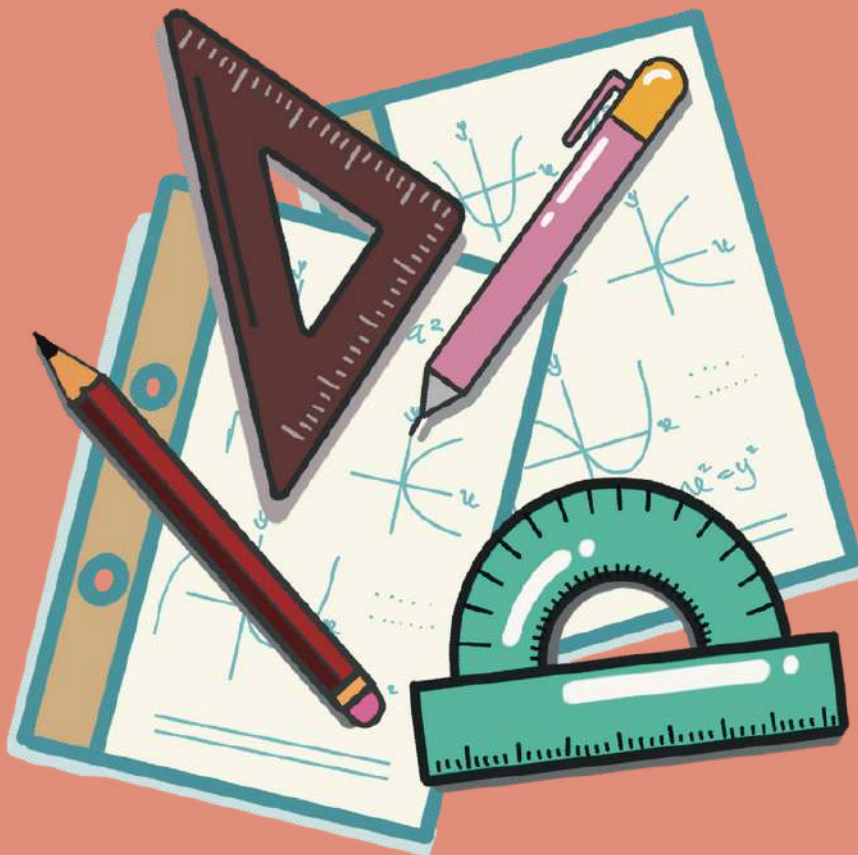


ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ



Διαδραστικό Βοήθημα

Θεωρία - VideoΜαθήματα - Ασκήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 Αναλογίες

7.1 Εισαγωγή

7.2 Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε n ίσα μέρη

7.3 Γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό - Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων

7.4 Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες

7.5 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

7.6 Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο

7.7 Θεώρημα του Θαλή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 Ομοιότητα

8.1 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

8.2 Κριτήρια ομοιότητας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 Μετρικές σχέσεις

9.1 Ορθές προβολές

9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

9.3 Γεωμετρικές κατασκευές

9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 Εμβαδά

10.1 Πολυγωνικά χωρία

10.2 Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

10.3 Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 Μέτρηση κύκλου

11.1 Ορισμός κανονικού πολυγώνου

11.2 Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

11.4 Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

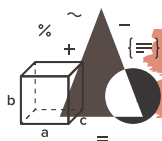
11.5 Μήκος τόξου

11.6 Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα

11.7 Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος



αναλογίες



1-6. Αναλογίες

1. Πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ανάλογα προς δύο άλλα τμήματα;

Δύο ευθύγραμμα τμήματα α, γ λέγονται ανάλογα προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ο λόγος του α προς το β ισούται με το λόγο του γ προς το δ , δηλαδή ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Δηλαδή υπάρχει ένας θετικός αριθμός λ ώστε να έχουμε $\alpha = \lambda \cdot \beta$ και $\gamma = \lambda \cdot \delta$.

2. Τι ονομάζουμε αναλογία ευθύγραμμων τμημάτων;

Η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ των ανάλογων ευθύγραμμων τμημάτων $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ λέγεται αναλογία. Τα τμήματα α, β λέγονται ομόλογα (ή αντίστοιχα), όπως και τα τμήματα γ, δ .

3. Ποιες είναι οι ιδιότητες των αναλογιών;

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha\gamma, \text{ το } \beta \text{ λέγεται και γεωμετρικός μέσος των } \alpha, \gamma.$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \dots = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\alpha + \gamma + \dots + \kappa}{\beta + \delta + \dots + \lambda}$$



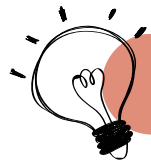
**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

4. Τι ονομάζουμε μέτρο (ή μήκος) ευθύγραμμου τμήματος;

Μέτρο (ή μήκος) ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, που παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης. Το μέτρο είναι μη αρνητικός αριθμός και συμβολίζεται όπως και το τμήμα.

5. Πότε ένα σημείο διαιρεί εσωτερικά ένα ευθύγραμμο τμήμα σε συγκεκριμένο λόγο;

Ένα σημείο M διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα AB σε λόγο λ αν και μόνο αν $\frac{MA}{MB} = \lambda$.
Το σημείο M είναι μοναδικό σημείο.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να βρεθούν οι λόγοι $\frac{AB}{AG}$, $\frac{AB}{GB}$, $\frac{AG}{GB}$ αν γνωρίζουμε ότι $AB=12\beta$ και $AG=4\beta$.



Παρατηρούμε το σχήμα και έχουμε $AB=12\beta$, $AG=4\beta$ και $GB=8\beta$.

Οπότε παίρνουμε αντίστοιχα: $\frac{AB}{AG} = \frac{12\beta}{4\beta} = 3$

$$\frac{AB}{GB} = \frac{12\beta}{8\beta} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AG}{GB} = \frac{4\beta}{8\beta} = \frac{1}{2}$$

2. Ο λόγος μιας γωνίας $\hat{\omega}$ ως προς την παραπληρωματική της είναι $\frac{2}{3}$.
Να βρεθεί η γωνία $\hat{\omega}$.

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες γνωρίζουμε ότι $\hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ$.

Οπότε έχουμε $\hat{\phi} = 180^\circ - \hat{\omega}$, και παίρνουμε:

$$\frac{\hat{\omega}}{\hat{\phi}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\hat{\omega}}{180^\circ - \hat{\omega}} = \frac{2}{3}$$

$$3\hat{\omega} = 2(180^\circ - \hat{\omega})$$

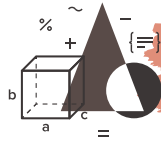
$$3\hat{\omega} = 360^\circ - 2\hat{\omega}$$

