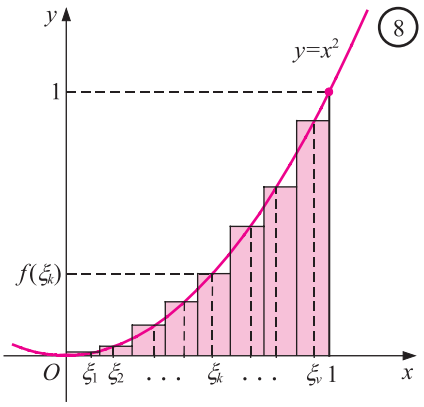
$$\lim_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu \le E \le \lim_{\nu\to\infty} E_\nu.$$

Επειδή $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty} E_\nu = \dfrac{1}{3}$, έχουμε $E = \dfrac{1}{3}$.

● Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$ και ύψη την τιμή της συνάρτησης σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο ξ_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots, 3, \ldots, \nu$, καθενός διαστήματος, (Σχ. 8), τότε το άθροισμα

$$S_\nu = \frac{1}{\nu} f(\xi_1) + \frac{1}{\nu} f(\xi_2) + \cdots + \frac{1}{\nu} f(\xi_\nu)$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Επειδή $f(x_{\kappa-1}) \le f(\xi_\kappa) \le f(x_\kappa)$ για $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$, θα είναι



$$\frac{1}{\nu} f(x_{\kappa-1}) \le \frac{1}{\nu} f(\xi_\kappa) \le \frac{1}{\nu} f(x_\kappa),$$

οπότε θα ισχύει

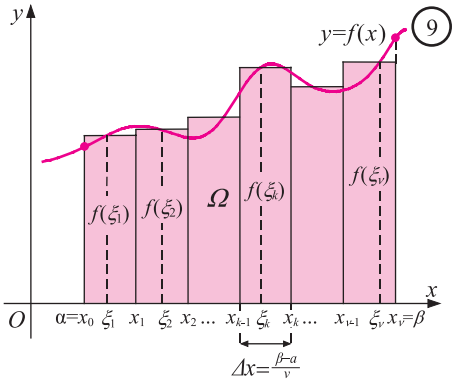
$$\varepsilon_\nu \le S_\nu \le E_\nu.$$

Είναι όμως, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty} E_\nu = E$. Άρα θα ισχύει $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_\nu = E$.

Ορισμός εμβαδού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω (Σχ. 9) εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Δηλαδή:



- Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$.

- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

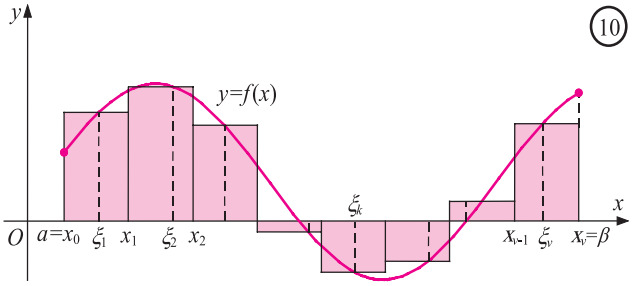
$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x = [f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_\nu)]\Delta x.$$

- Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu \to +\infty} S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu \to \infty} S_\nu$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $\boldsymbol{E(\Omega)}$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος

Έστω μια συνάρτηση f *συνεχής* στο $[\alpha, \beta]$. Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \dfrac{\beta - \alpha}{\nu}$.



Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1, 2, ..., \nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \ldots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \ldots + f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x \ ^{(1)}.$$

(1) Το άθροισμα αυτό ονομάζεται ένα άθροισμα RIEMANN.

Αποδεικνύεται ότι,

"Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\,\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ".

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$$

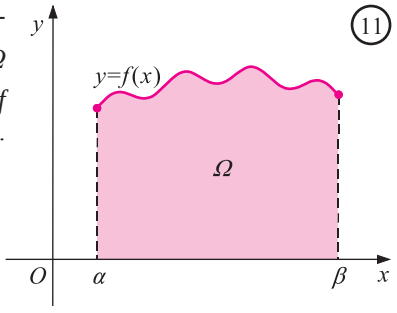
Το σύμβολο $\int$ οφείλεται στον Leibniz και ονομάζεται **σύμβολο** ολοκλήρωσης. Αυτό είναι επιμήκυνση του αρχικού γράμματος S της λέξης Summa (άθροισμα). Οι αριθμοί α και β ονομάζονται **όρια** της ολοκλήρωσης. Η έννοια "όρια" εδώ δεν έχει την ίδια έννοια του ορίου του 2ου κεφαλαίου. Στην έκφραση $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ το γράμμα x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Έτσι, για παράδειγμα, οι εκφράσεις $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ συμβολίζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα και είναι πραγματικός αριθμός, σε αντίθεση με το $\int f(x)dx$ που είναι ένα σύνολο συναρτήσεων.
Είναι, όμως, χρήσιμο να επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό και για τις περιπτώσεις που είναι $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, ως εξής:

- $\int_\alpha^\beta f(x)dx = -\int_\beta^\alpha f(x)dx$
- $\int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:
Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 11). Δηλαδή,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega).$$

Επομένως,



11

Αν $f(x)\geq 0$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta-\alpha)$, για οποιοδήποτε $c \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αν $\alpha = \beta$, τότε $\int_{\alpha}^{\alpha} c\,dx = 0 = c(\alpha-\alpha) = c(\beta-\alpha)$.

ii) Αν $\alpha < \beta$, τότε, επειδή η $f(x) = c$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, έχουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\nu\to\infty}[(f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu))\Delta x]$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \frac{\beta-\alpha}{\nu}[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_\nu)]$$

$$= \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\beta-\alpha}{\nu}(c + c + \cdots + c)\right)$$

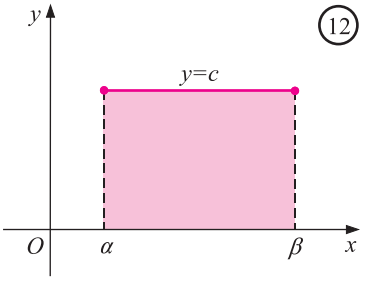
$$= \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\beta-\alpha}{\nu}\cdot \nu c\right) = c(\beta-\alpha)$$

iii) Αν $\alpha > \beta$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = -\int_{\beta}^{\alpha} c\,dx = -c(\alpha-\beta) = c(\beta-\alpha).$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν $c > 0$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx$ εκφράζει το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με βάση $\beta - \alpha$ και ύψος c (Σχ. 12).



12

Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Με τη βοήθεια του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g *συνεχείς* συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$

και γενικά

- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda \int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu \int_\alpha^\beta g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι *συνεχής* σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

Για παράδειγμα, αν $\int_0^3 f(x)dx = 3$ και $\int_0^4 f(x)dx = 7$, τότε

$$\int_3^4 f(x)dx = \int_3^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -\int_0^3 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = -3+7 = 4.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ (Σχ. 13), η παραπάνω ιδιότητα δηλώνει ότι:

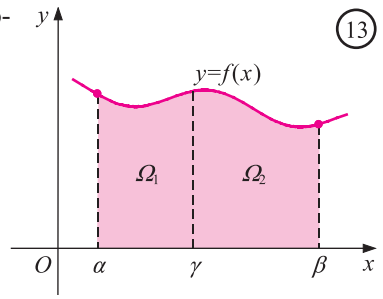
$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

αφού

$$E(\Omega_1) = \int_\alpha^\gamma f(x)dx\,,\ E(\Omega_2) = \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

και

$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$



13

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια *συνεχής* συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $\int_1^4 f(x)dx = 9$, $\int_3^4 f(x)dx = 11$ και $\int_1^8 f(x)dx = 13$, να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_4^3 f(x)dx$ ii) $\int_4^8 f(x)dx$

iii) $\int_1^3 f(x)dx$ iv) $\int_3^8 f(x)dx$.

2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^e \ln t dt = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt.$$

3. Να υπολογίσετε το κ έτσι, ώστε

$$\int_1^\kappa \frac{x^2-4}{x^2+1}dx - \int_\kappa^1 \frac{5}{x^2+1}dx = 3.$$

4. Αν $\int_1^3 f(x)dx = 5$ και $\int_1^3 g(x)dx = -2$ να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_1^3 (2f(x) - 6g(x))dx$ ii) $\int_3^1 (2f(x) - g(x))dx$.

3.5 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ κατευθείαν από τον ορισμό είναι συνήθως μία δύσκολη και πολύ κοπιαστική διαδικασία. Στην παράγραφο αυτή θα αναζητήσουμε τρόπο υπολογισμού ολοκληρωμάτων χωρίς τη χρήση του ορισμού. Σ' αυτό θα μας βοηθήσει το γνωστό, ως *θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού*. Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού στηρίζεται στο επόμενο θεώρημα, το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη παράγουσας μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x\in\Delta,$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ. Δηλαδή ισχύει:

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)'=f(x),\ \text{για κάθε } x\in\Delta.$$

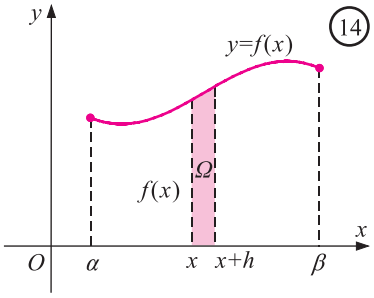
Για παράδειγμα

$$\left(\int_{0}^{x} \eta\mu^2 t dt\right)'=\eta\mu^2 x \quad \text{και} \quad \left(\int_{1}^{x} \ln t dt\right)'=\ln x.$$

ΣΧΟΛΙΑ

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει (Σχ. 14) ως εξής:

$$\begin{aligned} F(x+h)-F(x) &= \int_{x}^{x+h} f(t)dt \\ &= \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega \\ &\approx f(x)\cdot h, \text{ για μικρά } h>0. \end{aligned}$$



14

Άρα, για μικρά $h>0$ είναι

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x),$$

οπότε

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

- Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης προκύπτει ότι:

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} \boldsymbol{f(t)dt}\right)'=\boldsymbol{f(g(x))\cdot g'(x)},$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.
Για παράδειγμα,

$$\left(\int_{1}^{x^3} \ln t dt\right)'=(\ln x^3)\cdot(x^3)'=(3\ln x)3x^2=9x^2\ln x$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \quad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_\alpha^\alpha f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha). \blacksquare$$

Πολλές φορές, για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις μας, συμβολίζουμε τη διαφορά $G(\beta) - G(\alpha)$ με $[G(x)]_\alpha^\beta$, οπότε η ισότητα του παραπάνω θεωρήματος γράφεται

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = [G(x)]_\alpha^\beta = \left[\int f(x)dx\right]_\alpha^\beta.$$

Για παράδειγμα,

$$\int_1^3 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

$$\int_0^\pi \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 2$$

$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

1. **Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}dt$**

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της F.

ii) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η F.

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση $f(t)=\sqrt{t^2-1}$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο

$$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

Για να ορίζεται η F, πρέπει τα άκρα 1, x του ολοκληρώματος να ανήκουν στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της f. Άρα, πρέπει $x\in[1,+\infty)$, οπότε το πεδίο ορισμού της F είναι το σύνολο $[1,+\infty)$.

ii) Για $x\in[1,+\infty)$ έχουμε:

$$F'(x)=\left(\int_1^x\sqrt{t^2-1}dt\right)'=\sqrt{x^2-1}.$$

Επειδή η F είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $F'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ελάχιστο το $F(1)=0$.

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

● Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx,$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\pi/2}x\sigma\upsilon\nu x dx$. Έχουμε:

$$I=\int_0^{\pi/2}x(\eta\mu x)'dx=\left[x\eta\mu x\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(x)'\eta\mu x dx$$

$$=\left[x\eta\mu x\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\eta\mu x dx$$

$$=\left[x\eta\mu x\right]_0^{\pi/2}+\left[\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi-2}{2}.$$

● Ο τύπος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα παίρνει τη μορφή

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$.

