



Ενότητα Α - Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου - ΘΕΩΡΙΑ



1.1 Α. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

1. Ποια είναι τα σύνολα των αριθμών;

Πραγματικοί αριθμοί είναι όλοι οι αριθμοί που γνωρίζουμε και αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Ρητός λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί και $\nu \neq 0$.

Άρρητος λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.

2. Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός αριθμού;

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a είναι ο θετικός αριθμός που δείχνει την απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό a , από την αρχή του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.

Ισχύει επίσης ότι $|0| = 0$.

$$\text{π.χ.: } |4| = 4$$

$$|-6| = 6$$

3. Τι γνωρίζουμε για τις πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς;

• Πρόσθεση-Αφαίρεση

➔ Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα αυτό βάζουμε ως πρόσημο το κοινό τους πρόσημο.

$$3 + 7 = +10$$

$$-5 - 7 = -12$$

→ Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά αυτή βάζουμε πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

$$-11 + 6 = -5$$

$$-7 + 10 = +3$$

→ Η πράξη της αφαίρεσης γίνεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης. Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου: $a - b = a + (-b)$

$$9 - 12 = 9 + (-12) = -3$$

• Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση

→ Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο + .

$$3 \cdot 7 = +21$$

$$(-4) \cdot (-2) = +8$$

→ Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο - .

$$4 \cdot (-2) = -8$$

$$-3 \cdot 2 = -6$$

→ Η πράξη της διαίρεσης γίνεται με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού.

→ Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών ($a : b$, ή με $b \neq 0$), πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$3 : 9 = 3 \cdot \frac{1}{9}$$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητες των πράξεων;

Αντιμεταθετική Ιδιότητα:	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική Ιδιότητα:	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$ $\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$ $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική Ιδιότητα:	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

Επίσης ισχύει: $\alpha \cdot 0 = 0$

Αν $\alpha\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

5. Πότε δύο αριθμοί ονομάζονται αντίθετοι;

Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν λέγονται αντίθετοι.

$$5 + (-5) = 0$$

6. Πότε δύο αριθμοί ονομάζονται αντίστροφοι;

Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα λέγονται αντίστροφοι.

$$5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$\begin{aligned}
 & -1 + \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\
 & -1 + \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{3} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\
 & -1 + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\
 & -\frac{2}{8} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

2. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$\frac{\frac{3}{5} - 1}{3 - \frac{8}{10}}$$

$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{5}{5}}{\frac{30}{10} - \frac{8}{10}} = \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{22}{10}} = \frac{-2 \cdot 10}{5 \cdot 22} = \frac{-2}{11} = -\frac{2}{11}$$

3. Αν γνωρίζουμε ότι $\alpha + \beta = -3$, να υπολογιστεί η παράσταση:

Χρησιμοποιήσαμε:

Επιμεριστική ιδιότητα

Αντιμεταθετική ιδιότητα

Αναγωγή ομοίων όρων

$$\alpha + (\beta - 2) - 2(\alpha + 1) + (2 - 2\beta)$$

$$\alpha + \beta - 2 - 2\alpha - 2 + 2 - 2\beta =$$

$$\alpha - 2\alpha + \beta - 2\beta - 2 - 2 + 2 =$$

$$-\alpha - \beta - 2 =$$

$$-(\alpha + \beta) - 2 =$$

$$-(-3) - 2 =$$

$$3 - 2 =$$

Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

1. Τι είναι δύναμη αριθμού;

Η δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό a και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $n \geq 2$ συμβολίζεται με a^n και είναι το γινόμενο n παραγόντων ίσων με τον αριθμό a .

Δηλαδή $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n φορές)

Επίσης ισχύει $a^1 = a$ και $a^0 = 1$, $a \neq 0$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων;