$$5\hat{\omega} = 360^\circ$$

$$\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{5}$$

$$\hat{\omega} = 72^\circ$$



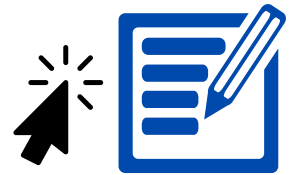


7. Θεώρημα Θαλή

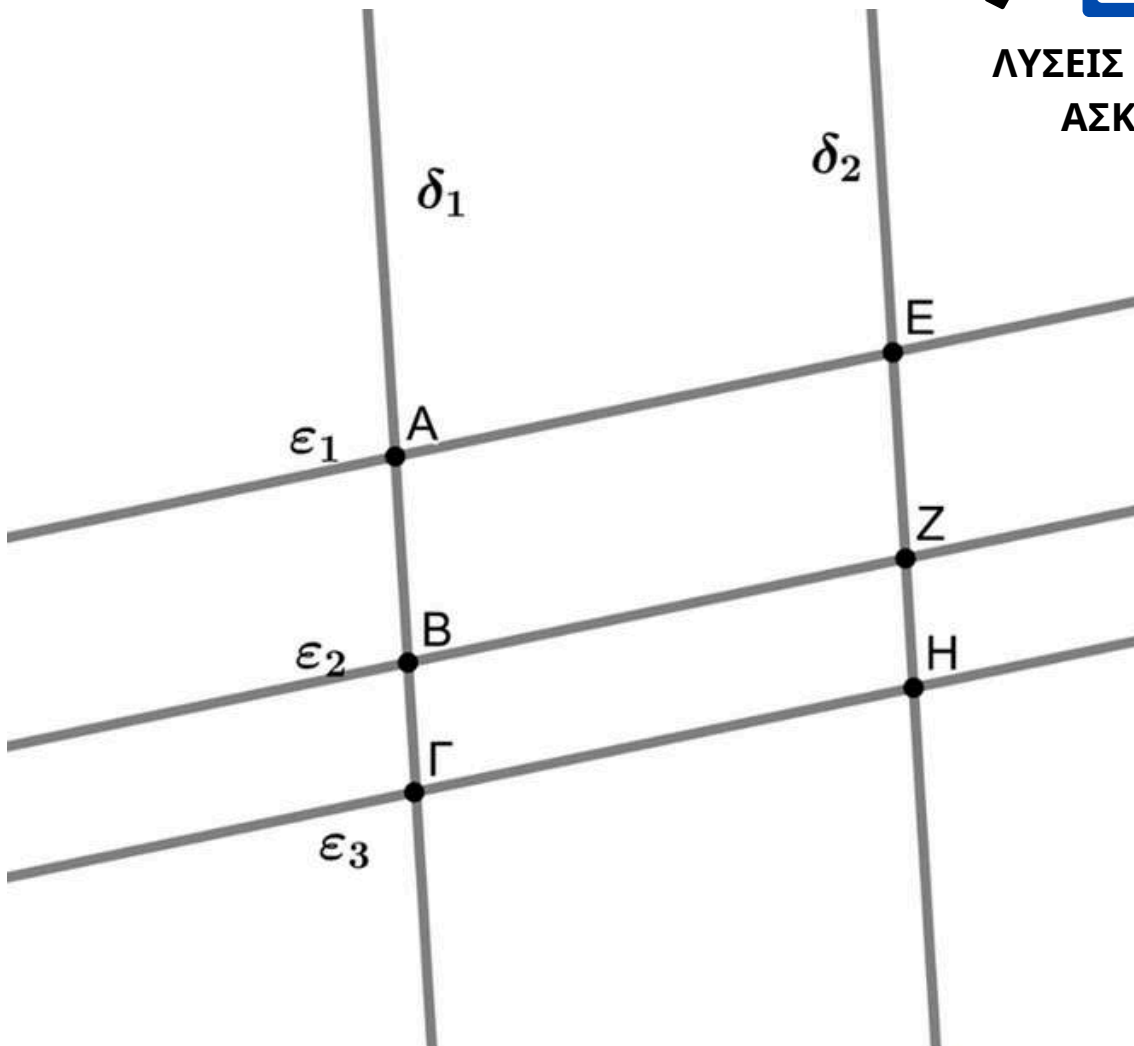
1. Θεώρημα Θαλή

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

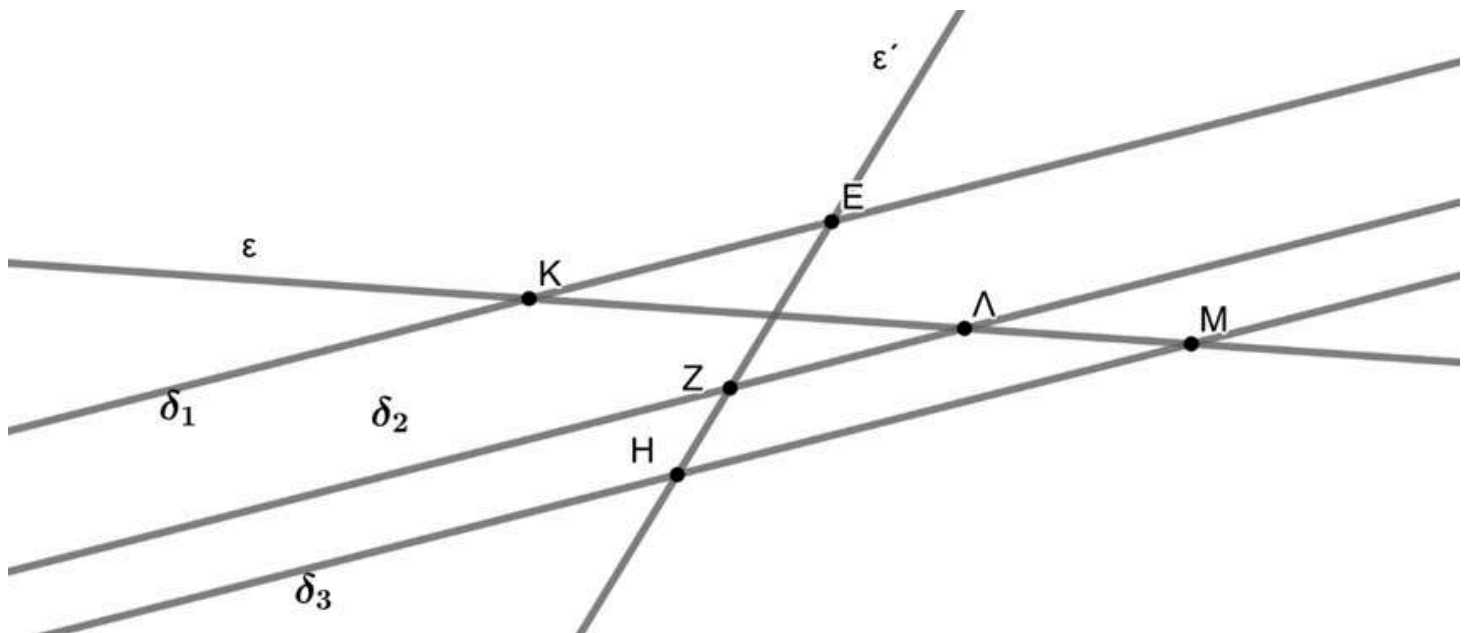
Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ τότε $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Αν $\delta_1 \parallel \delta_2 \parallel \delta_3$ τότε $\frac{ΚΛ}{ΕΖ} = \frac{ΛΜ}{ΖΗ} = \frac{ΚΜ}{ΕΗ}$.

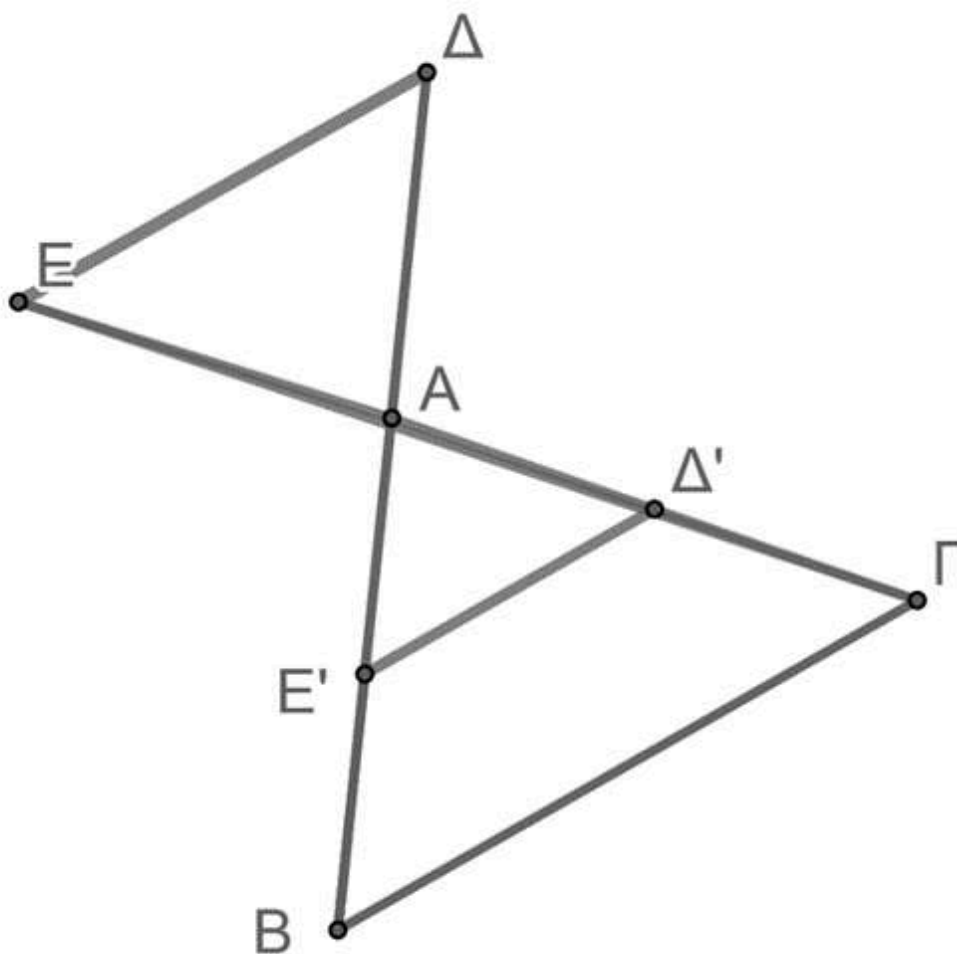


2. Αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή

Θεωρούμε δύο ευθείες δ_1 και δ_2 που τέμνουν δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 στα σημεία Α, Β και Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν Γ και Η είναι σημεία των ευθειών δ_1 και δ_2 αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΕΖ}{ΖΗ}$ τότε η ευθεία ΓΗ είναι παράλληλη προς τις ϵ_1 και ϵ_2 .

3. Πόρισμα:

Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα και αντίστροφα. Το παραπάνω πόρισμα ισχύει και στην περίπτωση που η $\Delta\epsilon$ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.



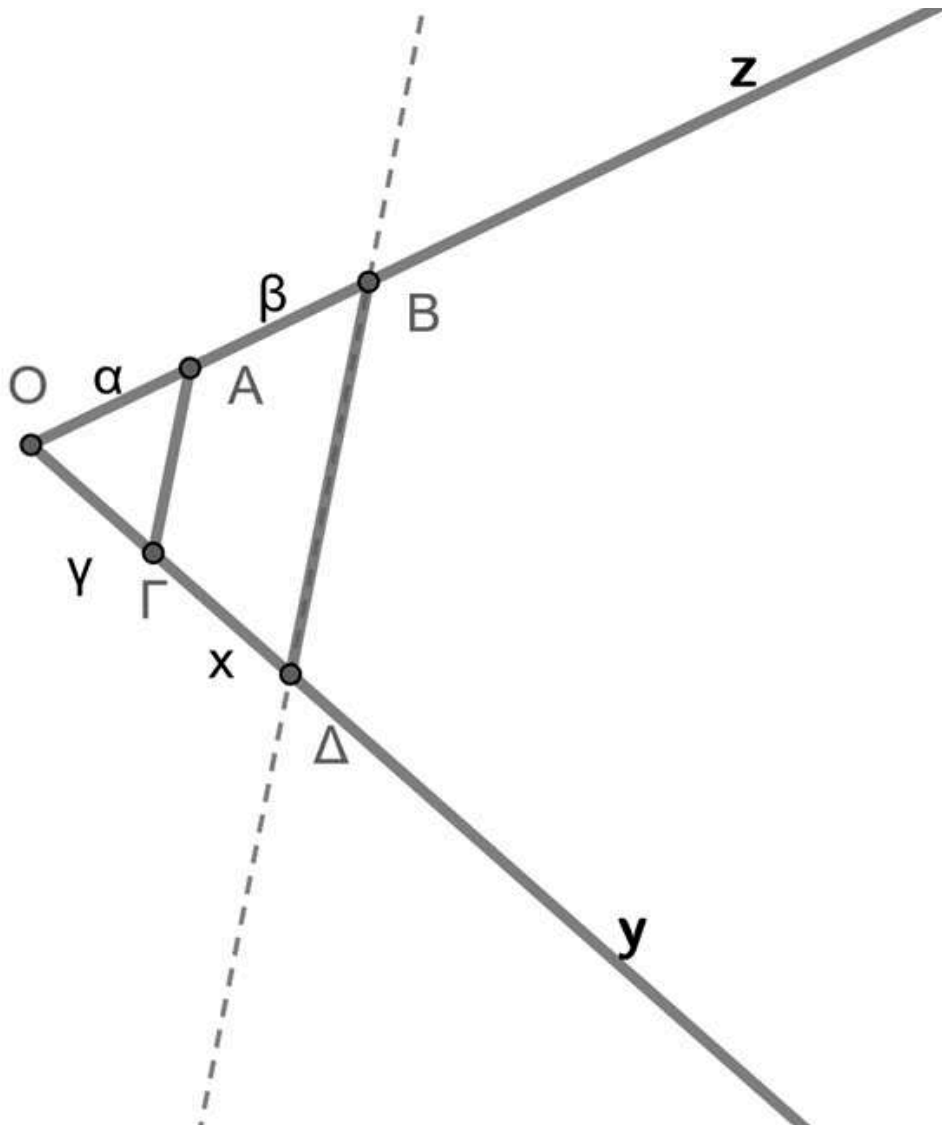
4. Θεώρημα:

Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.

5. Πρόβλημα κατασκευής τέταρτης αναλόγου.

Αν μας δοθούν 3 ευθύγραμμα τμήματα α , β , γ μπορούμε να κατασκευάσουμε τμήμα x που ορίζεται

από την αναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$.



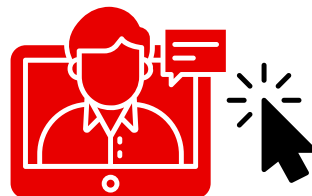
Θεωρούμε γωνία $\hat{zOy}$ και πάνω στην πλευρά Oz παίρνουμε διαδοχικά τα τμήματα $OA = \alpha$ και $AB = \beta$ και πάνω στην Oy παίρνουμε τμήμα $O\Gamma = \gamma$.

Από το σημείο B φέρουμε παράλληλη προς την $A\Gamma$ που τέμνει την Oy στο Δ . Οπότε παίρνουμε $\Gamma\Delta = x$

αφού: $\frac{OA}{AB} = \frac{O\Gamma}{\Gamma\Delta}$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. ΘΕΜΑ 14534 από Τράπεζα Θεμάτων.

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=6$ και $A\Gamma=9$. AM είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Z

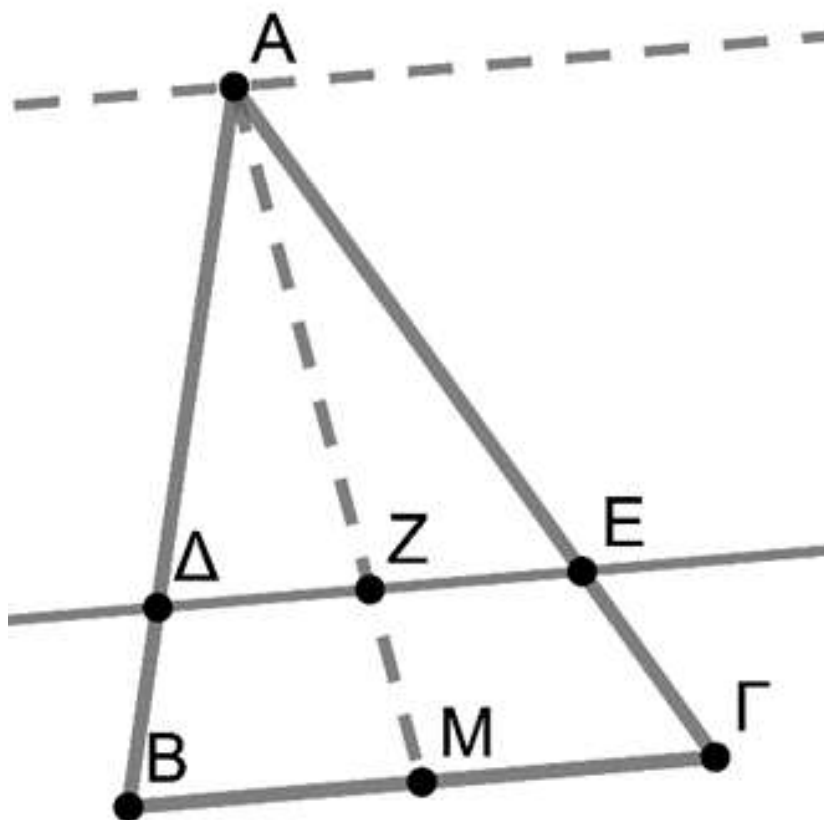
εσωτερικό στην AM ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$

Από το σημείο Z φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{2}{3}$

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων $A\Delta$ και AE .

