

ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

**15252** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{AB} = (2, 1)$  και  $\vec{AF} = (3, -1)$ .

α) Να δείξετε ότι  $\vec{BF} = (1, -2)$ .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με υποτεινούσα την ΑΓ.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

(Μονάδες 8)

**15852** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (3, 2)$ ,  $\vec{b} = (-2, 1)$ .

Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα  $\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

(Μονάδες 7)

β) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  και το μέτρο του διανύσματος  $\vec{a}$ .

(Μονάδες 6)

γ) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{v}$ .

(Μονάδες 12)

**22554** Στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$ , με μοναδιαία διανύσματα των αξόνων

$\vec{i}, \vec{j}$  τα  $\vec{i}, \vec{j}$  αντίστοιχα, τα σημεία Α και Β έχουν διανύσματα θέσεως

$\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$  και  $\vec{OB} = 6\vec{i} - \vec{j}$ . Έστω Μ ένα σημείο τέτοιο ώστε

$$\vec{OM} = \frac{1}{5}(2\vec{OA} - \vec{OB}).$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\vec{AB} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ ,

(Μονάδες 8)

ii.  $\vec{OM} = \vec{j}$ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{AB} \cdot \vec{OM}$ .

(Μονάδες 9)

**22170** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (-1, 3)$ ,  $\vec{b} = (-2, -\frac{1}{2})$  και  $\vec{v} = (x^2, x - 1)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$ .

(Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  για τους οποίους τα διανύσματα  $\vec{u} = (3, 4)$  και  $\vec{v}$  είναι κάθετα.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε τους αριθμούς  $x$  για τους οποίους τα διανύσματα  $\vec{v}$  και  $\vec{b}$  είναι

συγγραμμικά;

(Μονάδες 09)



**14586** Δίνονται τα σημεία  $A(1,2)$ ,  $B(3,4)$  και  $\Gamma(5,-2)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AG}$  και να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A}$  είναι ορθή. (Μονάδες 9)

β) Αν  $M$  είναι το μέσο του  $B\Gamma$ , να βρείτε τα μέτρα των  $\overrightarrow{AM}$  και  $\overrightarrow{BG}$ . (Μονάδες 8)

γ) Να γραφεί το  $\overrightarrow{BG}$  ως γραμμικός συνδυασμός των  $\overrightarrow{AG}$  και  $\overrightarrow{AM}$ . (Μονάδες 8)

**20888** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$ , για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{\beta}| = 5, \quad (\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3} \quad \text{και} \quad \vec{\gamma} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}. \quad \text{Να υπολογίσετε:}$$

α) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ . (Μονάδες 10)

β) το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ . (Μονάδες 15)

**20685** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{u} = (1,1)$ ,  $\vec{w} = (-10,2)$  και τα σημεία  $A(-1,2)$ ,

$B(\beta,0)$ ,  $\Gamma(0,\gamma)$ . Τα διανύσματα  $\vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  είναι κάθετα και το διάνυσμα  $\vec{w}$  είναι παράλληλο στο διάνυσμα  $\overrightarrow{AG}$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overrightarrow{AB}$  και να αποδείξετε ότι  $\beta = 1$ . (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overrightarrow{AG}$  και να αποδείξετε ότι  $\gamma = \frac{9}{5}$ . (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ . (Μονάδες 7)

**15186** Δίνονται τα σημεία  $A(2,1)$ ,  $B(6,3)$ ,  $\Delta(1,-2)$  και  $\Gamma(9,2)$ .

Να αποδείξετε ότι:

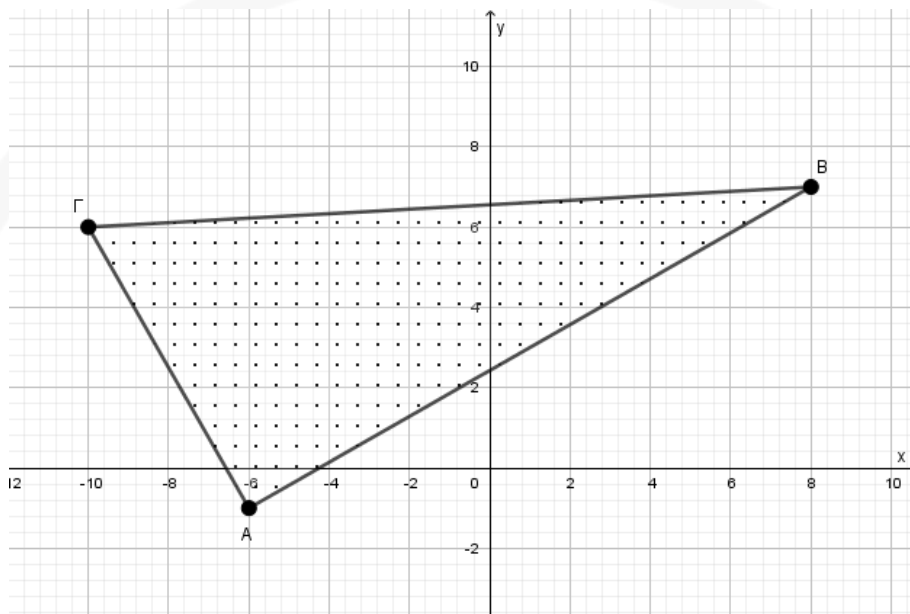
α) Το μέσο  $M$  του τμήματος  $AB$  έχει συντεταγμένες  $(4,2)$  και το μέσο  $N$  του τμήματος  $\Gamma\Delta$  έχει συντεταγμένες  $(5,0)$ . (Μονάδες 8)

β)  $\overrightarrow{MN} = (1,-2)$  και  $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (8,4)$ . (Μονάδες 8)

γ)  $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ . (Μονάδες 9)



**15996** Δίνονται τα σημεία  $A(-6, -1)$ ,  $B(8, 7)$ ,  $\Gamma(-10, 6)$ , τα οποία ορίζουν τρίγωνο  $AB\Gamma$ .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overline{AB}$ ,  $\overline{B\Gamma}$  και του αθροίσματος τους  $\overline{AB} + \overline{B\Gamma}$ . (Μονάδες 10)

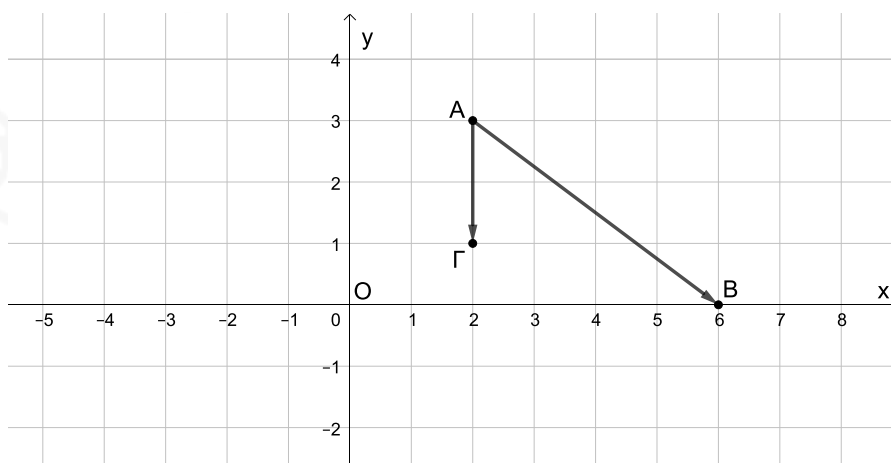
β) Ένας μαθητής βλέποντας το τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχυρίστηκε ότι είναι ορθογώνιο. Να ελέγξετε την αλήθεια του ισχυρισμού. (Μονάδες 15)

**17075** Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα διανύσματα  $\overline{AB}$  και  $\overline{A\Gamma}$  του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\overline{AB} = (4, -3)$  και  $\overline{A\Gamma} = (0, -2)$ . (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\overline{AB}$  και  $\overline{A\Gamma}$ .

