

ΘΕΜΑ 1^ο

14801 α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$, τότε το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x .

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4]$.

x	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η ανισότητα: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2^ο

14617 Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3, 4)$. (Μονάδες 13)

14572 Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$. (Μονάδες 10)

β) $|2x + 4| < 2$. (Μονάδες 15)

14491 α) Να λυθεί η ανίσωση $|y - 3| < 1$ (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

14412 Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$. (Μονάδες 13)

13177 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$. (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1. (Μονάδες 9)

1384 Δίνεται η παράσταση: $A = x - y + 2$, με x, y , πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

1371 α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$, (1) (Μονάδες 15)



β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

1366 α) Αν $a < 0$, να αποδειχθεί ότι: $a + \frac{1}{a} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $a < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|a| + \left|\frac{1}{a}\right| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

1323 Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y-2| < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1|+|y-3|}{2}$

(Μονάδες 13)

1322 Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3}$

(Μονάδες 13)

1320 Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι

ανεξάρτητη του x .

(Μονάδες 13)

1303 Δίνονται οι παραστάσεις: $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.

(Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

1258 Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$

(Μονάδες 15)

1239 Δίνεται η παράσταση: $A = |3x-6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι



- i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$
ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$. (Μονάδες 12)
- β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι: $\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = 3x + 4$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4^ο

13179 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α)

- i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)
- ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)

β)

- i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 5)
- ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$. (Μονάδες 6)

1525 Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

- $|\alpha - 2| < 1$
- $|\beta - 3| \leq 2$

- α) Να αποδειχθεί ότι $1 < \alpha < 3$. (Μονάδες 4)
- β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$. (Μονάδες 7)
- δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

1515 Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$

- α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β . (Μονάδες 13)
- β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:



$$K = |a - 1| + |1 - \beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά

(Μονάδες 12)

1429 Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5| = |x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

1428 Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2| + |x-7|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2| + |x-7|$ γεωμετρικά.

(Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