Λύση:



α) Θα φέρουμε ευθεία ε από το σημείο A παράλληλη στη πλευρά $B\Gamma$. Οπότε από το Θεώρημα του

Θαλή θα έχουμε $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AZ}{AB}$ δηλαδή $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$.

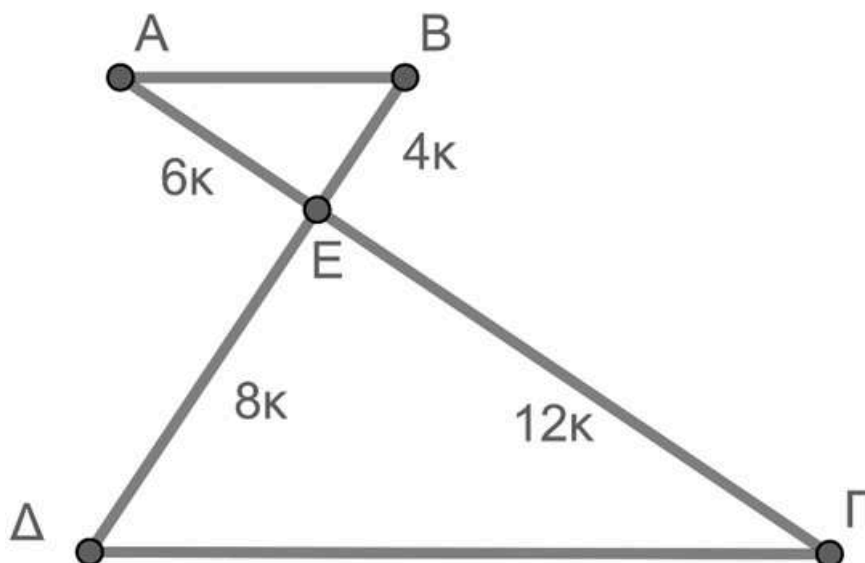
Για τις AM και $A\Gamma$ θα έχουμε ότι $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Αξιοποιώντας τις ιδιότητες των αναλογιών

παίρνουμε $\frac{AE}{A\Gamma - AE} = \frac{2}{3 - 2} = 1$, δηλαδή $\frac{AE}{E\Gamma} = 2$

β) Έχουμε $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$ άρα $\frac{A\Delta}{6} = \frac{2}{3}$ και $A\Delta = 4$.

Έχουμε $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{2}{3}$ άρα $\frac{AE}{9} = \frac{2}{3}$ και $AE = 6$. Οπότε $E\Gamma = A\Gamma - AE = 9 - 6 = 3$.

2. Να δικαιολογήσετε γιατί $AB \parallel \Gamma\Delta$ στο παρακάτω σχήμα.

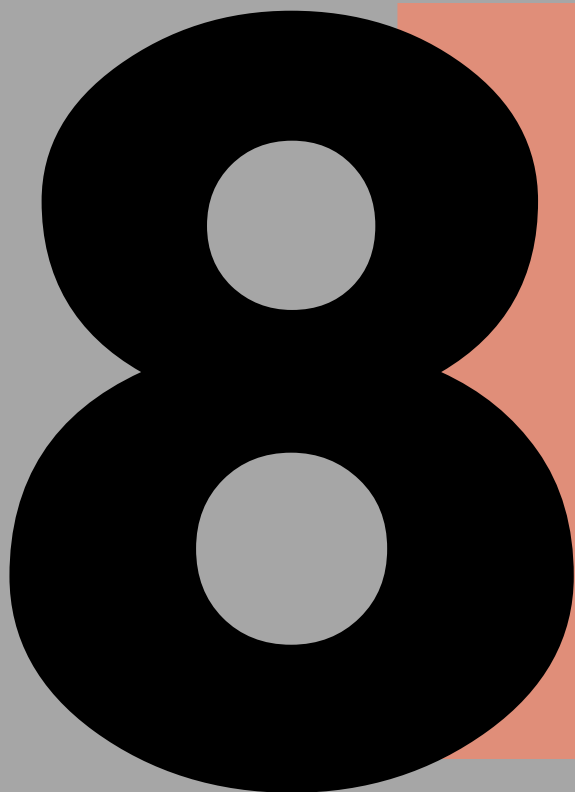


Θα αξιοποιήσουμε το αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή.

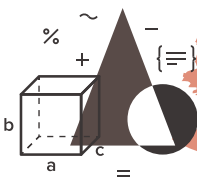
Παίρνουμε τον λόγο $\frac{BE}{E\Delta} = \frac{4\kappa}{8\kappa} = \frac{1}{2}$ και τον λόγο $\frac{AE}{E\Gamma} = \frac{6\kappa}{12\kappa} = \frac{1}{2}$.

Δηλαδή τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζουν ίσους λόγους, συνεπώς το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι παράλληλο στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΓ.





ομοιότητα



1. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα - 2. Κριτήρια Ομοιότητας



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

1. Πότε δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια;

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται όμοια, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από τις ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.

2. Τι ονομάζεται λόγος ομοιότητας ευθύγραμμων σχημάτων;

Ο λόγος των ομόλογων πλευρών δύο ευθύγραμμων σχημάτων, λέγεται λόγος ομοιότητας αυτών και συμβολίζεται με λ . Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Θεωρούμε δύο όμοια ευθύγραμμα σχήματα $AB\Gamma\Delta E$ και $A'B'\Gamma'\Delta'E'$. Λόγω της ομοιότητας θα έχουμε ότι :

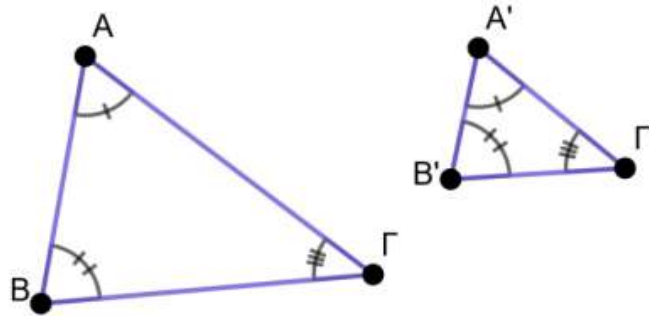
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'E'}{\Delta E} = \frac{E'A'}{EA} = \lambda$$

και από τις ιδιότητες των αναλογιών, το άθροισμα των αριθμητών προς το άθροισμα των παρονομαστών ισούται με λ , δηλαδή:

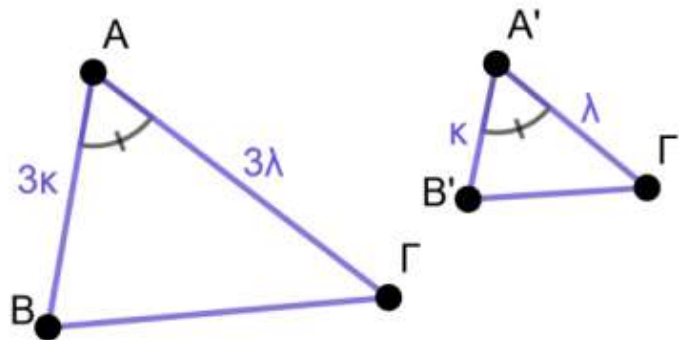
$$\frac{A'B' + B'\Gamma' + \Gamma'\Delta' + \Delta'E' + E'A'}{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E + EA} = \lambda$$

3. Ποια είναι τα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων;

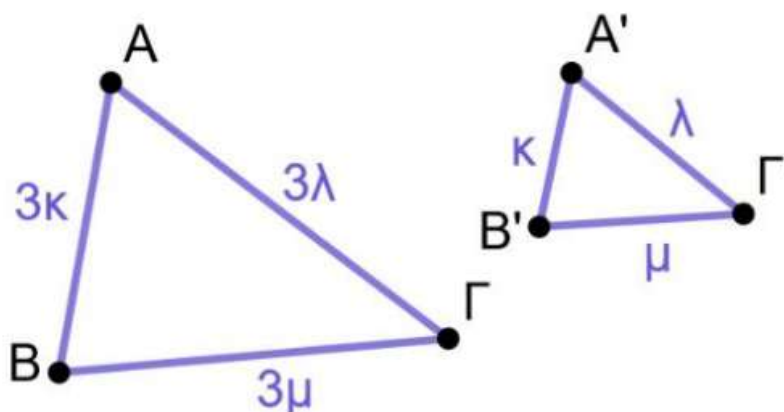
1. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.



2. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

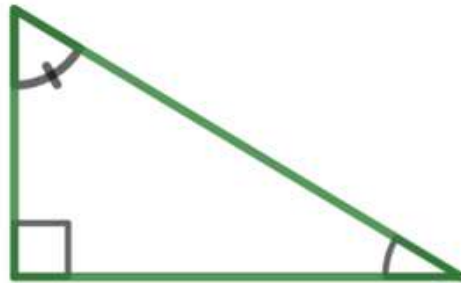


3. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

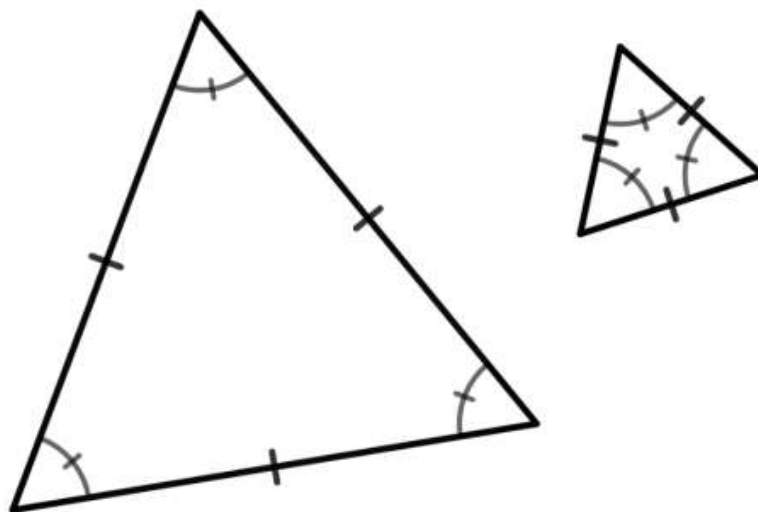


4. ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

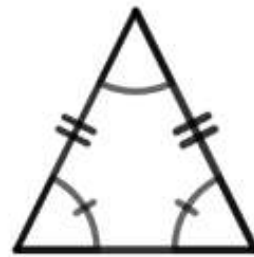
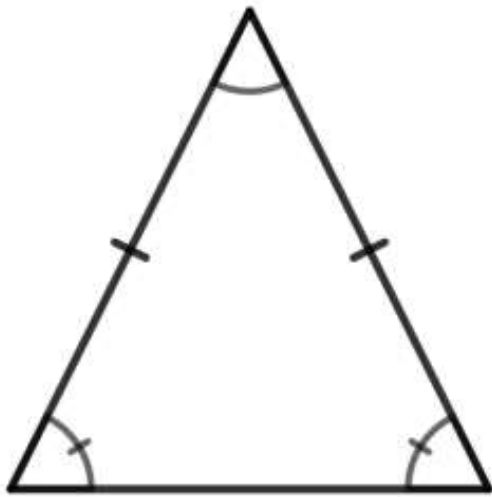
i. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μια οξεία γωνία τους ίση.



ii. Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.



iii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν μία αντίστοιχη γωνία ίση, είναι όμοια.