Έχουμε:

$$I = \int_1^e \ln x(\ln x)'dx$$

Αν θέσουμε $u = \ln x$, τότε $du = (\ln x)'dx$, $u_1 = \ln 1 = 0$ και $u_2 = \ln e = 1$. Επομένως,

$$I = \int_0^1 udu = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

i) $\int_1^2 \frac{x^2 + x - 1}{x} dx$ **ii)** $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ **iii)** $\int_{-1}^5 |x-2| dx$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $\int_1^2 \frac{x^2+x-1}{x} dx = \int_1^2 \frac{x^2}{x} dx + \int_1^2 \frac{x}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx$

$$= \int_1^2 x dx + \int_1^2 1 dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + [x]_1^2 - [\ln x]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{5}{2} - \ln 2.$$

ii) Έχουμε $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 x^{1/2} dx + \int_1^4 x^{-1/2} dx$

$$= \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 + \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4 + \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{20}{3}.$$

iii) Επειδή $|x-2| = \begin{cases} 2-x, & x \le 2 \\ x-2, & x \ge 2 \end{cases}$, έχουμε

$$\int_{-1}^{5} |x-2|\,dx = \int_{-1}^{2} (2-x)dx + \int_{2}^{5} (x-2)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{2}^{5} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1)dx$ ii) $\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^3}}dx$

iii) $\int_0^{\pi/2} (\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x)dx$ iv) $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx.$

2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^2 \frac{x^3+7x}{x^2+5}dx + 2\int_2^1 \frac{x}{x^2+5}dx = \frac{3}{2}.$$

3. Να αποδείξετε ότι

$$2\int_\alpha^\beta f(x)f'(x)dx = (f(\beta))^2 - (f(\alpha))^2.$$

4. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0,0)$ και $B(1,1)$, να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 f'(x)dx$, εφόσον η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$.

5. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

i) $F(x) = \int_1^{\sigma\upsilon\nu x} \sqrt{1-t^2}\,dt$ ii) $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\theta}d\theta$

6. i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln(1+\sqrt{2})$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $\int_0^x tg(t)dt=x^4+x^6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το $g(1)$.

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\int_x^{x+1} e^{\sigma\upsilon\nu 2\pi t}dt$ είναι σταθερή.

3. Αν $f(x)=\int_0^{x-2}\frac{t}{e^t}dt$, να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f.

4. Αν $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$, να βρείτε την $F'(x)$.

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε τον τύπο της.

6. Να βρείτε το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h}\sqrt{5+t^2}dt$.

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$ ii) $\int_0^{\pi/2}[\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)\eta\mu x-\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)]dx$.

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_0^2(x^2-|x-1|)dx$ ii) $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$, αν $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x\le 0\\ \eta\mu x, & 0<x\le\pi\end{cases}$

iii) $\int_0^3|x^2-3x+2|dx$.

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ ii) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

iii) $\int_0^1 x\ln(9+x^2)dx$ iv) $\int_0^{\pi/2}e^x\sigma\upsilon\nu 2xdx$.

10. Αν $I=\int_0^{\pi/2} x\eta\mu^2 x dx$, $J=\int_0^{\pi/2} x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I+J, \quad I-J, \quad I, \quad J.$$

11. Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή και για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\pi}\big(f(x)+f''(x)\big)\eta\mu x dx=2.$$

Αν $f(\pi)=1$, με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το $f(0)$.

12. Έστω οι συναρτήσεις f, g, με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)=g(\alpha)=0$ και $f'(\beta)=g'(\beta)$, να αποδείξετε ότι

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\big(f(x)g''(x)-f''(x)g(x)\big)dx=g'(\beta)(f(\beta)-g(\beta)).$$

3.6 ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Με τη βοήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού μπορούμε, τώρα, να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως *Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=f(\xi)(\beta-\alpha)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$. Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $F'(x)=f(x)$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}. \tag{1}$$

Είναι όμως,

$$F'(\xi)=f(\xi),\ F(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \text{ και } F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt=0.$$

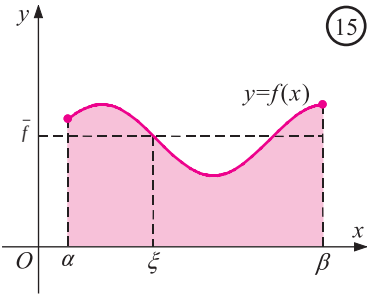
Επομένως, η ισότητα (1) γράφεται $f(\xi)=\dfrac{\int_\alpha^\beta f(t)dt}{\beta-\alpha}$ ή, ισοδύναμα,

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = f(\xi)(\beta-\alpha)\,.\ \blacksquare$$

ΣΧΟΛΙΟ

Ο αριθμός $f(\xi)=\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}$ λέγεται **μέση τιμή** της συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$ και συμβολίζεται με $\overline{f}$.

Γεωμετρικά, η μέση τιμή $\overline{f}$ μιας μη αρνητικής συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ παριστάνει το ύψος του ορθογωνίου που έχει βάση το $[\alpha,\beta]$ και εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του χωρίου $\boldsymbol{\Omega}$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 15).



ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να βρεθεί $\xi\in(0,9)$ έτσι ώστε $f(\xi)=\overline{f}$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $\overline{f}=\dfrac{\int_0^9\sqrt{x}dx}{9}=\dfrac{\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^9}{9}=\dfrac{18}{9}=2.$

Επομένως, αρκεί να βρεθεί $\xi\in(0,9)$ έτσι, ώστε $f(\xi)=2$. Έχουμε

$$f(\xi)=2\Leftrightarrow\sqrt{\xi}=2\Leftrightarrow\xi=4.$$

Άρα, το ζητούμενο ξ είναι το 4.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τη μέση τιμή $\overline{f}$ της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα $[0,1]$, αν δίνεται ότι $\int_0^1(f(x)-1)dx=0$.

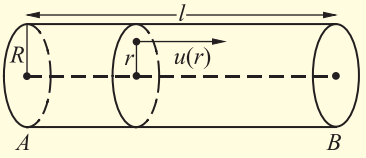
2. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, κ σταθερά και $\int_\alpha^\beta (f(x)-\kappa)\,dx = 0$, να αποδείξετε ότι η μέση τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$ είναι κ.

3. Να βρεθεί η μέση τιμή της μεταβλητής x στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, ορισμένες σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$. Να υπολογίσετε τις $\overline{f}$, $\overline{g}$ και να αποδείξετε ότι $\overline{f} \cdot \overline{g} > 1$.

2. Η ταχύτητα υ του αίματος σ' ένα αγγείο ακτίνας R και μήκους ℓ, σε απόσταση r από τον κεντρικό άξονα του αγγείου είναι $\upsilon(r) = \dfrac{P}{4n\ell}(R^2 - r^2)$, όπου P η διαφορά πιέσεως μεταξύ των άκρων A, B του αγγείου και n το ιξώδες του αίματος (σταθερά).



α) Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του αίματος, όταν $r \in [0, R]$.

β) Να βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα και να τη συγκρίνετε με τη μέση ταχύτητα

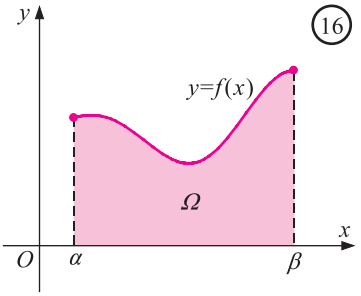
3. Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ συνάρτηση, με $\int_0^1 f(x)dx = f(1)$.

Να αποδείξετε ότι η C_f έχει μια, τουλάχιστον, οριζόντια εφαπτομένη.

3.7 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΧΩΡΙΟΥ

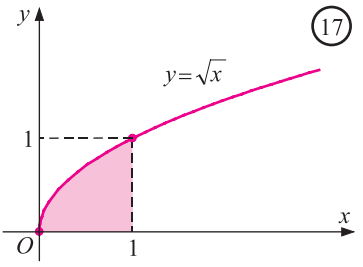
● Στην παράγραφο 4.4 είδαμε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ (Σχ. 16) είναι

$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$



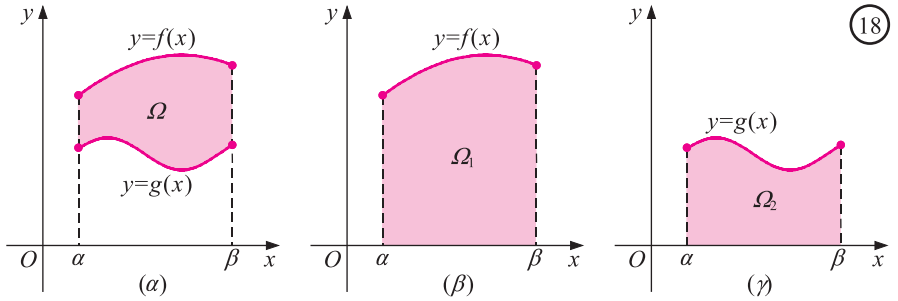
Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)=\sqrt{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$ (Σχ. 17) είναι ίσο με

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx=\int_0^1 x^{1/2}dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$



17

● Έστω, τώρα, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ (Σχ. 18α).



18

Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx.$$

Επομένως,

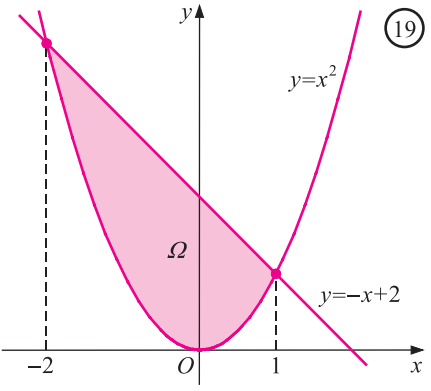
$$\boxed{E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx} \qquad (1)$$

Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=-x+2$ και $g(x)=x^2$ (Σχ. 19) είναι ίσο με:

$$E(\Omega)=\int_{-2}^1[f(x)-g(x)]dx$$

$$=\int_{-2}^1(-x+2-x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^1=\frac{9}{2}.$$



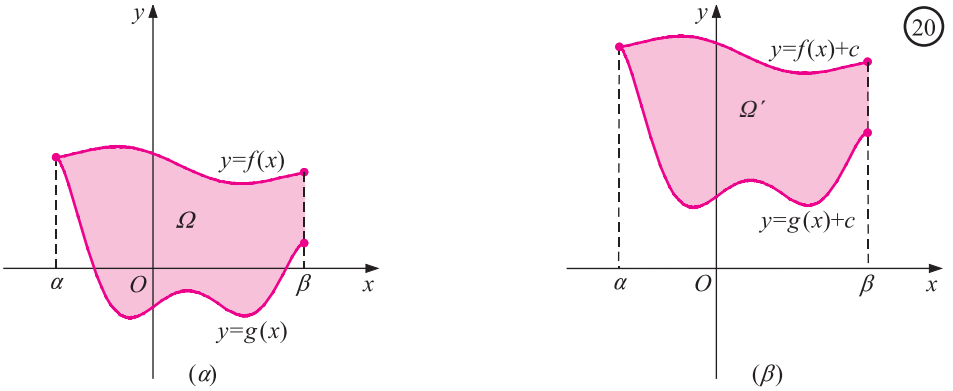
19

● Ο τύπος (1) βρέθηκε με την προϋπόθεση ότι:

(i) $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και

(ii) οι f, g είναι μη αρνητικές στο $[\alpha, \beta]$.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι ο τύπος (1) ισχύει και χωρίς την υπόθεση (ii). Πράγματι, επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x)+c \geq g(x)+c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω (Σχ. 20α) έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω' (Σχ. 20β).



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε:

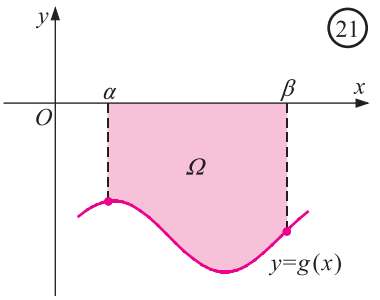
$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_\alpha^\beta [(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx = \int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx.$$

Άρα,

$$\boxed{E(\Omega) = \int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx}$$

● Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (Σχ. 21). Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε

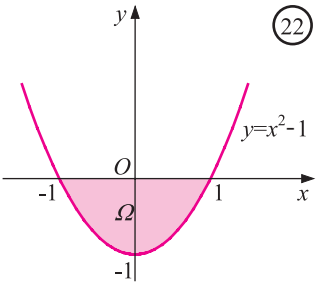
$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$$
$$= \int_\alpha^\beta [-g(x)]dx = -\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$



Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε

$$\boxed{E(\Omega) = -\int_\alpha^\beta g(x)dx}$$

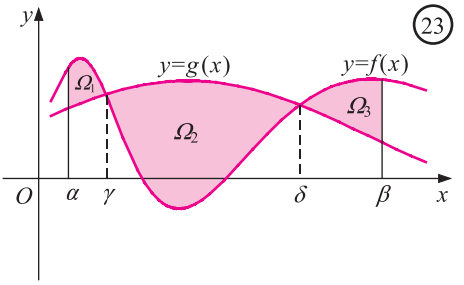
Για παράδειγμα, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^2 - 1$ και τον άξονα $x'x$ (Σχ. 22) είναι ίσο με



$$E(\Omega) = -\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

● Όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3. Δηλαδή,



$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3)$$

$$= \int_{\alpha}^{\gamma}(f(x)-g(x))dx + \int_{\gamma}^{\delta}(g(x)-f(x))dx + \int_{\delta}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$$

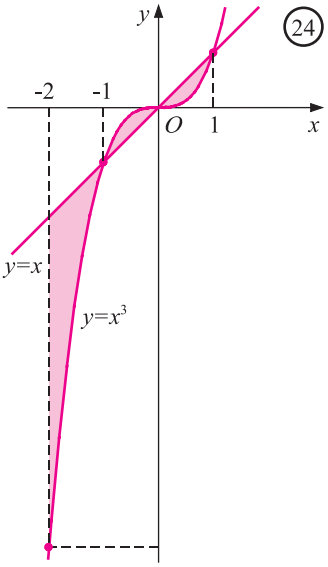
$$= \int_{\alpha}^{\gamma}|f(x)-g(x)|dx + \int_{\gamma}^{\delta}|f(x)-g(x)|dx + \int_{\delta}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ και τις ευθείες $x = -2$, $x = 1$. (Σχ. 24).



Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$ στο διάστημα $[-2, 1]$.

Επειδή

$f(x) - g(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$,

έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	-2		-1		0		1
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0

Λαμβάνοντας, τώρα, υπόψη τον παραπάνω πίνακα, έχουμε

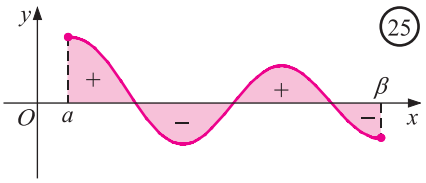
$$E(\Omega)=\int_{-2}^{1}|f(x)-g(x)|=\int_{-2}^{-1}(g(x)-f(x))dx+\int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))dx+\int_{0}^{1}(g(x)-f(x))dx$$

$$=\int_{-2}^{-1}(x-x^3)dx+\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(x-x^3)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}=\frac{11}{4}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$ (Σχ. 25)



25

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2\pi$.

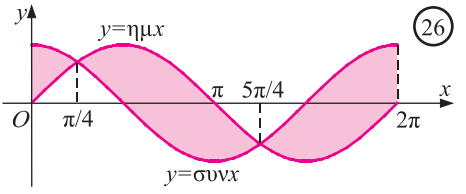
ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Στο διάστημα αυτό έχουμε

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}\ \text{ή}\ x=\frac{5\pi}{4}$$



26

Επομένως, για το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$ έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Λαμβάνοντας, τώρα, υπόψη τον πίνακα αυτόν, έχουμε

$$E(\Omega) = \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (-\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)dx$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\right]_0^{\pi/4} + \left[-\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} + \left[\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\right]_{5\pi/4}^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

2. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x$, τον άξονα των x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e, 1)$.

ΛΥΣΗ

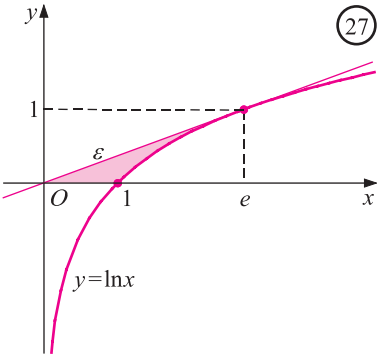
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(e, 1)$ είναι

$$\varepsilon: y - 1 = f'(e)(x - e). \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, έχουμε $f'(e) = \frac{1}{e}$.

Επομένως, η (1) γράφεται:

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x.$$



27

Το ζητούμενο εμβαδόν E είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου μείον το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$, δηλαδή

$$E = \int_0^e \frac{1}{e}x\,dx - \int_1^e \ln x\,dx = \left[\frac{1}{e}\frac{x^2}{2}\right]_0^e - \left([x\ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx\right)$$

$$= \left[\frac{1}{e}\frac{x^2}{2}\right]_0^e - \left[x\ln x\right]_1^e + \left[x\right]_1^e = \frac{e-2}{2}.$$

3. **Να υπολογιστεί το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου $x^2 + y^2 = \rho^2$.**

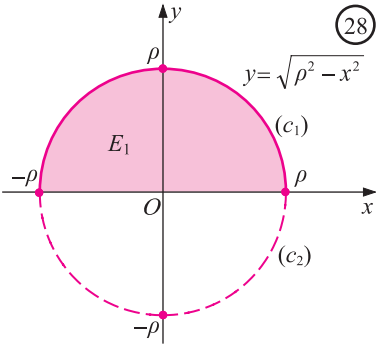
ΛΥΣΗ

Το ημικύκλιο C_1 είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2},\ x \in [-\rho, \rho],$$

αφού για $y > 0$ είναι

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{\rho^2 - x^2}.$$



Αν E_1 είναι το εμβαδόν του ημικυκλίου, τότε $E = 2E_1$. Επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-\rho, \rho]$, έχουμε

$$E_1 = \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2 - x^2}\, dx. \qquad (1)$$

Επειδή $-\rho \leq x \leq \rho$, έχουμε $-1 \leq \frac{x}{\rho} \leq 1$. Επομένως, υπάρχει $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{x}{\rho} = \text{ημ}\theta\,. \qquad (1)$$

Έτσι, έχουμε $x = \rho\text{ημ}\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε $dx = \rho\text{συν}\theta d\theta$. Επιπλέον, για $x = -\rho$ είναι $\theta = -\frac{\pi}{2}$ και για $x = \rho$ είναι $\theta = \frac{\pi}{2}$. Επομένως,

$$E_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\rho^2 - \rho^2\text{ημ}^2\theta} \cdot \rho\text{συν}\theta d\theta = \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \text{ημ}^2\theta} \cdot \text{συν}\theta d\theta$$

$$= \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\text{συν}^2\theta} \cdot \text{συν}\theta d\theta = \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{συν}^2\theta d\theta \qquad (\text{Επειδή } \text{συν}\theta > 0)$$

$$= \rho^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \text{συν}2\theta}{2} d\theta = \rho^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{ημ}2\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi\rho^2}{2}.$$

Άρα $E = 2E_1 = \pi\rho^2$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι το εμβαδόν της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι ίσο με $\pi\alpha\beta$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x + 3$, τις ευθείες $x = 0$, $x = 2$ και του άξονα των x.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα των x και τις ευθείες που δίνονται κάθε φορά:

i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 0, x = 27$ ii) $f(x) = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{3}$.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x$ και τον άξονα των x.

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3$ και $g(x) = 2x - x^2$.

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4 - x^2$ και την ευθεία $x - y - 2 = 0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, 3)$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο A και τον άξονα των x.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & , \quad x < 1 \\ 2\sqrt{x} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$, τις ευθείες $x = -1$, $x = 2$ και τον άξονα των x.

3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 & , \quad x < 2 \\ -2x + 5 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$ και τον άξονα των x.

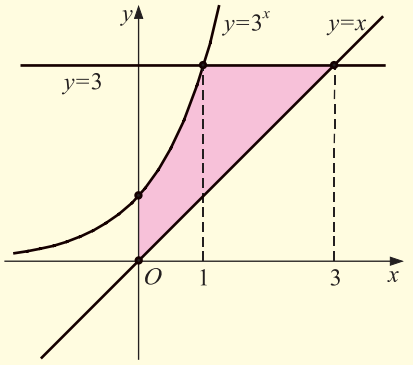
4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=\sqrt{x-1} \text{ και } g(x)=\frac{x+1}{3}.$$

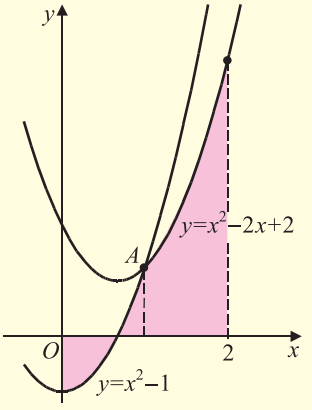
5. i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν, $E(\lambda)$, του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{e}{x}$, $g(x)=\ln x$, τον άξονα των x και την ευθεία $x=\lambda$, $\lambda>e$.

ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.



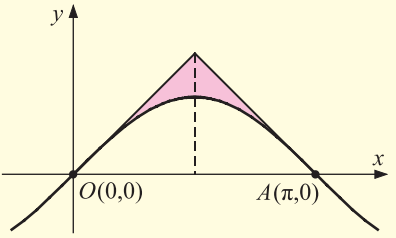
7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.



8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία $O(0, 0)$ και $A(\pi, 0)$.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις εφαπτόμενες στα σημεία O και A.



9. i) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, την εφαπτόμενή της στο σημείο (1, 1) και τον άξονα των x.

ii) Να βρείτε την ευθεία $x = \alpha$, η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

10. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln\dfrac{1}{x}$ και την ευθεία $y = \ln 2$.

11. i) Να βρείτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$ και η κλίση της στο σημείο $M(x, f(x))$ είναι $2x - 3$.

ii) Ποιο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν η C_f και ο άξονας των x.

12. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)(x - 3)$.

i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία A, B που η C_f τέμνει τον άξονα των x.

ii) Αν Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι $\dfrac{2}{1}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $u = \pi - x$ για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx$.

2. i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^2-1}dx$

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\eta\mu x}dx$.

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{(u+1)(u+2)}du$$

και στη συνέχεια τα ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x+1)(\eta\mu x+2)}dx$ ii) $\int \frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)}dx$.

4. Αν $I_\nu = \int_0^1 \frac{t^{2\nu+1}}{1+t^2}dt$, $\nu \in \mathbb{N}$,

i) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_\nu + I_{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα I_0, I_1, I_2.

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right)du.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t)dt$, όπου $f(t) = \int_1^t \sqrt{u^2-1}du$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και F.

ii) Να αποδείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

7. Δίνονται τα ολοκληρώματα

$$F(x)=\int_0^x e^t \text{συν}^2 t dt \quad \text{και} \quad G(x)=\int_0^x e^t \text{ημ}^2 t dt,\ x\in\mathbb{R}.$$

i) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$F(x)+G(x) \text{ και } F(x)-G(x)$$

και στη συνέχεια τα ολοκληρώματα $F(x)$ και $G(x)$.

ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$I=\int_\pi^{2\pi} e^t \text{συν}^2 t dt \quad \text{και} \quad J=\int_\pi^{2\pi} e^t \text{ημ}^2 t dt.$$

8. Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ και την ευθεία $y=5$ χωρίζεται από την ευθεία $y=\alpha^2+1$, $\alpha>0$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του α.

9. i) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$, $\lambda>0$.

ii) Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι, ώστε $E(\lambda)=\dfrac{1}{2}$.

iii) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{\lambda\to 0} E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

10. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

ii) Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε

$$m(\beta-\alpha)\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$$

iii) Με τη βοήθεια της ανισότητας εφ$x > x$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\text{ημ}x}{x}$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{3}{\pi}$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ και

β) $\frac{\sqrt{3}}{4} \le \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta\mu x}{x} dx \le \frac{1}{2}$.

iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της ανισότητας $e^x \ge 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α) $1 - x^2 \le e^{-x^2} \le 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και

β) $\frac{2}{3} \le \int_0^1 e^{-x^2} dx \le 1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Ισχύει $\int_\alpha^\beta (f(x) + g(x))dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ Α Ψ

2. Ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x) \cdot g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g(x)dx$ Α Ψ

3. Αν $\alpha = \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$. Α Ψ

4. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Α Ψ

5. Αν $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$. Α Ψ

6. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Α Ψ

7. $\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4+1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4+x^2+1)dx$, για κάθε $\alpha > 0$. Α Ψ

8. $\int_0^{\pi/4} \ln(1-\eta\mu^2 x)dx = 2\int_0^{\pi/4} \ln \sigma\upsilon\nu x dx$. Α Ψ

9. $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$. Α Ψ

10. $\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln\frac{1}{t}dt$. Α Ψ

11. Αν $\int_0^1 (f(x)-1)dx = 0$ τότε $\overline{f} = 1$. Α Ψ

12. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$. Α Ψ

13. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές. Α Ψ

14. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} (x^3 - x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ και τον άξονα των x. Α Ψ

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Αν $f'(x) = \eta\mu\pi x$ και $f(0) = 0$, τότε το $f(1)$ ισούται με

Α) $-\frac{1}{\pi}$, Β) $\frac{1}{\pi}$, Γ) $\frac{-2}{\pi}$, Δ) $\frac{2}{\pi}$.

2. Το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{4-x}dx$ στο $(4,+\infty)$ είναι ίσο με

Α) $\ln(4-x)+c$, Β) $-\ln(4-x)+c$,

Γ) $\ln(x-4)+c$, Δ) $-\ln(x-4)+c$.

3. Το ολοκλήρωμα $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$ στο $(0,+\infty)$ είναι ίσο με

Α) $\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}+c$, Β) $2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$,

Γ) $\frac{(1-\ln x)^3}{3}+c$, Δ) $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}-2x+c$,

Ε) $\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+c$.

4. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx$ είναι ίσο με

Α) $\frac{4}{3}$, Β) 0, Γ) $-\frac{4}{3}$, Δ) $\frac{2}{3}$, Ε) $\frac{5}{3}$.

5. Το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$ είναι ίσο με

Α) $\frac{1}{x}+c$, Β) $\frac{\ln^2 x}{2}+c$, Γ) $x(\ln x-1)+c$, Δ) $\frac{\ln^3 x}{3}+c$.

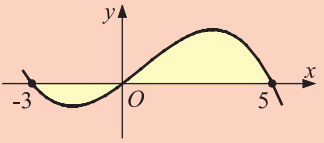
6. Έστω f, g δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο $[\alpha,\beta]$.

Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

Α) $f'(x)\le g'(x),\ x\in[\alpha,\beta]$, Β) $\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Γ) $\int f(x)dx\le\int g(x)dx,\ x\in[\alpha,\beta]$, Δ) $\int_\beta^\alpha f(x)dx\le\int_\beta^\alpha g(x)dx$.

7. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με



Α) $\int_{-3}^{5} f(x)dx$, Β) $\int_{5}^{-3} f(x)dx$.

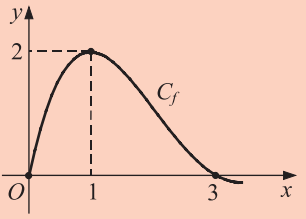
Γ) $\int_{-3}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{5} f(x)dx$, Δ) $-\int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx$.

8. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και $f(0) = g(0) + 2$, τότε για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύει:

Α) $f(x) = g(x) - 2$, Β) $\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx = 4$.

Γ) $f(x) \le g(x)$, $x \in [-1,1]$ Δ) Οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο στο [–1, 1].

9. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt$ όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε η $F'(1)$ είναι ίση με

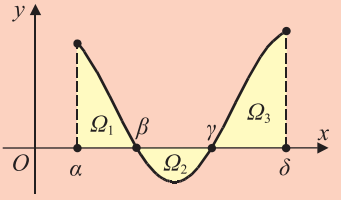


Α) 0, Β) 1, Γ) 2, Δ) $\frac{1}{2}$.

10. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν

$E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$

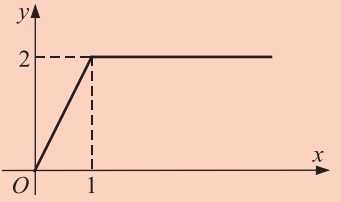
τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με



Α) 6, Β) –4, Γ) 4,

Δ) 0, Ε) 2.

11. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$, όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε



Α) $F(x) = x^2$,

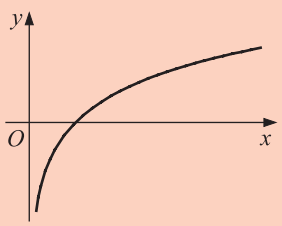
Β) $F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \end{cases}$,

Γ) $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2x, & 1 \le x \end{cases}$,

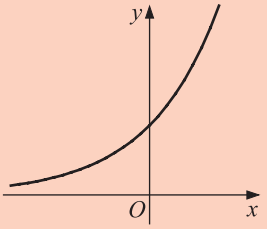
Δ) $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2x-1, & 1 \le x \end{cases}$.

III.

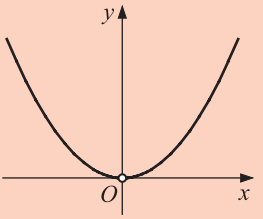
1. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αντιπροσωπεύει τη γραφική παράσταση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης $xy' = y$, με $x, y > 0$.



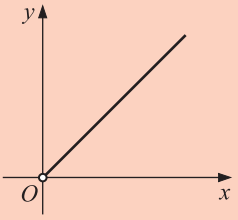
(Α)



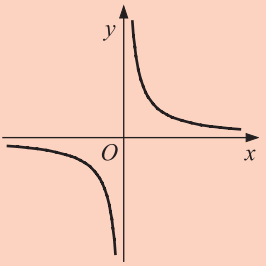
(Β)



(Γ)



(Δ)



(Ε)

2. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$, Β) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu x dx$, Γ) $\int_0^{\pi} \varepsilon\varphi x dx$

Δ) $\int_0^1 \ln x dx$, Ε) $\int_0^2 \sqrt{1-x^2}\,dx$, Ζ) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$.

3. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int (x)' \frac{1}{x}dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx$$

$$= 1 - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= 1 + \int \frac{1}{x}dx.$$

Άρα $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$, οπότε $0 = 1$!

4. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=-I.\ (\text{Θέσαμε } x=\frac{1}{u} \text{ οπότε } dx=-\frac{1}{u^2}du).$$

Άρα $I=-I$ οπότε $I=0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού

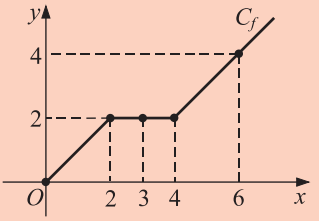
$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx>0,$$

επειδή $\frac{1}{1+x^2}>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.

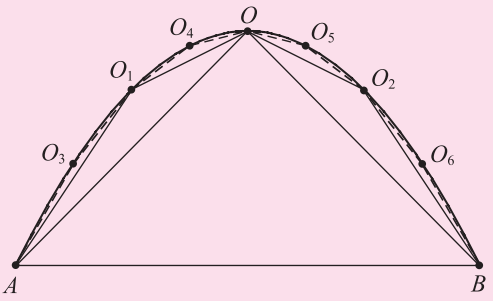


$F(0)=\square$, $F(2)=\square$, $F(3)=\square$, $F(4)=\square$, $F(6)=\square$.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Αρχική συνάρτηση - Αόριστο ολοκλήρωμα

Η αυτονόητη σημασία των προβλημάτων που συνδέονται με τον υπολογισμό εμβαδών και οι ιδιαίτερες δυσκολίες που παρουσιάζουν, οδήγησαν τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα στην επινόηση γενικών μεθόδων μέτρησης εμβαδών, ιδιαίτερα επιφανειών που περικλείονται από καμπύλες. Καθοριστική στο ζήτημα αυτό υπήρξε η συμβολή των αρχαίων Ελλήνων και ιδιαίτερα του Αρχιμήδη. Οι ιδέες του Αρχιμήδη πάνω στο πρόβλημα του εμβαδού υπήρξαν η αφετηρία της δημιουργίας του σύγχρονου ολοκληρωτικού λογισμού. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού μιας επιφάνειας που περικλείεται από ένα τμήμα παραβολής και ένα ευθύγραμμο τμήμα (παραβολικό χωρίο).



Έστω ένα παραβολικό χωρίο με βάση AB και κορυφή O (το σημείο της παραβολής που έχει τη μέγιστη απόσταση από τη βάση). Ο Αρχιμήδης, φέρνοντας τις χορδές OA και OB, δημιουργεί δυο νέα παραβολικά χωρία με βάσεις OA, OB και κορυφές O_1, O_2 αντίστοιχα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής, αποδεικνύει ότι για τα εμβαδά των τριών τριγώνων OAB, O_1AO και O_2BO ισχύει η σχέση

$$(OAB) = 4[(O_1AO) + (O_2BO)]. \quad (1)$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία στα νέα παραβολικά χωρία, βρίσκει ότι

$$(O_1AO) = 4[(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] \quad (2)$$

και

$$(O_2BO) = 4[(O_5O_2O) + (O_6BO_2)] \quad (3)$$

Με τον τρόπο αυτό, το εμβαδόν E του παραβολικού χωρίου μπορεί να προσεγγιστεί ("εξαντληθεί") από ένα άθροισμα εμβαδών εγγεγραμμένων τριγώνων ως εξής:

$$E = (OAB) + [(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] + [(OAO_1) + (O_4O_1O)] + [(O_5O_2O) + (O_6BO_2)] + \ldots$$

$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \frac{1}{4}(O_1AO) + \frac{1}{4}(O_2BO) + \cdots$$

$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \frac{1}{4}[(O_1AO) + (O_2BO)] + \cdots$$

$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 (OAB) + \cdots$$

Όπως είναι φανερό, πρόκειται για το άθροισμα των (απείρων) όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το $\alpha = (OAB)$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{4}$. Το άθροισμα αυτό δίνεται σήμερα από το γνωστό τύπο

$$\frac{\alpha}{1-\lambda} = \frac{(OAB)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(OAB).$$

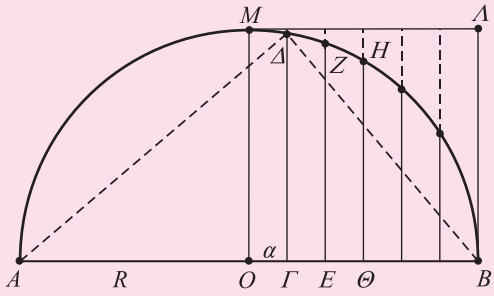
Το εμβαδόν λοιπόν του παραβολικού χωρίου είναι ίσο με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου που ορίζουν τα άκρα της βάσης και η κορυφή της παραβολής(*)

Όπως στα προβλήματα ακροτάτων και εφαπτομένων έτσι και στο πρόβλημα του εμβαδού, οι ιδέες των αρχαίων Ελλήνων γνώρισαν παραπέρα εξέλιξη μετά την ανάπτυξη της Άλγεβρας και την εφαρμογή της σε γεωμετρικά προβλήματα. Στη διάρκεια του 17ου αιώνα διαπιστώθηκε ότι ο υπολογισμός των εμβαδών μπορεί να γίνει με μια διαδικασία αντίστροφη προς αυτήν της παραγώγισης.

Ορισμένο ολοκλήρωμα - Η έννοια του εμβαδού

Χαρακτηριστικό παράδειγμα της νέας μεθόδου αντιμετώπισης προβλημάτων υπολογισμού εμβαδών κατά τον 17ο αιώνα αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο ο J. Wallis ανακάλυψε το 1655 μια νέα αναλυτική έκφραση για το εμβαδόν του κύκλου και τον αριθμό π.

(*) Η διατύπωση στο έργο του Αρχιμήδη "Τετραγωνισμός ορθογωνίου κώνου τομής" είναι: "παν τμάμα περιεχόμενον υπό ευθείας και ορθογωνίου κώνου τομάς επίτριτον εστι του τριγώνου του βάσιν έχοντος ταν αυτάν και ύψος ίσον τω τμάματι". Ο Αρχιμήδης στην πραγματικότητα εργάστηκε λίγο διαφορετικά αποφεύγοντας την έννοια του απείρου, χρησιμοποίησε πεπερασμένο πλήθος όρων του παραπάνω αθροίσματος και έδειξε ότι το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $\frac{4}{3}$ (*OAB*) αποκλείοντας (με απαγωγή σε άτοπο) τις περιπτώσεις να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από αυτό.



Ο Wallis θεώρησε ένα ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2R$, χώρισε την ακτίνα του OB σε ίσα τμήματα μήκους α και από κάθε σημείο διαίρεσης ύψωσε μια κάθετη (βλ. σχήμα). Όπως είναι γνωστό από την Ευκλείδεια γεωμετρία, κάθε μια από αυτές τις κάθετες είναι μέση ανάλογη των δύο τμημάτων στα οποία χωρίζει τη διάμετρο AB. Π.χ., για την κάθετη $\Gamma\Delta$, που είναι ύψος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔAB, ισχύει

$$\Gamma\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Gamma B = (R+\alpha)(R-\alpha) = R^2 - \alpha^2$$

δηλ. $\Gamma\Delta = \sqrt{R^2-\alpha^2}$. Όμοια προκύπτει $EZ = \sqrt{R^2-4\alpha^2}$, $H\Theta = \sqrt{R^2-9\alpha^2}$ κ.ο.κ. Αφού υπολόγισε με τον τρόπο αυτό όλες τις (πεπερασμένου πλήθους) κάθετες που "εξαντλούν" το τεταρτημόριο OMB, ο Wallis πραγματοποίησε μια "μετάβαση στο άπειρο" με τον εξής συλλογισμό:

"Ο λόγος του αθροίσματος όλων αυτών των καθέτων προς το άθροισμα των μεγίστων τιμών τους (δηλ. των ακτίνων) είναι ίδιος με το λόγο του τεταρτημορίου (το οποίο "εξαντλούν" αυτές οι κάθετες) προς το τετράγωνο με πλευρά την ακτίνα (δηλ. το τετράγωνο $OM\Lambda B$, το οποίο "εξαντλούν" οι ακτίνες-προεκτάσεις των καθέτων)".