1 $a^v \cdot a^\mu = a^{v+\mu}$

π.χ. : $2^3 \cdot 2^9 = 2^{11}$

2 $a^v : a^\mu = a^{v-\mu}$

π.χ. : $3^4 : 3^2 = 3^2$

3 $(a \cdot \beta)^v = a^v \cdot \beta^v$

π.χ. : $(x \cdot 3)^2 = x^2 \cdot 3^2$

4 $\left(\frac{a}{\beta}\right)^v = \frac{a^v}{\beta^v}$

π.χ. : $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$

5 $(a^\mu)^v = a^{\mu \cdot v}$

π.χ. : $(4^6)^2 = 4^{6 \cdot 2} = 4^{12}$

6 $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^v$

π.χ. : $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$\frac{3^{-2} \cdot 3^3 \cdot 2^3}{(3^3 \cdot 4^2)^2}$$

$$\frac{3^{-2} \cdot 3^3 \cdot 2^3}{(3^3 \cdot 4^2)^2} =$$

$$\frac{3^{-2+3} \cdot 2^3}{3^{3 \cdot 2} \cdot 4^{2 \cdot 2}} =$$

$$\frac{3^1 \cdot 2^3}{3^6 \cdot 4^4} =$$

$$\frac{3 \cdot 2^3}{3^6 \cdot (2^2)^4} =$$

$$\frac{3 \cdot 2^3}{3^6 \cdot 2^8} =$$

$$3^{1-6} \cdot 2^{3-8} =$$

$$3^{-5} \cdot 2^{-5} =$$

$$\frac{1}{3^5 \cdot 2^5} =$$

$$\frac{1}{6^5}$$

2. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$A = 5^{-2} \cdot 5^3 - 7(2^4 - 4^2) + 3^2 - 3$$

Θυμόμαστε την προτεραιότητα των πράξεων:

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

$$5^{-2} \cdot 5^3 - 7(2^4 - 4^2) - 3^2 + 3 =$$

$$5^{-2+3} - 7(16 - 16) - 9 + 3 =$$

$$5^1 - 7(0) - 6 =$$

$$5 - 0 - 6 =$$

$$5 - 6 =$$

$$-1$$

3. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = x \cdot (x \cdot y^3)^2 : (x^4 \cdot y)^{-1}$ αν γνωρίζουμε ότι $x \cdot y = -1$.

$$x \cdot (x \cdot y^3)^2 : (x^4 \cdot y)^{-1} =$$

$$x \cdot x^2 \cdot y^6 : x^{-4} \cdot y^{-1} =$$

$$x^3 \cdot y^6 \cdot x^4 \cdot y^1 =$$

$$x^7 \cdot y^7 =$$

$$(x \cdot y)^7 =$$

$$(-1)^7 =$$

$$-1$$

Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

1. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού πραγματικού αριθμού x;

Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x.

Ορίζουμε ότι $\sqrt{0} = 0$.

Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$(\sqrt{x})^2 = x, \quad x \geq 0$$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας;

- Το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών δύο μη αρνητικών αριθμών ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

- Το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών δύο μη αρνητικών αριθμών ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την παράσταση $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα παίρνουμε:

$$7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (7 - 2 + 5)\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

2. Να απλοποιήσετε την παράσταση $5\sqrt{2} - 2\sqrt{50} + \sqrt{18} - 4\sqrt{8}$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των ριζών παίρνουμε:

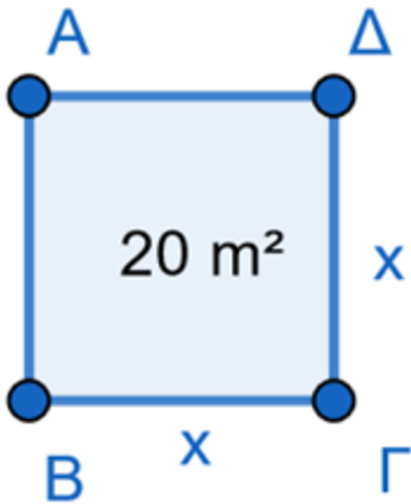
$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} - 2\sqrt{50} + \sqrt{18} - 4\sqrt{8} &= \\ 5\sqrt{2} - 2\sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} - 4\sqrt{4 \cdot 2} &= \\ 5\sqrt{2} - 2 \cdot 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 \cdot 2\sqrt{2} &= \\ 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} &= \\ (5 - 10 + 3 - 8)\sqrt{2} &= \\ -10\sqrt{2} & \end{aligned}$$

3. Να μετατραπεί το κλάσμα $\frac{2}{\sqrt{2}}$ σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή:

Θα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

4. Τι πλευρά έχει ένα τετράγωνο με εμβαδόν 20 m^2 ;



Γνωρίζουμε ότι: $E_{\text{τετρ.}} = x \cdot x$

$$x^2 = 20$$

$$x = \sqrt{20}$$

$$x = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \text{ m}$$