Λυμένα Παραδείγματα



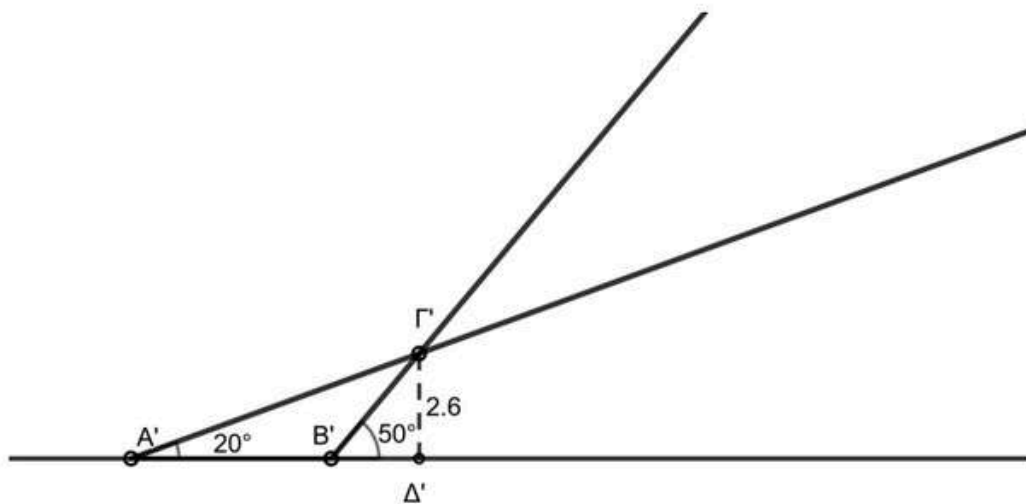
VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Ένας μαθητής βλέπει την κορυφή Γ του σχολείου από δύο σημεία Α και Β στο έδαφος. Μετράει τις γωνίες Α, Β: $A = 20^\circ$ και $B = 50^\circ$. Κατόπιν μετράει την απόσταση από το σημείο Α ως το Β, $AB = 20$ μέτρα. Η μέτρηση των γωνιών έγινε από κάποια απόσταση από το έδαφος ίση με το ύψος του μαθητή, έστω ότι έχει ύψος 1,6 μέτρα.

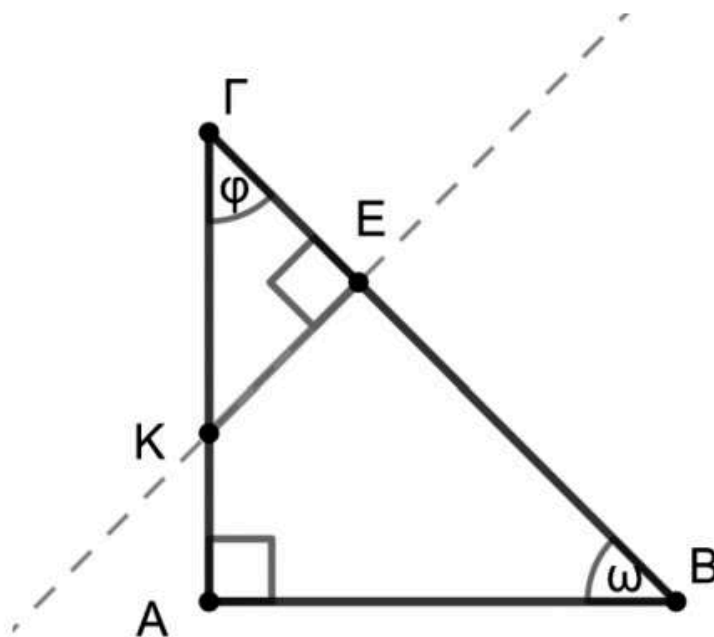
Για να υπολογίσουμε το ύψος του σχολείου κατασκευάζουμε σε μία κόλλα χαρτί το αντίστοιχο μοντέλο. Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα $A'B' = 5$ cm. Προεκτείνουμε την $A'B'$ προς το μέρος του Β' και σχηματίζουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο δύο γωνίες $\angle xA'y = 20^\circ$ και $\angle xB'z = 50^\circ$. Οι ημιευθείες $A'y$ και $B'z$ τέμνονται στο σημείο Γ'. Από το σημείο Γ' φέρουμε την κάθετη Γ'Δ' στην $A'B'$ και έχουμε κατασκευάσει το μοντέλο μας. Μετράμε και βρίσκουμε ότι το Γ'Δ' ισούται με 2,6 cm.

$$\text{Ο λόγος ομοιότητας είναι } \lambda = \frac{AB}{A'B'} = \frac{2.000}{5} = 400$$

Επομένως το πραγματικό μήκος του ΓΔ είναι $\Gamma\Delta = \lambda \cdot \Gamma'\Delta' = 10,4$ μέτρα. Προσθέτοντας και το ύψος του μαθητή, έχουμε ότι το πραγματικό ύψος του σχολείου είναι $10,4 + 1,6 = 12$ μέτρα.



2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$. Από τυχαίο σημείο K της AG φέρουμε ευθεία κάθετη στην BG που την τέμνει σε σημείο E. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και KEΓ είναι όμοια.



Σύμφωνα με το πόρισμα «Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν μια οξεία γωνία τους ίση». Παρατηρούμε τα τρίγωνα ABΓ και KEΓ είναι ορθογώνια με $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$. Επίσης η οξεία γωνία $\hat{\phi}$ είναι κοινή στα δύο ορθογώνια τρίγωνα.

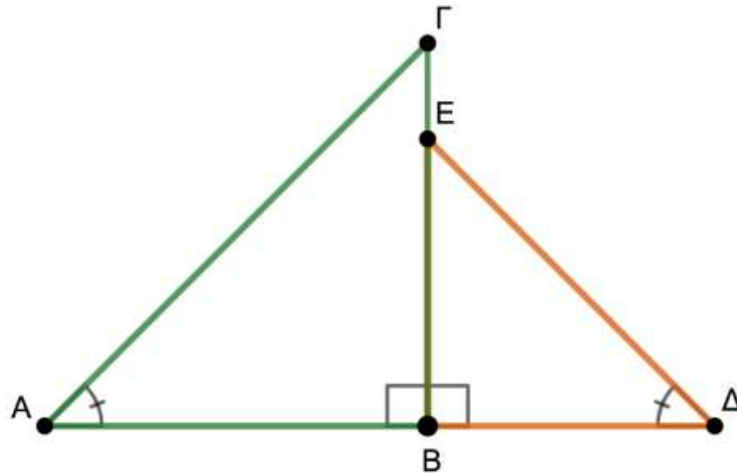
Συνεπώς τα τρίγωνα είναι όμοια.

3. Βασισμένη στο θέμα 16099 της Τράπεζας Θεμάτων.

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $ΑΓ = 28$, $ΒΔ = 12$ και $ΕΔ = 20$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΒΕ$ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε την πλευρά $γ$.



α) Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΕΔ$ είναι ορθογώνια τρίγωνα και επιπλέον έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$ άρα είναι όμοια.

β) Για να βρούμε την πλευρά $γ$, δηλαδή την πλευρά $ΑΒ$ αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων. Παίρνουμε:

$$\frac{ΑΓ}{ΕΔ} = \frac{ΑΒ}{ΒΔ}$$

$$\frac{28}{20} = \frac{ΑΒ}{12}$$

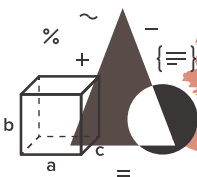
$$20 \cdot ΑΒ = 28 \cdot 12$$

$$20 \cdot ΑΒ = 336$$

$$ΑΒ = \frac{336}{20} = \frac{42}{5}$$



μετρικές σχέσεις



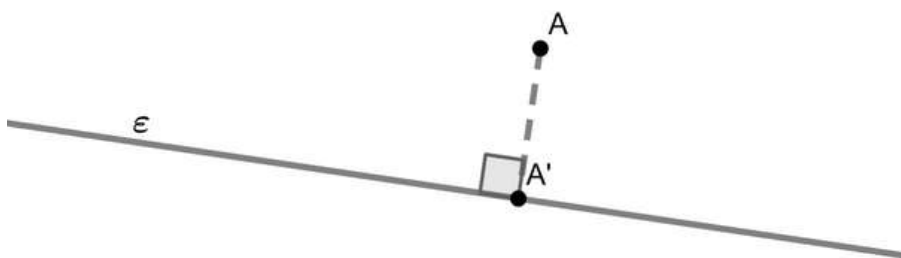
1. Ορθές προβολές - 2. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε ορθή προβολή ενός σημείου A σε μια ευθεία ϵ ;

Το σημείο A' που βρίσκουμε όταν φέρουμε **από το σημείο A** ευθεία **κάθετη** προς **ευθεία ϵ** ονομάζεται ορθή προβολή (ή απλά προβολή) του σημείου A στην ευθεία ϵ .

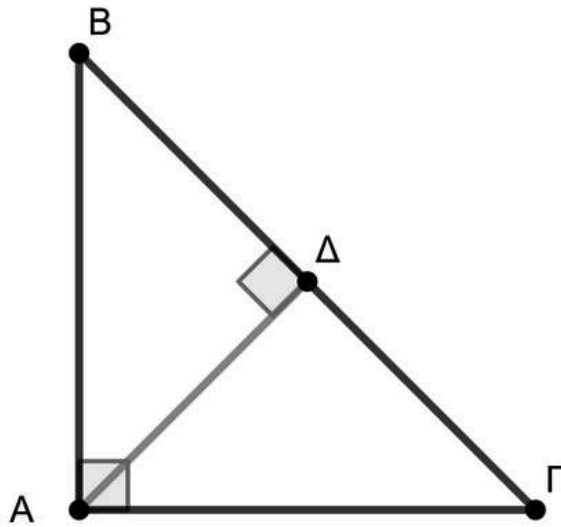


Θεώρημα 1

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Απόδειξη:

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και παίρνουμε Δ την προβολή της πλευράς A στην υποτείνουσα $B\Gamma$.



Για να αποδείξουμε το θεώρημα θα χρειαστεί να δείξουμε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και αντίστοιχα $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Εξετάζουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔBA . Τα τρίγωνα είναι όμοια αφού έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και γωνία $\hat{B}$ κοινή.

Οπότε παίρνουμε την αναλογία $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Αν διαιρέσουμε τις παραπάνω ισότητες καταλήγουμε στο επόμενο πόρισμα:

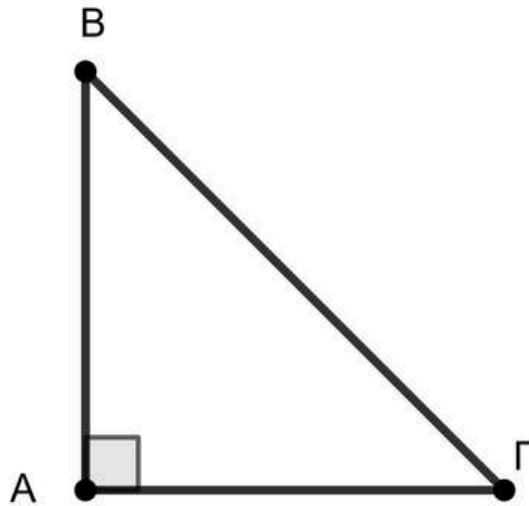
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με τον λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{B\Gamma \cdot B\Delta}{B\Gamma \cdot \Gamma\Delta} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

3. Θεώρημα 2 – Πυθαγόρειο Θεώρημα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Απόδειξη:



Για ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ γνωρίζουμε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Αθροίζουμε τις παραπάνω ισότητες κατά μέλη και έχουμε:

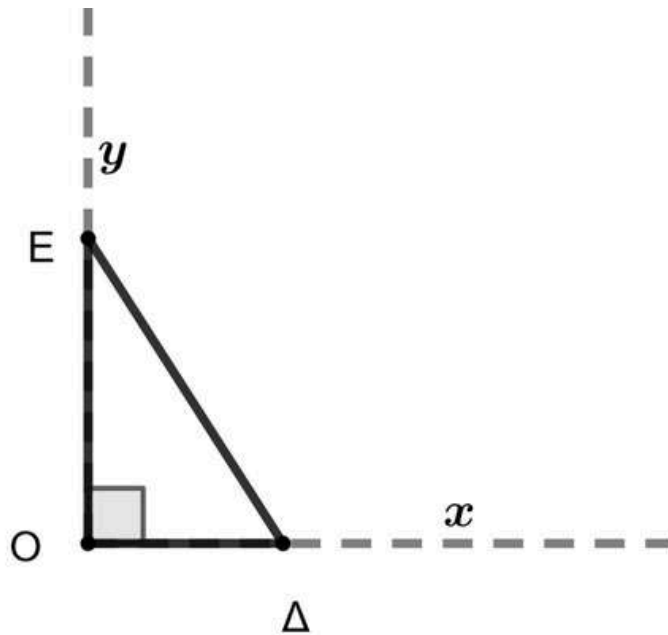
$$\left. \begin{array}{l} AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \\ A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta \end{array} \right\} AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma(B\Delta + \Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2$$

$$\text{Δηλαδή } AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$$

4. Θεώρημα 3 – Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ τότε $\hat{A} = 90^\circ$.