Διατυπωμένο σε συμβολική γλώσσα, το συμπέρασμα αυτό του Wallis γίνεται

$$\frac{\sqrt{R^2-0^2}+\sqrt{R^2-\alpha^2}+\sqrt{R^2-4\alpha^2}+\cdots}{R+R+R+\cdots} = \frac{\text{τεταρτημόριο}(OMB)}{\text{τετράγωνο}(OM\Lambda B)} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^2}{R^2} = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

Αυτό το μίγμα Γεωμετρίας, Άλγεβρας και "πρωτόγονου" απειροστικού λογισμού, ισοδυναμεί ουσιαστικά με τη σύγχρονη σχέση

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε $R = 1$ (δηλ. το μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$) και διαιρέσουμε την ακτίνα (δηλ. το διάστημα $[0,1]$ σε ν ίσα τμήματα μήκους το καθένα $\frac{1}{\nu}$, τότε το πρώτο μέλος της προηγούμενης ισότητας (1) γίνεται

$$\frac{1}{\nu}\left[\sqrt{1-\left(\frac{0}{\nu}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{\nu}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2}\right].$$

Αυτό όμως όπως θα δούμε παρακάτω είναι το κατώτερο άθροισμα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (που προκύπτει από την εξίσωση του κύκλου), ως προς την προηγούμενη

διαμέριση του διαστήματος [0,1], και το όριό του όταν $\nu \to +\infty$, είναι το

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Η έννοια του ολοκληρώματος, όπως και οι άλλες θεμελιώδεις έννοιες της ανάλυσης, έγιναν αντικείμενο συστηματικής κριτικής και ορίστηκαν με λογική αυστηρότητα στη διάρκεια του 19ου αιώνα. Η έννοια του ολοκληρώματος που χρησιμοποιούμε σήμερα στο σχολείο, στηρίζεται στον επόμενο ορισμό του συμβόλου $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ που έδωσε ο B. Riemann το 1854:

"Θεωρούμε μια ακολουθία τιμών $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}$ που βρίσκονται ανάμεσα στα α και β κατά σειρά μεγέθους και συμβολίζουμε χάριν συντομίας το $x_1 - \alpha$ με δ_1, το $x_2 - x_1$ με δ_2, ... το $\beta - x_{\nu-1}$ με δ_ν και τα γνήσια θετικά κλάσματα με ε_i. Τότε η τιμή του αθροίσματος

$$S = \delta_1 f(\alpha + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \ldots + \delta_\nu f(x_{\nu-1} + \varepsilon_\nu\delta_\nu)$$

θα εξαρτάται από την εκλογή των διαστημάτων δ_i και των ποσοτήτων ε_i. Αν έχει την ιδιότητα, ανεξαρτήτως της εκλογής των δ_i και ε_i, να τείνει προς ένα σταθερό όριο A καθώς όλα τα δ_i γίνονται απειροελάχιστα, τότε η τιμή αυτή ονομάζεται $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Αν δεν έχει αυτή την ιδιότητα, τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δεν έχει κανένα νόημα".

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Β΄ ΜΕΡΟΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ)

1 ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

§ 1.1 -1.2 Α΄ Ομάδας

1. i) $A = \mathbb{R} - \{1, 2\}$ ii) $A = [1, 2]$

iii) $A = [-1, 0) \cup (0, 1]$ iv) $A = (-\infty, 0)$.

2. i) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

ii) $x \in (-1, 1)$ iii) $x > 0$.

3. i) $x > 0$ ii) $x > 1$.

4. α) 200, 69 cm β) 195,23 cm.

5. $E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{\sqrt{3}}{36}(20 - x^2)$ με $x \in (0, 20)$.

6. i) $f(A) = \{2, 0\}$ ii) $f(A) = \mathbb{R}$

iii) $f(A) = [2, +\infty)$ iv) $f(A) = [0, +\infty)$.

7. i) είναι ίσες στο $[0, +\infty)$

ii) είναι ίσες στο $\mathbb{R}^*$

iii) είναι ίσες στο $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

8. Είναι

$$(f+g)(x) = \frac{1}{x(1-x)}, (f-g)(x) = \frac{1-2x^2}{x(1-x)},$$

$$(fg)(x) = \frac{1+x}{1-x}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1-x^2}{x^2}.$$

9. $(f+g)(x) = 2\sqrt{x}$, $(f-g)(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$,

$$(fg)(x) = \frac{x^2-1}{x}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

10. i) $(g \circ f)(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$

ii) $(g \circ f)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$, $x \in \mathbb{R}$

iii) $(g \circ f)(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

11. $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$,
$x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
$(f \circ g)(x) = x - 1$, $x \in [2, +\infty)$.

12. i) Είναι σύνθεση των $h(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \eta\mu x$.

ii) Είναι σύνθεση των $h(x) = 3x$, $g(x) = \eta\mu x$ και $\varphi(x) = 2x^2 + 1$.

iii) Είναι σύνθεση των συναρτήσεων $h(x) = 2x$, $g(x) = e^x - 1$ και $\varphi(x) = \ln x$.

iv) Είναι σύνθεση των συναρτήσεων $h(x) = 3x$, $g(x) = \eta\mu x$ και $\varphi(x) = x^2$.

§ 1.1 - 1.2 Β΄ Ομάδας

1. i) $f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \le x < 1 \\ -x+2, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

ii) $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ -2x+4, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \cup [2,3) \\ 0, & x \in [1,2) \cup [3,4) \end{cases}$.

2. $K(x) = 8\pi x^2 + \frac{500\pi}{x}$, $x > 0$ και το κόστος είναι $300\pi \cong 942$ λεπτά = 9,42 ευρώ.

3. $E(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \le 1 \\ 2x-1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$.

4. $E(x) = -2x^2 + 10x$, $0 < x < 5$,
$p(x) = 20 - 2x$, $0 < x < 5$.

5. i) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < -1 \\ 1, & -1 \le x < 1 \\ x, & x \ge 1 \end{cases}$ και

$f(A) = [1, +\infty)$.

ii) $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\\ 0, & x\in(\pi,2\pi]\end{cases}$ και

$f(A)=[0,1]$.

6. i) $f(x)=x^2+1$ ii) $f(x)=\sqrt{1-x}$

iii) $f(x)=\eta\mu x$ ή $f(x)=-\eta\mu x$.

7. $\alpha=1$.

8. α) πράξεις β) πράξεις.

9. i) $N(t)=10\sqrt{2(t+9\sqrt{t}+20)}$

ii) 16 χρόνια.

§ 1.3 Α΄ Ομάδας

1. i) f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$

ii) f γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$.

iii) f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

iv) f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$.

2. i) Είναι 1–1 και $f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii) Δεν είναι 1–1.

iii) Δεν είναι 1–1.

iv) Είναι 1–1 και $f^{-1}(x)=1-x^3$, $x\geq 0$.

v) Είναι 1–1 και $f^{-1}(x)=1-e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

vi) Είναι 1–1 και $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1}{x-1}$, $x>1$.

vii) Είναι 1–1 και $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$, $x\in(-1,1)$.

viii) Δεν είναι 1–1.

3. Οι συναρτήσεις f, φ και ψ αντιστρέφονται, ενώ η g δεν αντιστρέφεται.

4. i), ii), iii) να εφαρμόσετε ιδιότητες των ανισοτήτων.

§ 1.4 Α΄ Ομάδας

1. i) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$, $f(3)=2$

ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$, $f(2)=4$.

iii) Δεν υπάρχει όριο στα $x_0=1$, $x_0=2$, $f(1)=1$, δεν ορίζεται η f στο 2.

iv) Δεν υπάρχει όριο στα $x_0=1$, $x_0=2$ ενώ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$, $f(1)=1$, $f(2)=2$ και δεν ορίζεται στο 3.

2. i) – 1 ii) 1 iii) δεν υπάρχει

iv) δεν υπάρχει.

3. i) 4 και 2 ii) δεν υπάρχει.

4. i) αληθής ii) ψευδής iii) ψευδής

iv) Αληθής v) ψευδής vi) Αληθής.

5. $\lambda=3$ ή $\lambda=-2$.

§ 1.5 Α΄ Ομάδας

1. i) 5 ii) -1 iii) 2^{20} iv) 0 v) $-\dfrac{1}{2}$

vi) 2 vii) $\sqrt[3]{9}$ viii) 0.

2. i) 43 ii) $\dfrac{3}{17}$ iii) 6.

3. i) 8/3 ii) $\dfrac{1}{2}$ iii) $\dfrac{1}{2}$ iv) 27.

4. i) 1/6 ii) 1/2 iii) $\dfrac{3}{8}$ iv) $\dfrac{1}{12}$.

5. i) δεν υπάρχει ii) 2.

6. i) 3 ii) 1 iii) 2 iv) 0 v) 1

vi) 4.

7. i) 2 ii) 0 iii) 1/2.

8. i) 1 ii) 1.

9. $\alpha=4/3$ και $\beta=2$.

§ 1.5 Β΄ Ομάδας

1. i) 7/12 ii) 0 iii) 1/2.

2. i) δεν υπάρχει ii) 5 iii) 7 iv) 3.

3. i) 0 ii) 1 iii) 1.

4. i) -2 ii) 0.

§ 1.6 Α΄ Ομάδας

1. i) $+\infty$ ii) $-\infty$ iii) δεν υπάρχει.

2. i) δεν υπάρχει ii) δεν υπάρχει

   iii) δεν υπάρχει.

§ 1.6 Β΄ Ομάδας

1. $-\infty$.

2. i) Αποδείξτε ότι

   $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \varepsilon\varphi x = -\infty$.

   ii) Ομοίως.

3. Για $\lambda = 2$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3/2$.

   Για $\mu = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 2$.

4. i) 0 ii) $-\infty$ iii) $+\infty$.

§ 1.7 Α΄ Ομάδας

1. i) $-\infty$ ii) $-\infty$ iii) 0 iv) $+\infty$.

   v) 1/2 vi) 0 vii) 0 viii) 2.

2. i) $+\infty$ ii) $+\infty$ iii) $+\infty$ iv) $+\infty$

   v) 0.

3. i) 1 ii) 0 iii) -1 iv) 0

   v) -1 vi) $+\infty$.

§ 1.7 Β΄ Ομάδας

1. i) Για $\mu < 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$,

   $\mu > 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,

   $\mu = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   ii) Για $\mu = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$,

   $\mu = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \mu \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ -\infty, & \mu \in (0,1) \end{cases}.$$

2. Για $\lambda < 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

   $\lambda > 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και

   $\lambda = 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5/2$.

   Ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$

   μόνο αν $\lambda = 1$

3. $\alpha = \beta = 1$.

4. i) 1 ii) $\sqrt{3}+1$ iii) $+\infty$.

§ 1.8 Α΄ Ομάδας

1. i) 1 ii) 1.

2. i) συνεχής ii) συνεχής iii) συνεχής.

3. i) Μη συνεχής στο -1.

   ii) Μη συνεχής στο 2.

   iii) Μη συνεχής στο 1.

   iv) Συνεχής.

4. i) Μη συνεχής στο 1 ii) συνεχής.

5. Είναι όλες συνεχείς ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

6. Για τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x + 1$ να εφαρμόσετε το Θεώρημα του Bolzano στο $[0, \pi]$.

7. i) $\alpha = 0$ ii) $\alpha = -1$ iii) $\alpha = 1$

   iv) $\alpha = 1$.

8. Να εφαρμόσετε διαδοχικά το Θεώρημα του Bolzano στα $[\lambda, \mu]$ και $[\mu, \nu]$.

9. Εργαστείτε όπως στο σχόλιο του Θεωρήματος Bolzano.

10. i) $[-1, 0]$ ii) $(0, 2)$ iii) $[1, 2)$

iv) $(1, 2]$.

§ 1.8 Β΄ Ομάδας

1. $\kappa = -1$.

2. $(\alpha = 4, \beta = 1)$ ή $(\alpha = -3, \beta = 8)$.

3. i) $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 1$, οπότε $g(0) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

4. Εφαρμόσετε Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) - g(x)$ στο $[0, 1]$.

5. α) Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $f(x) = (x-2)(x^4+1) + (x^6+1)(x-1)$ στο $[1, 2]$.

β) Όμοια για τη συνάρτηση

$f(x) = e^x(x-2) + (x-1)\ln x$.

6. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο $(0, +\infty)$ έχει μια ακριβώς λύση.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο $(0, +\infty)$ έχει μια ακριβώς λύση.

7. i) α) $x = 1$ ή -1

β) Η συνάρτηση f στο $(-1, 1)$ δεν μηδενίζεται και είναι συνεχής.

γ) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $x\in[-1,1]$ ή

$f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ $x\in[-1,1]$

ii) α) $x = 0$

β) η f στο $(-\infty, 0)$ συνεχής και δεν μηδενίζεται. Ομοίως και στο $(0, +\infty)$ γ) $f(x) = x$ ή $f(x) = -x$ ή $f(x) = |x|$ ή $f(x) = -|x|$.