(Μονάδες 13)



**16428** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  με:  $|\vec{a}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = \frac{1}{2}$  και

$$|3\vec{a} + 2\vec{\beta}| = |\vec{a} - 2\vec{\beta}|.$$

α) Να αποδείξετε ότι:  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -\frac{3}{8}$ . (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ . (Μονάδες 10)

**16427** Δίνονται τα σημεία  $A(-2, 3)$ ,  $B(0, 8)$ ,  $\Gamma(5, 3)$  και  $\Delta(10, 5)$ . Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ . (Μονάδες 12)

β) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}$  με τον άξονα  $x'x$ . (Μονάδες 13)

**16426** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (2, -1)$  και  $\vec{\beta} = (-3, 2)$ .

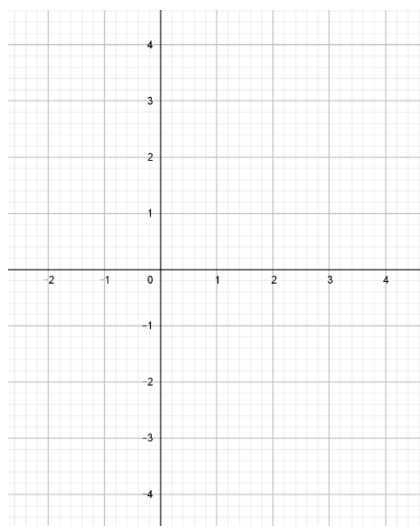
α) Να υπολογίσετε το γινόμενο  $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{\beta})$ . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = (x, y)$  όταν  $\vec{\gamma} \perp \vec{a}$  και  $|\vec{\gamma}| = \sqrt{5}$ . (Μονάδες 15)

**15317** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{v} = (3, 0)$  και  $\vec{w} = (-3, 4)$ .

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)

β) i. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τα διανύσματα  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$ . (Μονάδες 10)



- ii. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζουν τα διανύσματα.  
(Μονάδες 3)

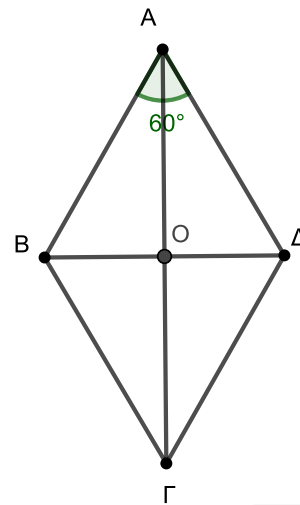
**14953** Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(-2,5)$ ,  $B(7,8)$ ,  $\Gamma(1,-4)$ .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{A\Gamma}$ . (Μονάδες 10)  
β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ . (Μονάδες 10)  
γ) Να βρείτε, σε μοίρες, τη γωνία  $B\hat{A}\Gamma$ . (Μονάδες 5)

**16144** Δίνεται ρόμβος  $AB\Gamma\Delta$  με κέντρο  $O$ , πλευρά 4 και  $\hat{A} = 60^\circ$ . Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

- α)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$   
β)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$   
γ)  $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AO}$   
δ)  $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB}$   
ε)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(Μονάδες 25)

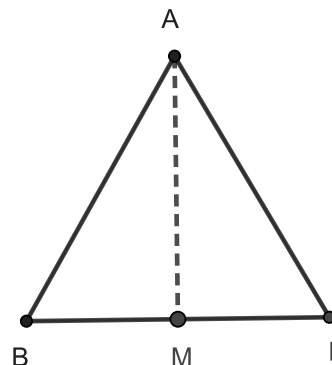


**16141** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  πλευράς 10 και το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ .

- α) Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών:

- i.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$   
ii.  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B\Gamma})$   
iii.  $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{\Gamma A})$   
iv.  $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{\Gamma M})$   
v.  $(\overrightarrow{\Gamma M}, \overrightarrow{\Gamma B})$

(Μονάδες 10)



- β) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα:

- i.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$



ii.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GA}$

iii.  $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GB}$

(Μονάδες 15)

**15825** Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{b}$  με  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$  και το

$\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{b}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι  $\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = 0$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη  $(\vec{a}, \vec{\gamma})$ .

(Μονάδες 7)

**15379** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (1, 3)$ ,  $\vec{b} = (3, -1)$ . Να υπολογίσετε:

α) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  και τη γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων  $\vec{a}, \vec{b}$ .

(Μονάδες 13)

β) το διάνυσμα  $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - \vec{b}$ .

(Μονάδες 12)

**15463** Δίνονται τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$  και  $\overrightarrow{AF} = (3, -1)$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{BF} = (1, -2)$ .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BF}$ .

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BF}|$ .

(Μονάδες 8)

**15073** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (1, 2)$  και  $\vec{b} = (2, 3)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\vec{\gamma} = 2\vec{a} + \vec{b}$ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ .

(Μονάδες 9)

**15038** Θεωρούμε διανύσματα  $\vec{a}, \vec{b}$  τέτοια ώστε  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$  και  $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ .

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{a}, \vec{b}$ .

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα  $\vec{a}^2$  και  $\vec{b}^2$ .

(Μονάδες 6)



γ) Να αποδείξετε ότι  $(3\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$ . (Μονάδες 10)

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

**18243** Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 4$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$  και τα διανύσματα  $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

α) Να βρείτε το  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το  $\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}$ . (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τα  $|\vec{\gamma}|, |\vec{\delta}|$ . (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη γωνία  $(\vec{\gamma}, \vec{\delta})$ . (Μονάδες 5)

### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

**18520** α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύει:

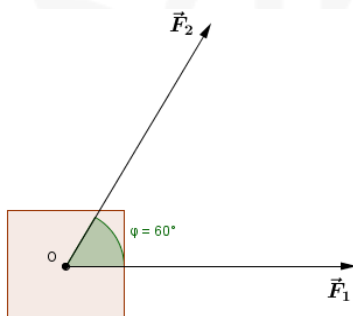
$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (1) \quad (\text{Μονάδες } 06)$$

β) Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{OB} = \vec{\beta}$ .

i. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ . (Μονάδες 05)

ii. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας (1). (Μονάδες 04)

γ) Ένα σώμα σύρεται πάνω σε λείο επίπεδο από δύο ανθρώπους, οι οποίοι εξασκούν πάνω σε αυτό δυνάμεις  $\vec{F}_1$  και  $\vec{F}_2$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα 10N(Newton) και η γωνία που σχηματίζουν είναι  $60^\circ$ . Να σχεδιάσετε την συνισταμένη δύναμη  $\vec{F}$  και να βρείτε το μέτρο της. (Μονάδες 10)



**15320** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ με  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  και  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ , όπου  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$  είναι μη μηδενικά διανύσματα.

α) Να δείξετε ότι:

i.  $|\overrightarrow{OG}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ . (Μονάδες 9)

ii.  $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ . (Μονάδες 9)

β) Αν  $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AB}|$ , να δείξετε ότι το ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

**18547** Δίνονται τα σημεία  $A(0, -1)$ ,  $B(\lambda, 1)$  και  $\Gamma(\lambda-2, \lambda-3)$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε :

i. Τα σημεία A, B και Γ να είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 8)

ii. Το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ . (Μονάδες 7)

β) Για  $\lambda = -2$ , να βρείτε:

i. Το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ . (Μονάδες 4)

ii. Το εμβαδό του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 6)