Απόδειξη:



Πάνω στις πλευρές Ox και Oy ορθής γωνίας θεωρούμε αντίστοιχα τμήματα $OD=AB$ και $OE=A\Gamma$. Το τρίγωνο ODE είναι ορθογώνιο, άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε $DE^2 = OD^2 + OE^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$.

Άρα $DE=B\Gamma$, συνεπώς τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ODE έχουν 3 ίσες πλευρές, άρα είναι ίσα.

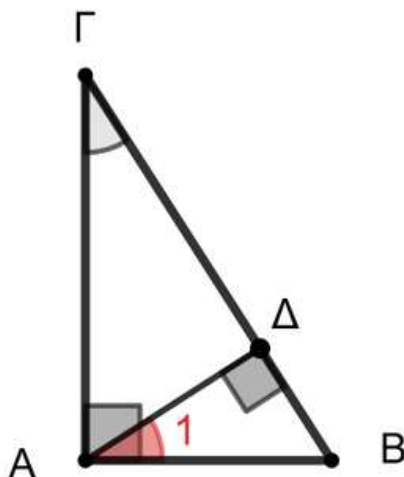
Αφού ODE ορθογώνιο τρίγωνο και $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$.

5. Θεώρημα 4

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Απόδειξη:

Έστω AD το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.



Εξετάζουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $\Gamma A\Delta$.

Αυτά έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\text{ L}$ και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές γωνίες της γωνίας $\hat{B}$.

Συνεπώς τα τρίγωνα είναι όμοια και ισχύει η αναλογία: $\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$



1. Για ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ γνωρίζουμε ότι $B\Gamma = 10$ και $A\Gamma = 8$. Να υπολογίσετε το ύψος AD του τριγώνου.

Αρχικά μπορούμε να υπολογίσουμε την τρίτη πλευρά αξιοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

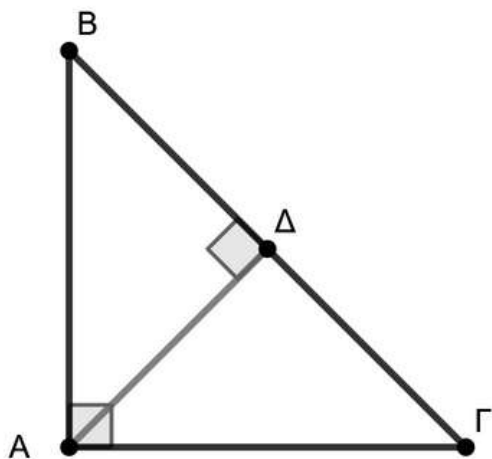
$$AB^2 + 8^2 = 10^2$$

$$AB^2 = 10^2 - 8^2$$

$$AB^2 = 100 - 64$$

$$AB^2 = 36$$

$$AB = 6$$



Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Για να βρούμε λοιπόν το ύψος αρκεί να βρούμε τις προβολές των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Γνωρίζουμε ότι:

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow 36 = 10B\Delta \Leftrightarrow B\Delta = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$$

$$A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow 64 = 10\Gamma\Delta \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{64}{10} = \frac{32}{5}$$

Οπότε πλέον για να βρούμε ύψος ΑΔ έχουμε:

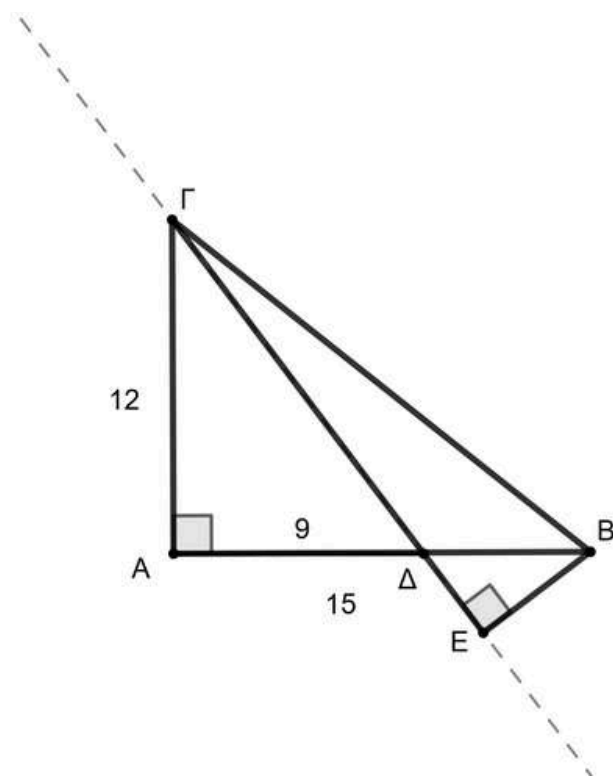
$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow A\Delta^2 = \frac{18}{5} \cdot \frac{32}{5} = \frac{576}{25}$$

$$A\Delta^2 = \frac{576}{25} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{24}{5}$$

2. Βασισμένο στο θέμα 16757 της Τράπεζας Θεμάτων.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 15 και ΑΓ = 12. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε ΑΔ = 9. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ.

Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ και το μήκος του τμήματος ΒΕ.



Για να βρούμε το τμήμα ΓΔ αρκεί να εφαρμόσουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ.

$$\Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow \Gamma\Delta^2 = 12^2 + 9^2 \Leftrightarrow \Gamma\Delta^2 = 225 \Rightarrow \Gamma\Delta = 15$$

Για να υπολογίσουμε το τμήμα ΒΕ αρκεί να σκεφτούμε ότι τα τρίγωνα ΓΑΔ και ΔΕΒ είναι όμοια.

Τα τρίγωνα είναι όμοια γιατί $\hat{E} = \hat{A} = 1^\circ$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_1$ ως κατακορυφήν.

Συνεπώς παίρνουμε την αναλογία: $\frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{15}{12} = \frac{6}{B\Gamma} \Leftrightarrow B\Gamma = \frac{6 \cdot 12}{15} = \frac{24}{5}$

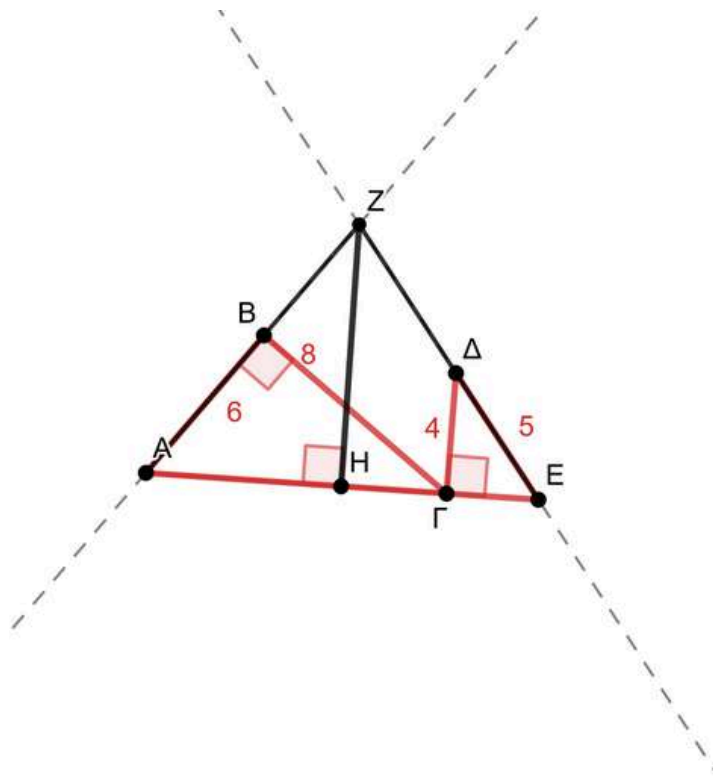
Βρήκαμε $B\Delta = 6$, αφού $BA - \Delta A = 15 - 9 = 6$.

2. Βασισμένο στο θέμα 16133 της Τράπεζας Θεμάτων.

Τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, BG, ΓΔ$ και $ΔΕ$ έχουν μήκη αντίστοιχα 6, 8, 4 και 5, οι γωνίες $\hat{A}B\Gamma$ και $\hat{\Delta}\Gamma E$ είναι ορθές και τα σημεία A, Γ και E ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Αφού υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE να σχεδιάσετε το σημείο τομής Z των ευθειών AB και $ΕΔ$.

Στο τρίγωνο $ΖΑΕ$ να υπολογίσετε το ύψος ZH .



Για να υπολογίσουμε το ευθύγραμμο τμήμα AE αρκεί να βρούμε το τμήμα $A\Gamma$ και ΓE .

Επειδή τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνια θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Εύκολα βρίσκουμε ότι $A\Gamma=10$ και $\Gamma E=3$, συνεπώς $AE=13$.

Παρατηρούμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και AZH . Αυτά έχουν $\hat{B} = \hat{H} = 1 L$ και $\hat{Z} = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές γωνίες της γωνίας $\hat{A}$.

Συνεπώς τα τρίγωνα είναι όμοια και ισχύει η αναλογία $\frac{AH}{BA} = \frac{ZH}{B\Gamma}$ και με τον ίδιο τρόπο

$$\frac{HE}{\Gamma E} = \frac{ZH}{\Delta \Gamma} .$$

Οπότε έχουμε $AH = \frac{BA \cdot ZH}{B\Gamma}$ και $HE = \frac{\Gamma E \cdot ZH}{\Delta\Gamma}$.

$$AH + HE = \frac{BA \cdot ZH}{B\Gamma} + \frac{\Gamma E \cdot ZH}{\Delta\Gamma}$$

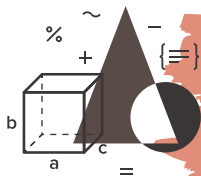
$$AE = \frac{6ZH}{8} + \frac{3ZH}{4}$$

$$13 = \frac{6ZH}{4}$$

$$ZH = \frac{13 \cdot 4}{6}$$

$$ZH = \frac{26}{3}$$





3. Γεωμετρικές Κατασκευές - 4. Γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πώς κατασκευάζουμε γεωμετρικά ευθύγραμμο τμήμα κ με μήκος $\kappa = \sqrt{x^2 + y^2}$;

Για να κατασκευάσουμε το παραπάνω τμήμα αρκεί να σκεφτούμε ότι $\kappa^2 = x^2 + y^2$ οπότε κ υποτείνουσα σε ορθογώνιο τρίγωνο και αρκεί σε ορθή γωνία να ορίσουμε τμήματα x (ΟΧ) και y (ΟΥ), και να ενώσουμε τα σημεία Χ, Υ οπότε να προκύψει το ευθύγραμμο τμήμα ΧΥ=κ.

Με όμοια λογική μπορούμε να φτιάξουμε ευθύγραμμο τμήμα $\kappa = \sqrt{x^2 + y^2}$ δηλαδή ευθύγραμμο τμήμα για το οποίο έχουμε $\kappa^2 = x^2 - y^2$, δηλαδή τα τμήματα κ και y είναι οι κάθετες πλευρές και x η υποτείνουσα.