8. i) $OB: y = x$, $A\Gamma: y = -x + 1$.

ii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f(x) - x = 0$ και $f(x) + x - 1 = 0$ στο $[0, 1]$ έχουν κάποια λύση.

9. i) $d = d(x) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f(x)-y_0)^2}$, $x \in [\alpha, \beta]$.

ii) Να εφαρμόσετε το Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής για την d στο $[\alpha, \beta]$.

2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

§ 2.1 Α΄ Ομάδας

1. i) 0 ii) -2 iii) 0

2. i) 0 ii) Δεν παραγωγίζεται

iii) 1 iv) 1

3. $g'(0) = f(0)$.

4. i) Δεν είναι συνεχής στο 0 και άρα δεν παραγωγίζεται

ii) Δεν παραγωγίζεται στο 1.

5. Από την άσκηση 1

i) $y = 1$ ii) $y = -2x + 3$ iii) $y = 0$.

Από την άσκηση 2

i) $y = 0$ ii) Δεν ορίζεται

iii) $y = x + 1$ iv) $y = x + 1$.

§ 2.1 Β΄ Ομάδας

1. $f'(0) = -1$.

2. $f'(1) = 3$.

3. $f'(0) = 1$.

4. $f'(0) = 1/2$.

5. Με κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε ότι $f'(0) = 1$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, οπότε $f(0) = 0$ και με κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε $f'(0) = 1$.

7. i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, οπότε $f(0) = 0$.

8. i) Είναι
$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-\frac{f(x_0+(-h))-f(x_0)}{-h}$$
κ.τ.λ.

ii) Είναι
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f(x_0-h)+f(x_0)}{h},$$
κ.τ.λ.

9. i) το B. ii) το Γ.

iii) $t=2$ αλλάζει το B, $t=4$ το A και $t=5$ το B

iv) το A v) το B vi) το A.

§ 2.2 Α΄ Ομάδας

1. i) -4 ii) $1/6$

iii) $-\frac{1}{2}$ iv) $1/e$ v) 2.

2. i) Δεν παραγωγίζεται στο 1.

ii) $f'(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$.

iii) Δεν παραγωγίζεται στο 2.

iv) Δεν παραγωγίζεται στο 2/3.

3. $f'(x_1)=f'(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2$ άτοπο αφού $x_1\neq x_2$, ενώ για την $f(x)=x^3$ υπάρχουν τα (x_1,x_1^3), $(-x_1,-x_1^3)$.

4. $f'(x)=\begin{cases}1, & x\in(-2,0)\\ -2, & x\in(0,2)\\ 0, & x\in(2,4)\\ 4, & x\in(4,6)\\ -4/3, & x\in(6,9)\end{cases}$.

5. Ευθ. τμήμα με κλίση 2 για $x\in[0,2]$, ευθύγραμμο τμήμα με κλίση -1, για $x\in[2,4]$ και ευθ. τμήμα με κλίση 1 για $x\in[4,8]$.

§ 2.2 Β΄ Ομάδας

1. $\alpha=-1$, $\beta=\pi$.

2. Η εξίσ. εφαπτ. της C_f στο $(\xi, f(\xi))$ είναι $y=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}x+\frac{\sqrt{\xi}}{2}$ η οποία διέρχεται από το $B(-\xi,0)$.

3. $N(-2\alpha,-8\alpha^3)$ και $f'(-2\alpha)=4f'(\alpha)$.

4. i) Είναι $A(2\xi,0)$, $B\left(0,\frac{2}{\xi}\right)$ και $M\left(\xi,\frac{1}{\xi}\right)$.

ii) 2.

§ 2.3 Α΄ Ομάδας

1. i) $f'(x)=7x^6-4x^3+6$

ii) $f'(x)=6x^2+\frac{1}{x}$

iii) $f'(x)=x^3-x^2+x-1$

iv) $f'(x)=-\eta\mu x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

2. i) $f'(x)=3x^2-6x-1$.

ii) $f'(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.

iii) $f'(x)=\frac{-4x}{(1+x^2)^2}$.

iv) $f'(x)=\frac{1-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}$.

v) $f'(x)=x(\eta\mu 2x+x\sigma\upsilon\nu 2x)$

3. i) $f'(x)=\frac{e^x\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^2}$.

ii) $f'(x)=\frac{-4\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 2x}$.

iii) $f'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{e^x}$.

iv) $f'(x)=\frac{4(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$.

4. i) $f'(x)=\begin{cases}4x+3, & x<0\\ 6\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right) & x>0,\end{cases}$

ενώ δεν παραγωγίζεται στο 0.

ii) $f'(x)=\begin{cases}2x+\sigma\upsilon\nu x, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$.

5. i) $(-2,-4)$ και $(2, 4)$.

ii) $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$.

iii) $(-1,-2)$, $(1, 2)$.

6. $f'(x)=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ και

$g'(x)=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$, $x\in[0,+\infty)-\{1\}$.

Οι συναρτήσεις f', g' δεν είναι ίσες αφού δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

7. $f'(1)g'(1)=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$.

8. $\alpha=2$.

9. i) $(-2, 3)$ και $(2, 7)$.

ii) $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{-10\sqrt{3}+45}{9}\right)$ και

$\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{10\sqrt{3}+45}{9}\right)$.

10. $y=2x-1$ και

$y=-2x-1$.

11. $\alpha=1, \beta=1, \gamma=0$.

12. i) $f'(x)=\dfrac{-24(x+1)}{x^7(3x+4)^3}$.

ii) $f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$, $x\in(1,+\infty)$.

iii) $f'(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)\cdot\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

iv) $f'(x)=\dfrac{-(1+x^2)}{x(1-x^2)}$.

v) $f'(x)=e^{-x^2}(-2x)$.

13. i) $f'(2)=20$.

ii) $f'(4)=\dfrac{5}{6}$.

iii) $f'\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{6+\sqrt{3}\pi}{48}\right)$.

iv) $f'(3)=5$.

14. i) $f'(x)=x^{\ln x}2\ln x\dfrac{1}{x}$.

ii) $f'(x)=2^{5x-3}\cdot 5\ln 2$.

iii) $f'(x)=(\ln x)^x\left(\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

iv) $f'(x)=e^{\sigma\upsilon\nu x}(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x)$.

15. $f'(x)=\eta\mu 2x$ και

$f''(x)=2\sigma\upsilon\nu 2x$, οπότε ισχύει η ισότητα.

§ 2.3 Β΄ Ομάδας

1. Το κοινό σημείο είναι το (1, 1) και ισχύει $f'(1)\cdot g'(1)=-1$.

2. Τα κοινά σημεία είναι (1, 1)

και $(-2, -8)$.

Η $y=3x-2$ εφάπτεται στο (1, 1).

3. $\alpha=0$, $\beta=-1$.

4. Η $y=x+1$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $(-1, 0)$.

5. $f(x)=x^3-4x^2-9x+4$.

6. Έστω ότι υπάρχει το $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και καταλήγουμε σε αδύνατο σύστημα.

7. i) Προσθέτουμε και αφαιρούμε στον αριθμητή την ποσότητα $x f(\alpha)$.

ii) Προσθέτουμε και αφαιρούμε στον αριθμητή την ποσότητα $e^x f(\alpha)$. Να λάβετε υπόψιν ότι το $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}$ είναι η παράγωγος της $h(x) = e^x$ στο α.

8. $\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{5\pi}{8}, \dfrac{9\pi}{8}, \dfrac{13\pi}{8}$.

9. i) $f'(x)=\dfrac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x}$, $x\neq 0$ και δεν παραγωγίζεται στο 0. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο (0, 0) είναι η $x = 0$.

ii) $f'(x)=\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x\neq 0$ και $f'(0) = 0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο (0, 0) είναι η $y = 0$.

10. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι η $y = x - 1 + f(1)$ που εφάπτεται της C_g στο $(0, g(0))$.

11. i) $f'(0) = 1$.

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y = x + 1$ που σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

§ 2.4 Α΄ Ομάδας

1. $E'(1) = -48\pi$ cm^2/s

$V'(1) = -72\pi$ cm^3/s

2. $\dfrac{25}{81\pi}$ cm/s.

3. $x\in\left(20-\sqrt{220}, 20+\sqrt{220}\right)$.

4. i) $x(t) = 15t$, $y(t) = 20t$.

ii) $d'(t) = 25$ km/h.

5. (2, 1).

§ 2.4 Β΄ Ομάδας

1. 425 cm^3/s.

2. $(2\ln 5 + 2)$ cm^2/s.

3. 0,75 m/s.

4. 0,25 rad/min.

5. 0,2 m/s.

6. 2 $\dfrac{\text{μονάδες μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$.

7. i) $-\dfrac{1}{25}$ rad/sec. ii) $-\dfrac{\sqrt{2,75}}{25}$ m/s.

8. $3\sqrt{3}$ m/s.

§ 2.5 Α΄ Ομάδας

1. i) 1 ii) $\dfrac{\pi}{6}$ ή $\dfrac{\pi}{2}$

iii) $\dfrac{\pi}{2}$ iv) δεν ισχύει.

2. i) 2 ii) $\dfrac{\pi}{4}$

iii) $\xi\in(-3,-1)$ και $\xi = 1$.

3. Έχουμε $g'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}$ και

$0 < \alpha < x_0 < \beta$ οπότε $\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{1}{x_0}<\dfrac{1}{\alpha}$.

§ 2.5 Β΄ Ομάδας

1. i) Θ. Bolzano στα διαστήματα [– 1, 0] και [0, 1].

ii) Θ. Rolle στο $[x_1, x_2]$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες της f στα διαστήματα (– 1, 0) και (0, 1).

2. i) Θ. Rolle στο [0, 1].

ii) $\varepsilon\varphi x = 1 - x \Leftrightarrow f'(x) = 0$ που έχει ρίζα στο (0, 1).

3. i) Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει 2 ρίζες x_1, x_2 και εφαρμόζουμε Θ. Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, $x\in[x_1, x_2]$.

ii) Εφαρμογή του ερωτήματος i) με

$f(x) = \eta\mu\dfrac{x}{2}$.

4. i) $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow (|x|-1)^2 \ge 0$.

ii) Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$.

5. Θ.Μ.Τ. στο $[0, 4]$.

6. Δείξτε ότι $f(0) \le 0$ και $f(0) \ge 0$.

7. Υποθέτουμε ότι έχουν τρία κοινά σημεία με τετμημένες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ και εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$.

§ 2.6 Α΄ Ομάδας

1. $\varphi'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε $\varphi(x) = c$.

2. i) Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 2]$.

iii) Γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.

4. i) Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

ii) Γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

iii) Γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και σταθερή με τιμή μηδέν στο $[\pi, 2\pi]$.

5. i) $f'(x) = 5(x^4 + 1) > 0$ και $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 > 0$, $x \in (0, +\infty)$.

ii) Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, ενώ η g το διάστημα $(-3, +\infty)$.

iii) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών των συναρτήσεων και είναι γνησίως αύξουσες.

6. i) $f'(x) = e^x + \frac{1}{1+x} > 0$.

ii) $f(0) = 0$ και η f γνησίως αύξουσα.

§ 2.6 Β΄ Ομάδας

1. Με εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής βρίσκουμε ότι $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. i) $f'(x) = 3(x^2 - 1) < 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

ii) $[\alpha - 2, \alpha + 2]$

iii) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$.

3. i) $t = 1$ ή $t = 4$.

ii) Αριστερά όταν $t \in (0,4)$ και δεξιά όταν $t \in (4,5)$.

iii) Η ταχύτητα αυξάνεται στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[3, 5]$ και μειώνεται στο διάστημα $(1, 3)$.

4. $V'(t) = -\frac{100t}{(t+2)^3} < 0$

$\lim\limits_{t \to +\infty} V(t) = 25$ και το σύνολο τιμών της V είναι το $(25, 50]$.

5. i) $f'(x) = \frac{(x^2+3)^2}{(x^2-1)^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$.

ii) Όταν x ανήκει σε καθένα των διαστημάτων $(-\infty,-1)$, $(-1, 1)$, $(1,+\infty)$ η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ και επειδή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $f(x) = \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει 3 ρίζες.

6. $\alpha \ge 3$.

7. i) $f'(x) = x\eta\mu x > 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ii) Ισχύει $f(x) > f(0)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ αφού f γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

iii) $f'(x) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x \cdot x - \eta\mu x}{x^2} < 0$

λόγω του ερωτήματος ii).

8. i) $f'(x) = \dfrac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)^2(2\sigma\upsilon\nu x + 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$

για $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

ii) Επειδή $f(0) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, ισχύει $f(x) \geq f(0)$.

§ 2.7 Α΄ Ομάδας

1. Στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο και στο $x = 3$ τοπικό ελάχιστο.