2. Θεώρημα Γενίκευσης Πυθαγορείου Θεωρήματος (οξείας γωνίας)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτήν.

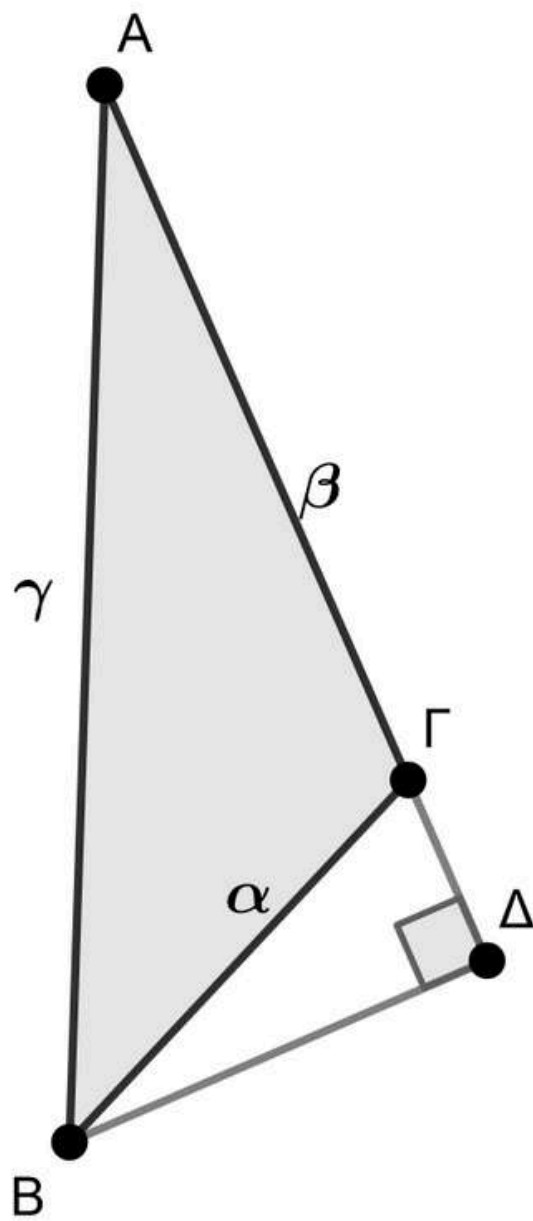
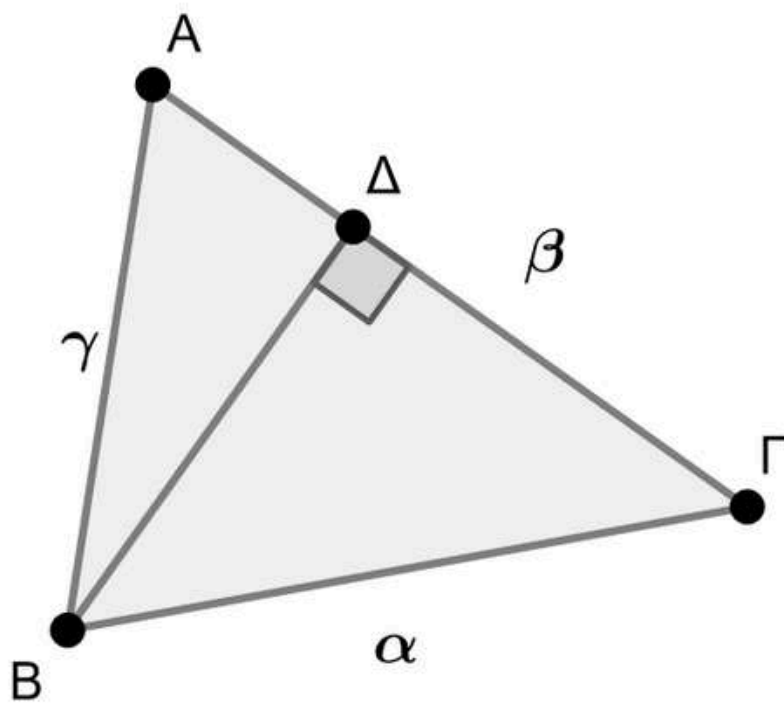
$$\text{Δηλαδή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \text{ΑΔ}$$

Απόδειξη:

Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΒΔ και έχουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ και ΔΒΑ.

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε:

$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta \Gamma^2 \quad \text{και} \quad \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2.$$



Η γωνία $\hat{A} < 1 \text{ L}$ άρα τα σημεία Δ και Γ είναι προς το ίδιο μέρος και έχουμε:

Αν $\hat{\Gamma} < 1 \text{ L}$ είναι ανάμεσα στα Α, Γ οπότε $\Delta\Gamma = \beta - A\Delta$.

Αν $\hat{\Gamma} > 1 \text{ L}$ το Γ είναι ανάμεσα στα Α, Δ οπότε $\Delta\Gamma = A\Delta - \beta$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\Delta\Gamma^2 = (\beta - A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta$.

Οπότε έχουμε $\Delta\Gamma^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta$ και $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$, και κάνουμε αντικατάσταση στην σχέση $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$, οπότε παίρνουμε:

$$\alpha^2 = \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$$

Αν $\hat{\Gamma} = 1 \text{ L}$, το Δ συμπίπτει με το Γ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ο τύπος προκύπτει άμεσα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

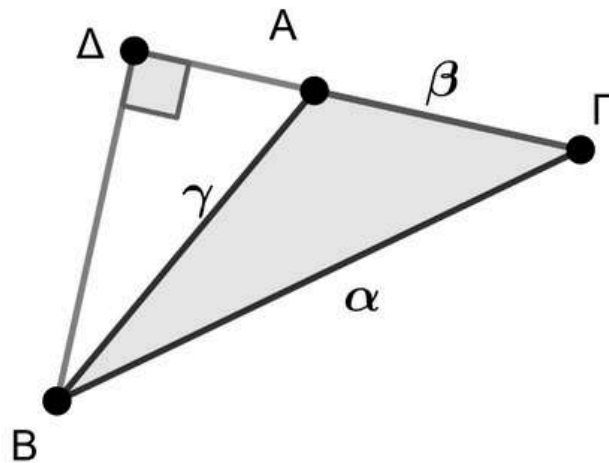
3. Θεώρημα Γενίκευσης Πυθαγορείου Θεωρήματος (αμβλείας γωνίας)

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Δηλαδή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$.

Απόδειξη:

Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} > 1 \text{ L}$ φέρουμε ύψος ΒΔ.



Στα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ και ΔΒΑ παίρνουμε:

$$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta \Gamma^2 \quad \text{και} \quad \Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$$

Επειδή $\hat{A} > 1 \text{ L}$, το Δ βρίσκεται στην προέκταση της ΓΑ προς το Α και προκύπτει ότι $\Delta \Gamma = \beta + A\Delta$.

$$\text{Οπότε } \Delta \Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + 2\beta \cdot A\Delta + A\Delta^2.$$

Πλέον έχουμε $\Delta \Gamma^2 = \beta^2 + 2\beta \cdot A\Delta + A\Delta^2$ και $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ και αντικαθιστούμε στην σχέση $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta \Gamma^2$ οπότε προκύπτει η σχέση $\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$.

4. Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε τη γωνία ενός τριγώνου, μέσα από σχέση των πλευρών του;

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \quad \text{αν και μόνο αν } \hat{A} > 1 \text{ L}$$

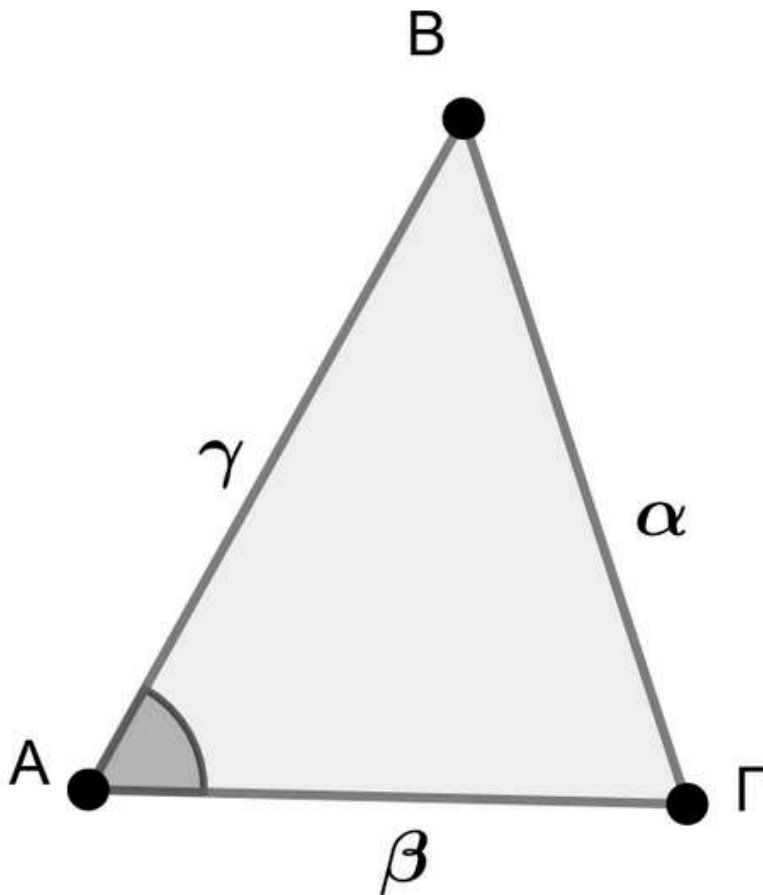
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad \text{αν και μόνο αν } \hat{A} = 1 \text{ L}$$

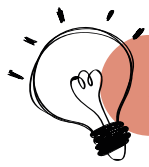
$$a^2 < b^2 + \gamma^2 \quad \text{αν και μόνο αν } \hat{A} < 90^\circ$$

Συγκρίνοντας το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς ενός τριγώνου με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών μπορούμε να διαπιστώσουμε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, αμβλυγώνιο ή οξυγώνιο.

5. Νόμος Συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση: $a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2 \cdot b \cdot \gamma \cdot \cos \hat{A}$





1. Δίνεται τρίγωνο με πλευρές $\alpha=4$, $\beta=5$ και $\gamma=2$. Να εξετάσετε το τρίγωνο ως προς τις γωνίες του.

Θα συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών.

Οπότε έχουμε:

$$\beta^2 = 5^2 = 25$$

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$

Επειδή $\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{B} > 90^\circ$ και τρίγωνο ΑΒΓ αμβλυγώνιο.

2. Αν για τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $AB=AC=6$ και $\hat{A} = 135^\circ$ να βρείτε την πλευρά ΒΓ.

Αφού έχουμε δεδομένα για πλευρές και γωνία τριγώνου, θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο συνημιτόνων.