2. α) i) Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii) Τοπικό μέγιστο το $g(-1) = 4$ και τοπικό ελάχιστο το $g(1) = 0$.

iii) Τοπικό μέγιστο το $h(0) = -1$ και τοπικό ελάχιστο το $h(1) = -2$.

β) i) Μια ρίζα στο $\mathbb{R}$ ως συνεχής και γνησίως αύξουσα.

ii) Μια ρίζα στο $(-\infty, -1]$, μια στο $[-1, 1]$ και μια στο $[1, +\infty)$.

iii) Μια ρίζα στο $[1, +\infty)$.

3. i) Το $f(0) = 0$ τοπικό ελάχιστο, το $f(1) = 1$ τοπικό μέγιστο.

ii) Ελάχιστο το $g(2) = -1$.

4. i) Ελάχιστο το $f(0) = 1$.

ii) Ελάχιστο το $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

5. $\alpha = 1, \beta = 0$, τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 3$ και τοπικό ελάχιστο $f(1) = -1$.

6. Είναι $p(x) = 2\left(x + \dfrac{400}{x}\right)$, $x > 0$ και ελάχιστο το $p(20) = 80$.

7. Είναι $E(x) = -x^2 + 40x$, $x \in (0,40)$ και μέγιστο το $E(20) = 400$.

8. $\dfrac{4}{3}$ mgr.

9. i) $(EZ)^2 = 2x^2 - 4x + 4$. ii) 1.

10. 30 μονάδες.

§ 2.7 Β΄ Ομάδας

1. i) Γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$.

ii) Μια ακριβώς ρίζα στο $\left(\dfrac{\pi}{3}, \pi\right)$.

2. i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ii) Γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Ελάχιστο το $\varphi(1) = 0$.

iii) Κοινό σημείο $(1, 0)$, κοινή εφαπτομένη την $y = x - 1$.

3. i) α) Η $f(x) = e^x - x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ οπότε $f(x) > f(0)$.

β) Η $g(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{1}{2}x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ii) α) Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2$, τότε $f''(x) = -\sigma\upsilon\nu x + 1$ οπότε η f' γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα $f'(x) > f'(0)$, οπότε και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος

α) βρίσκουμε ότι η $g(x) = \eta\mu x + \dfrac{1}{6}x^3 - x$, $x \in \mathbb{R}$

είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∞).

iii) α) Αν $f(x) = (1 + x)^\nu - 1 - \nu x$, $x \geq 0$ τότε $f'(x) = \nu[(1 + x)^{\nu-1} - 1] > 0$.

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) βρίσκουμε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = (1+x)^\nu - 1 - \nu x - \frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2$$

είναι γνησίως αύξουσα στο [0, +∞).

4. Η $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

5. Θεωρούμε την $h(x) = f(x) - g(x)$, οπότε $f'(\xi) = g'(\xi)$ με $\xi \in (x_1, x_2)$.

6. Είναι $f'(\alpha) = f'(\beta) = f'(\gamma) = 0$ και Θ. Rolle στα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$.

7. ii) $x = \frac{4}{11}(9 - 4\sqrt{3}) \cong 0{,}75$ m.

8. i) $(MA)^2 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + x$ και $M(4, 2)$.

ii) $\lambda_{\varepsilon\varphi} \cdot \lambda_{AM} = -1$.

9. $\frac{100}{\pi}$ και 100.

10. Οι εισπράξεις είναι

$E(x) = x(1500 - 5x)$.

$E'(x) = 0$, οπότε $x = 150$.

11. i) $t = 200$ s ii) $t \cong 55{,}6$ s.

12. i) $E = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} \cdot HB$, όπου HB ύψος τραπεζίου. Είναι $HB = 2\eta\mu\theta$ και $H\Gamma = 2\sigma\upsilon\nu\theta$.

ii) $\theta = \frac{\pi}{3}$.

13. ii) 75.

14. Η πυκνότητα του καπνού είναι

$r = r_1 + r_2$

$= k\frac{p}{x^2} + k \cdot \frac{8p}{(12 - x)^2}$, $k \in \mathbb{R}$.

Σε 4 km από το εργοστάσιο E_1.

§ 2.8 Α΄ Ομάδας

1. i) Κοίλη στο (–∞, 1], κυρτή στο [1, +∞) και το (1, 0) σημείο καμπής.

ii) Κοίλη στα (–∞, –2], (0, 2], κυρτή στα [–2, 0) και [2, +∞), ενώ τα σημεία καμπής είναι $\left(-2, -\frac{5}{4}\right)$ και $\left(2, \frac{5}{4}\right)$.

2. i) Κοίλη στο (–∞, 2], κυρτή στο [2, +∞), ενώ το $\left(2, \frac{2}{e}\right)$ είναι σημείο καμπής.

ii) Κοίλη στο (0, e], κυρτή στο [e,+∞), ενώ το (e, $-3e^2$) είναι σημείο καμπής.

iii) Κοίλη στο (–∞, 0], [1,+∞), κυρτή στο [0, 1], και τα (0, 1), (1, 3) σημεία καμπής.

3. i) Κυρτή στα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$, κοίλη στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και τα $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ σημεία καμπής.

ii) Κοίλη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και κυρτή στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, ενώ το (0, 0) είναι σημείο καμπής.

iii) Κοίλη στο (–∞, 0], κυρτή στο [0, +∞) και το (0, 0) σημείο καμπής.

iv) Κοίλη στο $(-\infty, 0]$, κυρτή στο $[0, +\infty)$ και το $(0, 0)$ είναι σημείο καμπής.

v) Κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και το $(0, 0)$ σημείο καμπής.

4. • - γνησίως αύξουσα στα $[-1, 1]$, $[4, 8]$.

- γνησίως φθίνουσα στα $[1, 4]$, $[8, 10]$.

• - κοίλη στα $[0, 2]$, $[5, 6]$ και $[7, 10]$.

- κυρτή στα $[-1, 0]$, $[2, 5]$ και $[6, 7]$.

• - Τα 1, 8 είναι θέσεις τοπικών μεγίστων.

- Τα -1, 4, 10 είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων.

• - Τα 0, 2, 5, 6, 7 είναι θέσεις σημείων καμπής.

5. i) Όταν $t \in [0, t_2]$ κινείται αριστερά και όταν $t \in [t_2, +\infty)$ δεξιά.

ii) Η ταχύτητα αυξάνεται στο διάστημα $[t_1, t_3]$ και μειώνεται σε καθένα από τα διαστήματα $[0, t_1]$ και $[t_3, +\infty)$.

§ 2.8 Β΄ Ομάδας

1. $A\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0, 0)$ και $\Gamma\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Τα A, Γ έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

2. $(\alpha, 2 - \alpha^2)$.

3. $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. i) Τοπικό μέγιστο το $f(0) = 2$, τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -2$ και σημείο καμπής το $(1, 0)$.

ii) $\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma} = -2$.

5. Η f'' δεν μηδενίζεται στο $(-2, 2)$.

§ 2.9 Α΄ Ομάδας

1. i) $x = 2$. ii) $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

iii) δεν υπάρχουν iv) $x = 0$.

2. i) $y = 1$. ii) $y = 0$ στο $+\infty$.

3. i) $y = x$, $x = 1$.

ii) $y = x + 2$, $x = 2$.

iii) $y = x + \frac{1}{2}$ στο $+\infty$ και

$y = -x - \frac{1}{2}$ στο $-\infty$.

4. i) 1. ii) $\frac{1}{2}$. iii) 0.

§ 2.9 Β΄ Ομάδας

1. i) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (-x - 1)) = 0$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x + 1)) = 0$.

ii) Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και άρα βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $-\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $+\infty$.

2. i) $y = 0$. ii) $y = 0$.

3. $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

4. Χρησιμοποιείστε τους κανόνες de L' Hospital.

5. Χρησιμοποιείστε τους κανόνες de L' Hospital.

6. i) 1, 0. iii) $x = 0$.

§ 2.10 Α΄ Ομάδας

1. i) Είναι $f'(x) = 3(x^2 - 2x + 3)$, $f''(x) = 6x - 6$ και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

ii) $f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$,

$f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$, ασύμπτωτες $y = 1$, $x = 1$ και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

2. i) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$, $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, ασύμπτωτες $x = 0$ και $y = x$ και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

ii) Ομοίως.

3. $f'(x) = 1 + \text{συν}x$, $f''(x) = -\text{ημ}x$ και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f στο $[-\pi, \pi]$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ *2ου* ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Γ΄ Ομάδας

1. i) $f'(1) = g'(1)$.

ii) Να πάρετε τη διαφορά $\varphi(x) = g(x) - f(x)$ και να εξετάσετε το πρόσημό της.

2. Να πάρετε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

3. $E'(\theta) = \text{συν}2\theta + \text{συν}\theta$.
Μέγιστο το $E\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

4. Το εμβαδόν του τομέα είναι $E = \dfrac{1}{2}r^2\theta$ ή $E(r) = 10r - r^2$. Μέγιστο το $E(5) = 25$.

5. iii) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ και το μήκος της σκάλας είναι $2\sqrt{2} \cong 2{,}8$ m.

6. i) $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$ και να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της f.

ii) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$, οπότε

$f(\alpha) > f(\alpha+1) \Leftrightarrow \alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^{\alpha}$

iii) Να λογαριθμήσετε την ισότητα $2^x = x^2$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, e]$, οπότε παίρνει την τιμή $x = 2$ μια φορά. Ομοίως στο $[e, +\infty)$ παίρνει την τιμή $x = 4$ μια φορά.

7. i) Να πάρετε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + \beta^x$ και να εφαρμόσετε το θεώρημα του Fermat.

ii) Να πάρετε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x - 1$ και να εφαρμόσετε το Θ. Fermat.

8. i) $f''(x) = e^x > 0$, $g''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

ii) $y = x + 1$ και $y = x - 1$.

iii) η f είναι κυρτή, ενώ η g είναι κοίλη.

iv) Να πάρετε τη διαφορά $f(x) - g(x)$.

9. i) $\lambda(1 - \ln\lambda)$. ii) $\lambda = e$

iii) Θεωρείστε τη διαφορά $g(x) - \lambda x$ που είναι η $f(x)$.

10. i) $f'(0) = 0$ ii) $x = \dfrac{1}{\kappa\pi}$, $\kappa \in \mathbb{Z}^*$.

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x) = 0$.

11. A. i) $\psi'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε $\psi(x) = c$
ii) $\varphi'(x) = 0$ και $\varphi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

B. ii) Να λάβετε υπόψιν το ερώτημα *A*.

12. i) $\det(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = 0$.

ii) Να εφαρμόσετε τους κανόνες de L' Hospital.

13. Α. i) Αν $OΔ$ το ύψος του τριγώνου $OΠA$, τότε $\eta\mu\frac{\theta}{2} = \frac{l}{4}$

ii) $S = \upsilon t$, οπότε $S = 4t$

Β. $l'(t) = 4\sigma\upsilon\nu t$.

α) 2 km/h β) 0 km/h γ) –2 km/h.

14. Συνολικό κόστος

$$K(x) = 600 + \frac{1000}{x} + 10(x+1).$$

Πρέπει να προσλάβει 10 εργάτες.

3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

§ 3.1 Α΄ Ομάδας

1. i) $\frac{x^4}{4} - \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + c$

ii) $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + c$

iii) $\frac{6}{5}x^{5/2} + c$

iv) $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + c$

v) $e^x - 3\ln|x| + \frac{1}{2}\eta\mu 2x + c$

vi) $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x + c$

vii) $x + \ln|x+2| + c$.

2. $f(x) = 2\sqrt{x} - 5$.

3. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x + 4$.

4. $f(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$.

5. 19 εκατ.

6. $K(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 100$.

7. 352 χιλ.

§ 3.1 Β΄ Ομάδας

1. $T(t) = \alpha e^{-kt} + T_0$

2. 9.976 ευρώ.

3. 814,4 ευρώ.

4. $f'(x) = g'(x) + c_1$ κ.τ.λ.

§ 3.2 Α΄ Ομάδας

1. i) $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$

ii) $\frac{1}{4}e^{2x}(6x^2 - 10x + 7) + c$

iii) $\frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{x^4}{16} + c$

iv) $(-x^2 + 1/2)\sigma\upsilon\nu 2x + x\eta\mu 2x + c$

v) $2x\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x + c$

vi) $x\ln x - x + c$

vii) $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$

viii) $\frac{1}{5}e^x(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) + c$

ix) $\frac{1}{2}e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c$.

2. i) $-\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x + c$

ii) $\frac{1}{32}(4x^2 - 16x + 7)^4 + c$

iii) $\frac{-1}{6(x^2+6x)^3} + c$

iv) $\frac{2}{3}(2 + x^3)^{1/2} + c$

v) $\frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2) + c$.

3. i) $-\sigma\upsilon\nu e^x + c$ ii) $\ln(e^x + 1) + c$

iii) $2\sqrt{\ln x}+c$

iv) $\ln(\ln(e^x+1))+c$

v) $\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}+c.$

§ 3.2 Β΄ Ομάδας

1. i) $-\ln(1+\sigma\upsilon\nu^2 x)+c$

ii) $-\frac{1}{2}[\ln(\sigma\upsilon\nu x)]^2+c$

iii) $e^{\eta\mu x}+c.$

2. i) $-\frac{2}{9}\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)^{3/2}+c$

ii) $\sqrt{x^2+1}+c$

iii) $\frac{1}{2}(x^2+1)[\ln(x^2+1)-1]+c.$

3. i) $\frac{x^3}{3}(\ln x^2-\frac{2}{3})+c$

ii) $t(\ln t)^2-2t\ln t+2t+c$

iii) $e^x\eta\mu e^x+\sigma\upsilon\nu e^x+c.$

4. i) $-\ln|\sigma\upsilon\nu x|+c$ και

$x\varepsilon\varphi x+\ln|\sigma\upsilon\nu x|+c$

ii) $-\frac{1}{\eta\mu x}+c$ και

$-\sigma\varphi x-\frac{1}{\eta\mu x}+c$

iii) $\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{3}-\sigma\upsilon\nu x+c$ και

$\eta\mu x-\frac{\eta\mu^3 x}{3}+c.$

5. i) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\eta\mu 2x+c$

ii) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\eta\mu 2x+c.$

iii) $\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}\eta\mu 4x+c.$

6. i) $\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x-\frac{1}{6}\sigma\upsilon\nu 3x+c$

ii) $\frac{1}{4}\eta\mu 2x+\frac{1}{16}\eta\mu 8x+c$

iii) $\frac{1}{4}\eta\mu 2x-\frac{1}{12}\eta\mu 6x+c.$

7. i) $\ln|x^2-3x+2|+c$

ii) $-5\ln|x-1|+8\ln|x-2|+c$

iii) $\frac{x^2}{2}-3x+\ln|x+1|+4\ln|x+2|+c$

iv) $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c.$

§ 3.3 Α΄ Ομάδας

1. i) $y=\frac{1}{2x^2+c}$ ii) $y^2-x^2=c$

iii) $y=ce^{x^2}$ iv) $y=\ln(\eta\mu x+c).$

2. i) $y=-\frac{3}{2}+ce^{2x}$ ii) $y=e^{-x}+ce^{-2x}$

iii) $y=2x+ce^{-x}+2$

iv) $y=ce^{-x^2}+1/2.$

3. $y=\frac{-3}{2x^2+1}$

4. $y=\frac{2}{3}.$

5. i) $y=1-\frac{4}{e^{\varepsilon\varphi x}}$

ii) $y=\frac{x\ln x-x+21}{x+1}.$

§3.3 Β΄ Ομάδας

1. $I(t)=\frac{1}{2}(\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t)+\frac{1}{2}e^{-t}$.

2. $y^2=2x$.

3. $y=x^2+cx$.

4. $y=e^{\frac{x^2}{2}}$.

5. $y(t)=\frac{\beta}{\alpha-\lambda}\cdot\frac{1}{e^{\lambda t}}+\frac{c}{e^{\alpha t}}$.

6. $\partial(t)=T+(\partial_0-T)e^{-\kappa t}$.

7. ii) $P(t)=\frac{m}{\kappa}+\left(p_0-\frac{m}{\kappa}\right)e^{\kappa t}$, $\kappa>0$.

8. i) $\frac{dV}{dt}=100\pi y'$

   ii) $y(t)=\left(-\frac{\sqrt{5}}{100}t+6\right)^2$

   iii) $t=120\sqrt{5}$ sec.

9. $E(t)=E_0e^{\frac{t-t_1}{Rc}}$.

10. i) α) $I(t)=5+\frac{c}{e^{3t}}$, β) 5

    ii) $I(t)=\frac{5}{4}(\eta\mu 3t-\sigma\upsilon\nu 3t)+\frac{c}{e^{3t}}$.

§3.4 Α΄ Ομάδας

1. i) –11 ii) 4 iii) –2 iv)15.

2. $\ln\frac{1}{t}=\ln 1-\ln t$.

3. $\kappa=4$.

4. i) 22 ii) –12

§3.5 Α΄ Ομάδας

1. i) 6 ii) $3-\frac{2}{\sqrt{e}}$ iii) –1 iv) $\frac{29}{6}$.

2. Εφαρμόζουμε ιδιότητες.

4. 1

5. i) $-\eta\mu x\cdot|\eta\mu x|$ ii) $-\frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{2x}$

6. i) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

   ii) χρησιμοποιείστε το (i).

§3.5 Β΄ Ομάδας

1. 10.

2. $f'(x)=0$.

3. Τοπ. ελάχιστο το $f(2)=0$.

4. $\int_0^x f(t)dt+xf(x)$.

5. $F(x)=0$, $x\in(0,+\infty)$.

6. De l' Hospital.

7. i) $4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ ii) – συν1.

8. i) $\frac{5}{3}$ ii) $2-\frac{\pi^2}{2}$ iii) $\frac{11}{6}$.

9. i) 4 ii) $\frac{e-2}{e}$

   iii) $5\ln 10-\frac{9}{2}\ln 9-\frac{1}{2}$, iv) $-\frac{1}{5}(e^{\pi/2}+1)$.

10. $\frac{\pi^2}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}$, $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$.

11. $f(0)=1$.

12. κατά παράγοντες.

§3.6 Α΄ Ομάδας

1. $\bar{f}=1$.

3. $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

§3.6 Β΄ Ομάδας

1. $\bar{f} = \dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3}$, $\bar{g} = \dfrac{1}{\alpha\beta}$.

2.α) $\dfrac{PR^2}{6nl}$ β) $\upsilon_{\mu\varepsilon\gamma} = \dfrac{PR^2}{4nl}$.

§3.7 Α΄ Ομάδας

1. $\dfrac{14}{3}$ τ.μ.

2. i) $\dfrac{3^5}{4}$ τ.μ. ii) $\sqrt{3}$ τ.μ.

3. $\dfrac{9}{2}$ τ.μ.

4. $\dfrac{37}{12}$ τ.μ.

5. $\dfrac{125}{6}$ τ.μ.

§3.7 Β΄ Ομάδας

1. $y = 6x-3$, $E = \dfrac{1}{4}$ τ.μ.

2. $4+\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$ τ.μ.

3. $\dfrac{11}{12}$ τ.μ.

4. $\dfrac{1}{6}$ τ.μ.

5. i) $1 + e(\ln\lambda - 1)$ ii) $+\infty$.

6. $\dfrac{2}{\ln 3}+\dfrac{3}{2}$ τ.μ.

7. $\dfrac{7}{4}$ τ.μ.

8. i) $y = x$, $y = -x+\pi$ ii) $\dfrac{\pi^2}{4}-2$.

9. α) $\dfrac{1}{3}$ τ.μ. β) $x = \dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$.

10. $\dfrac{1}{2}$.

11. i) $f(x) = x^2-3x+2$ ii) $\dfrac{1}{6}$ τ.μ.

12. i) $y = -2x+2$, $y = 2x-6$

ii) $E_1 = \dfrac{4}{3}$, $E_2 = \dfrac{2}{3}$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ *3ου* ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Γ΄ Ομάδας

1. ii) $\dfrac{\pi}{4}\ln 3$.

2. i) $-\ln\sqrt{3}$ ii) $\ln\sqrt{3}$.

3. $\ln|u+1| - \ln|u+2| + c$

i) $\ln|\eta\mu x+1| - \ln|\eta\mu x+2| + c$

ii) $\ln(e^x+1) - \ln(e^x+2) + c$.

4. i) $\dfrac{1}{2\nu+2}$

ii) $\dfrac{1}{2}\ln 2$, $\dfrac{1}{2}(1-\ln 2)$, $\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{4}$.

5. Τα μέλη της ισότητας έχουν ίσες παραγώγους.

6. i) $D_f = [1,+\infty)$ $D_F = [1,+\infty)$.

7. i) $F(x) + G(x) = e^x - 1$,

$F(x) - G(x) = \dfrac{e^x}{5}(\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu 2x) - \dfrac{1}{5}$

ii) $I = \dfrac{3}{5}e^{\pi}(e^{\pi}-1)$, $J = \dfrac{2}{5}e^{\pi}(e^{\pi}-1)$.

8. $\alpha = \sqrt[3]{4}$.

9. i) $0 < \lambda < 1$, $E(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}-1$,

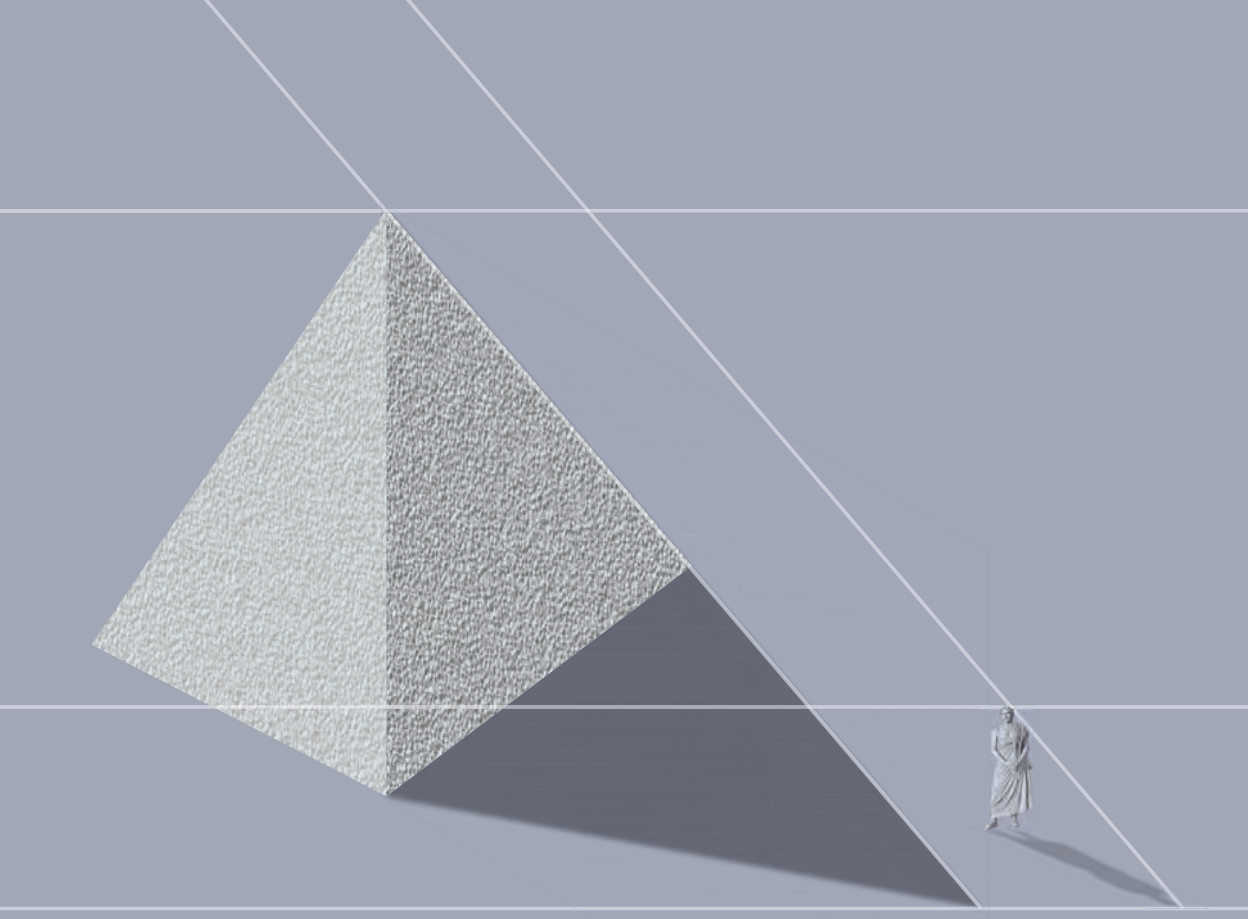
$\lambda > 1$, $E(\lambda) = 1-\dfrac{1}{\lambda}$.

ii) $\lambda = 2$ iii) $+\infty$ και 1.

10. i) $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx \geq 0$.

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας και Θρησκευμάτων / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.



ΑΝΑΘΕΩΡΗΜΕΝΗ
22-0273
ΕΚΔΟΣΗ

Κωδικός Βιβλίου: 0-22-0273
ISBN 978-960-06-5175-1

ΙΤΥΕ
"ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ"
ινστιτουτο
τεχνολογιας
υπολογιστων & εκδοσεων

(01) 000000 0 22 0273 0