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \cos \hat{A}$$

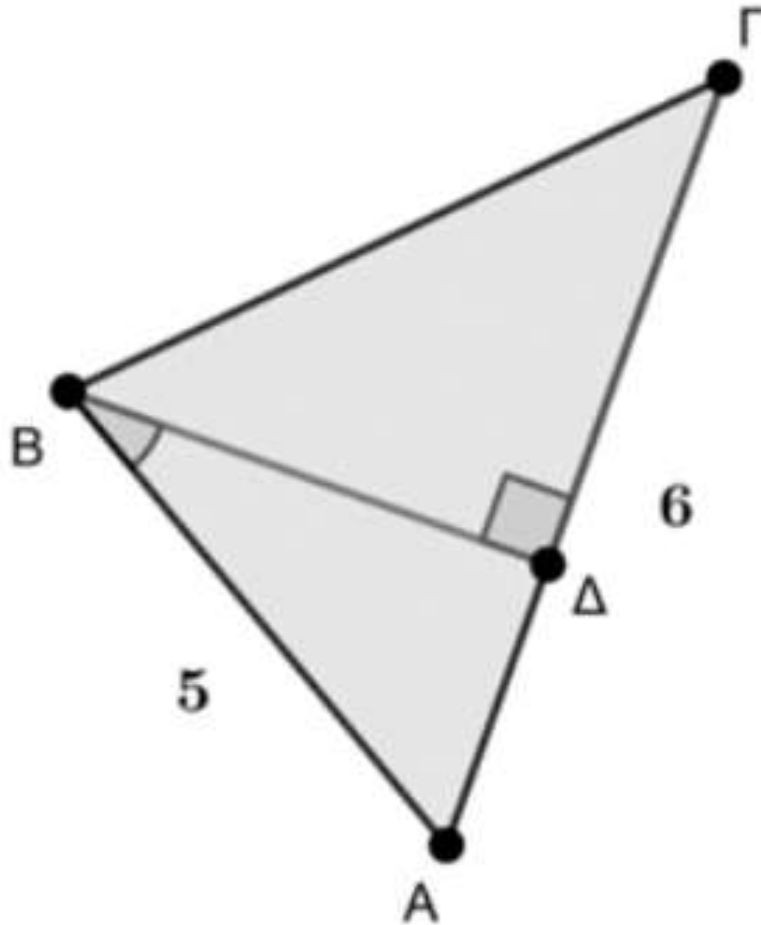
$$B\Gamma^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 135^\circ$$

$$B\Gamma^2 = 36 + 36 - 72 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$B\Gamma^2 = 72 + 36\sqrt{2}$$

$$B\Gamma = \sqrt{72 + 36\sqrt{2}} = \sqrt{36(2 + \sqrt{2})} = 6\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

3. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $AB=5$, $A\Gamma=6$ και $\hat{A}\hat{B}\Delta = 30^\circ$, όπου $B\Delta$ το ύψος του τριγώνου. Υπολόγισε την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου.



Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Delta} = 90^\circ$, $\hat{A}\hat{B}\Delta = 30^\circ$ οπότε $\hat{A} = 60^\circ$.

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ θα εφαρμόσουμε νόμο συνημιτόνων και παίρνουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2 \cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{A} \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma^2 = 25 + 36 - 60 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$B\Gamma^2 = 61 - 30$$

$$B\Gamma^2 = 31$$

$$B\Gamma = \sqrt{31}$$

4. Δίνεται τρίγωνο με πλευρές $\alpha=9$, $\beta=5$ και $\gamma=6$. Να βρείτε το είδος του τριγώνου και το ύψος $\Gamma\Delta$.

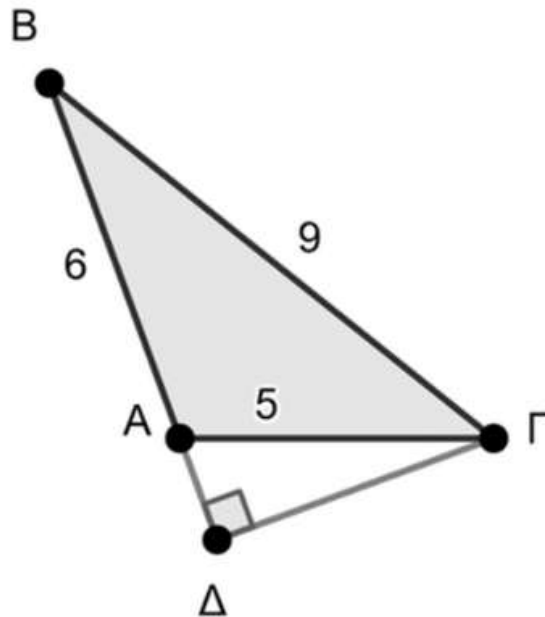
Για το είδος του τριγώνου αρκεί να συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο.

Παίρνουμε:

$$\alpha^2 = 9^2 = 81$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$$

Επειδή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο με $\hat{A} > 180^\circ$.



Θα αξιοποιήσουμε το θεώρημα γενίκευσης του Πυθαγορείου Θεωρήματος: «Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτήν.»

Δηλαδή

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot B\Delta$$

$$5^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot B\Delta$$

$$25 = 81 + 36 - 12B\Delta$$

$$12B\Delta = 92$$

$$B\Delta = \frac{92}{12} = \frac{23}{3}$$

Συνεπώς για την πλευρά ΓΔ μπορούμε να πάρουμε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΒ:

$$\Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$$

$$\Gamma\Delta^2 = 81 - \left(\frac{23}{3}\right)^2$$

$$\Gamma\Delta^2 = 81 - \frac{529}{9}$$

$$\Gamma\Delta^2 = \frac{729 - 529}{9} = \frac{200}{9}$$

$$\Gamma\Delta = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

5. Αν μεταξύ των πλευρών α,β,γ ενός τριγώνου ισχύει η σχέση

$$a = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta \cdot \gamma \cdot \sqrt{3}}.$$

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει ο νόμος των συνημιτόνων οπότε έχουμε:

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{A}$$

$$a = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{A}}$$

$$\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{A}} = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta \cdot \gamma \cdot \sqrt{3}}$$

$$\beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{A} = \beta^2 + \gamma^2 + \beta \cdot \gamma \cdot \sqrt{3}$$

$$-2\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \sqrt{3}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{A} = 150^\circ$$

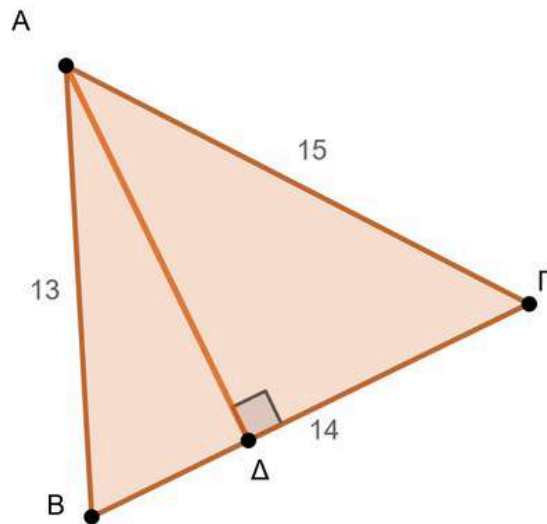
6. Σε ένα τρίγωνο έχουμε ΒΓ=14, ΑΓ=15 και ΑΒ=13. Να βρεθεί η προβολή της ΑΒ στην ΒΓ και το ύψος ΑΔ του τριγώνου.

Αρχικά θα προσδιορίσουμε το είδος του τριγώνου για να χρησιμοποιήσουμε το κατάλληλο θεώρημα γενίκευσης του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

$$A\Gamma^2 = 15^2 = 225$$

$$B\Gamma^2 + AB^2 = 14^2 + 13^2 = 196 + 169 = 365$$

Αφού $B\Gamma^2 + AB^2 > A\Gamma^2$, το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.



Θα αξιοποιήσουμε το θεώρημα γενίκευσης του Πυθαγορείου Θεωρήματος: «Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτήν.»

Δηλαδή:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 - 2 \cdot B\Gamma \cdot B\Delta$$

$$15^2 = 13^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot B\Delta$$

$$225 = 169 + 196 - 28B\Delta$$

$$28B\Delta = 140$$

$$B\Delta = \frac{140}{28} = 5$$

Οπότε η προβολή της AB στην BΓ είναι το ευθύγραμμο τμήμα BΔ με BΔ=5.

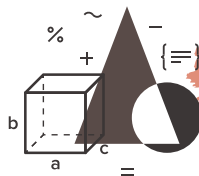
Για το ύψος AΔ αρκεί να εφαρμόσουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΔ.

$$\text{Οπότε έχουμε: } A\Delta = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$



10

εμβαδά



10.1-10.3 Εμβαδά



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζεται πολυγωνικό χωρίο;

Πολυγωνικό χωρίο ονομάζεται το χωρίο που αποτελείται από ένα πολύγωνο και τα εσωτερικά του σημεία. Δύο πολυγωνικά χωρία είναι ίσα όταν τα αντίστοιχα χωρία είναι ίσα. Ένα σχήμα που αποτελείται από πολλά πολυγωνικά χωρία ονομάζεται πολυγωνική επιφάνεια.

2. Ποιες ιδιότητες (αξιιώματα) ισχύουν για το εμβαδόν;

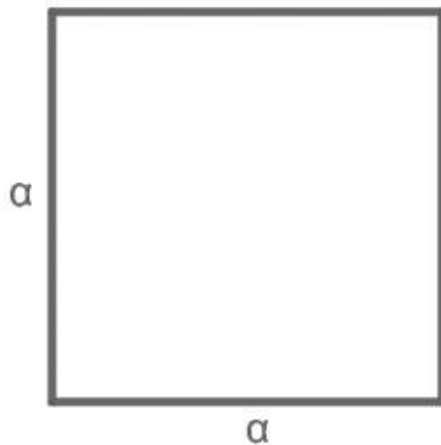
- ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.
- αν ένα πολυγωνικό χωρίο χωρίζεται σε μικρότερα πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων.
- το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 είναι 1.
- αν ένα πολύγωνο P περιέχεται στο εσωτερικό ενός άλλου πολυγώνου Π , τότε το εμβαδόν του P είναι μικρότερο από το εμβαδόν του Π .

3. Πότε δύο σχήματα λέγονται ισεμβαδικά ή ισοδύναμα;

Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται ισοδύναμα ή ισεμβαδικά. Δύο ισεμβαδικά πολύγωνα δεν είναι απαραίτητα ίσα.

4. Θεώρημα:

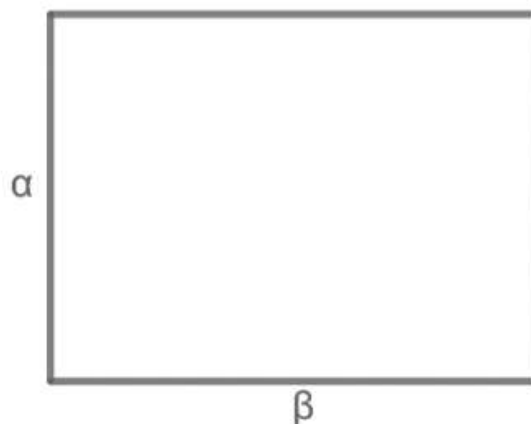
Το εμβαδόν E ενός τετραγώνου πλευράς a δίνεται από την σχέση $E = a^2$.



5. Θεώρημα:

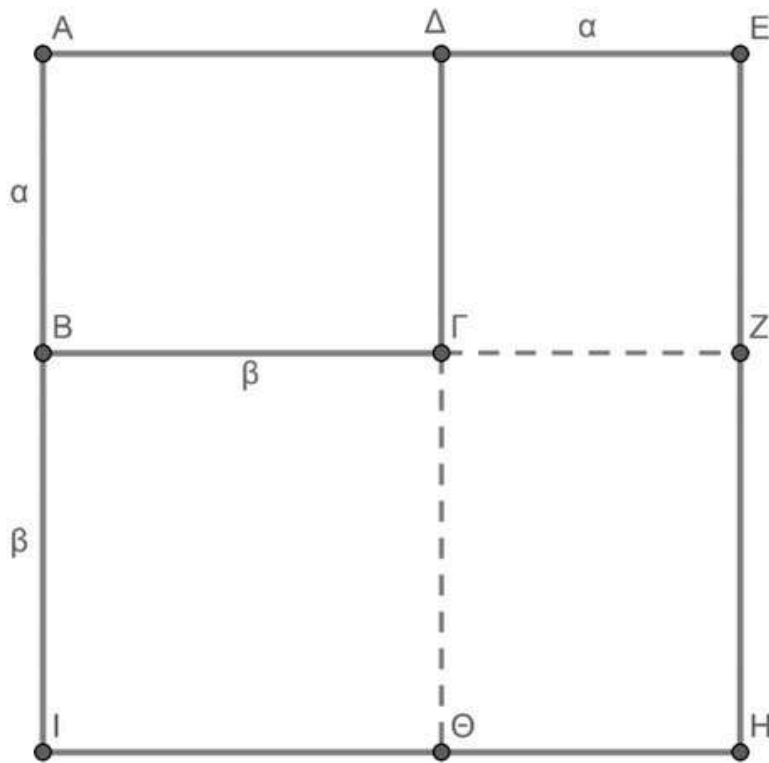
Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Δηλαδή αν a, β οι πλευρές του, τότε $E = a \cdot \beta$.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB=a$ και $AD=\beta$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήματα ΔΕ=α και την ΑΒ κατά ΒΙ=β και σχηματίζουμε τετράγωνο ΑΙΗΕ με πλευρά $(a+\beta)$ και $(ΑΙΗΕ) = (a+\beta)^2$.



Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ και ΒΙΘΓ με πλευρές α και β αντίστοιχα, καθώς και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ.

Έτσι έχουμε: $(\Delta\Gamma\text{ΖΕ}) = a^2, (ΒΙ\Theta\Gamma) = \beta^2, (\Gamma\Theta\text{ΗΖ}) = (ΑΒΓΔ)$.

Επίσης φαίνεται ότι $(ΑΙΗΕ) = (ΑΒΓΔ) + (\Gamma\Theta\text{ΗΖ}) + (ΒΙ\Theta\Gamma) + (\Delta\Gamma\text{ΖΕ})$, οπότε

$$(a+\beta)^2 = 2(ΑΒΓΔ) + a^2 + \beta^2$$

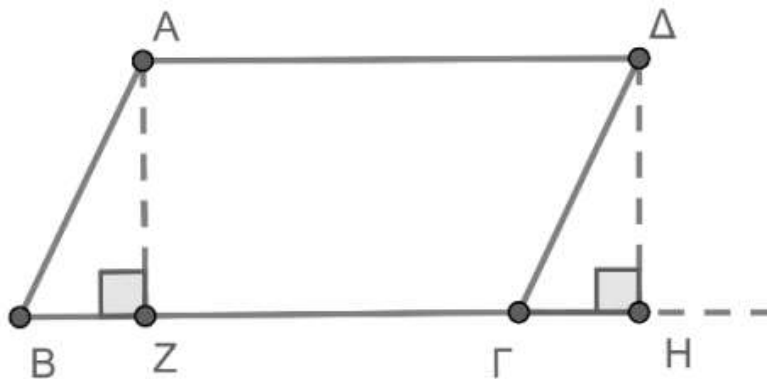
$$a^2 + 2a \cdot \beta + \beta^2 = a^2 + 2(ΑΒΓΔ) + \beta^2$$

$$(ΑΒΓΔ) = a \cdot \beta$$

6. Θεώρημα:

Το εμβαδόν E ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.

Δηλαδή $E = \alpha \cdot \upsilon_{\alpha} = \beta \cdot \upsilon_{\beta}$, όπου α, β οι πλευρές και $\upsilon_{\alpha}, \upsilon_{\beta}$ τα αντίστοιχα ύψη.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ φέρνουμε ύψος AZ που αντιστοιχεί στη $B\Gamma$. Θα αποδείξουμε ότι $(AB\Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot AZ$.

Από το Δ φέρουμε ΔH κάθετη στην προέκταση της $B\Gamma$. Τα τρίγωνα ZBA και $H\Gamma\Delta$ είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια με $AB = \Delta\Gamma$ και $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1}$.

Συνεπώς $(ZBA) = (H\Gamma\Delta)$.

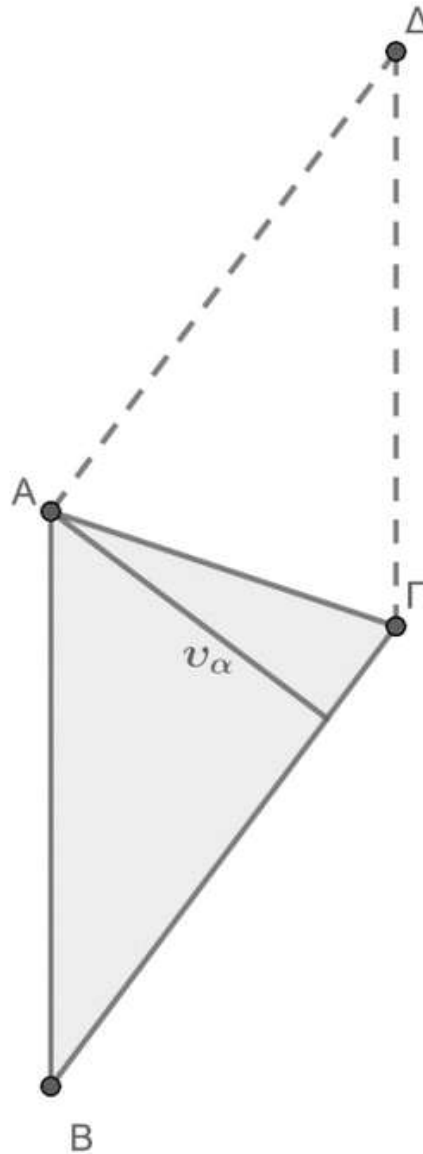
Επίσης φαίνεται ότι $(AB\Gamma\Delta) = (AZ\Gamma\Delta) + (\Delta\Gamma H) = (AZH\Delta)$.

Επομένως $(AB\Gamma\Delta) = (AZH\Delta) = A\Delta \cdot AZ = B\Gamma \cdot AZ$.

7. Θεώρημα:

Το εμβαδόν E ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

$$\text{Δηλαδή έχουμε } E = \frac{1}{2} \alpha u_{\alpha} = \frac{1}{2} \beta u_{\beta} = \frac{1}{2} \gamma u_{\gamma}.$$



Με πλευρές τριγώνου AB και BΓ σχηματίζουμε παραλληλόγραμμο ABΓΔ, του οποίου το εμβαδόν είναι $E = \alpha u_{\alpha}$.

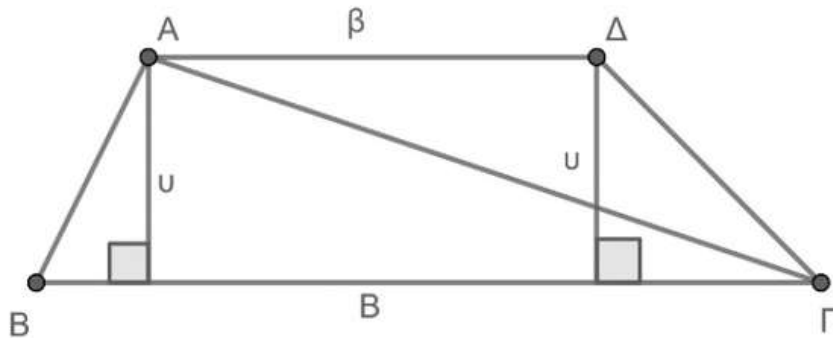
Τα τρίγωνα ABΓ και AΔΓ είναι ίσα συνεπώς $(AB\Gamma) = (A\Delta\Gamma)$.

Φαίνεται ότι $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma)$ οπότε $\alpha u_{\alpha} = 2(AB\Gamma) \Leftrightarrow (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \alpha u_{\alpha}$.

8. Θεώρημα:

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

Δηλαδή έχουμε $E = \frac{(B + \beta) \cdot u}{2}$, όπου B και β οι βάσεις του τραπεζίου και u το ύψος.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

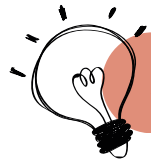
Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, με $B\Gamma \parallel A\Delta$ και βάσεις $B\Gamma = B$ και $A\Delta = \beta$.

Φέρουμε τη διαγώνιο $A\Gamma$. Τότε έχουμε $E = (AB\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta)$. Τα τρίγωνα $(AB\Gamma)$ και $(A\Gamma\Delta)$ έχουν το ίδιο ύψος u και βάσεις B και β αντίστοιχα.

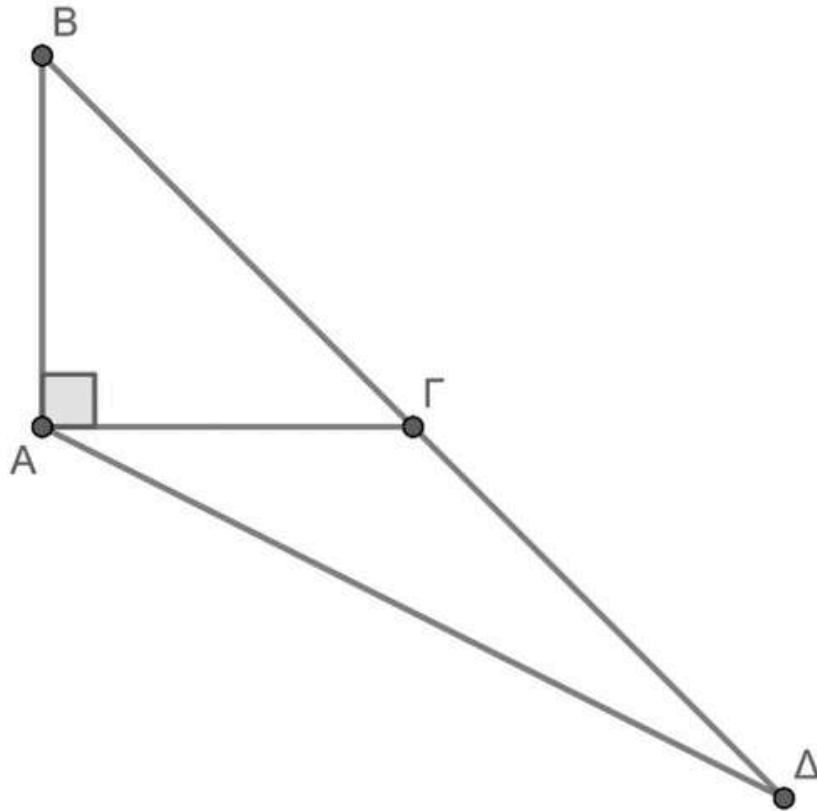
Επομένως έχουμε: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B \cdot u$ και $(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \beta \cdot u$. Οπότε $(AB\Gamma\Delta) = \frac{(B + \beta) \cdot u}{2}$

9. Πόρισμα:

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.



1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $AB=3$ και $A\Gamma=4$, $\hat{A} = 90^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ , με $\Gamma\Delta=B\Gamma$. Απέδειξε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ έχουν ίσα εμβαδά και στη συνέχεια υπολόγισε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$.



Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ισεμβαδικά αφού έχουν ίσες βάσεις $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$ και ίσα ύψη, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Για το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $(AB\Delta) = (AB\Gamma) + (A\Gamma\Delta)$.

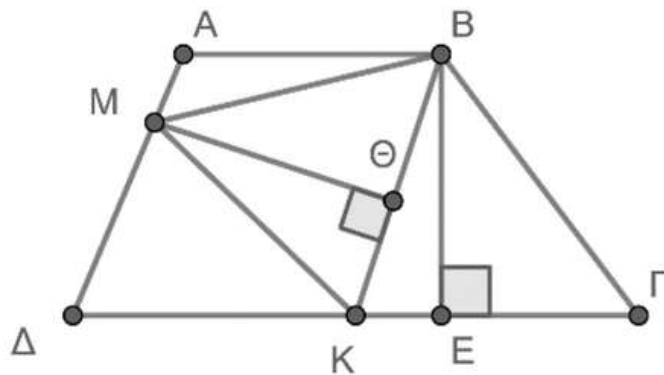
Για το $(AB\Gamma)$, επειδή $\hat{A} = 90^\circ$ εύκολα βρίσκουμε ότι $(AB\Gamma) = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$, και επειδή $(AB\Gamma) = (A\Gamma\Delta)$, βρίσκουμε $(AB\Delta) = 2(AB\Gamma) = 12$.

2. Βασισμένο στο θέμα 18173 της τράπεζας θεμάτων.

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$.

Παίρνουμε σημείο K μέσο της $\Gamma\Delta$ και M τυχαίο σημείο της $A\Delta$. Απέδειξε ότι

$$(B\Gamma K) = \frac{1}{2}(ABK\Delta) \text{ καθώς και ότι } (BMK) = (B\Gamma K).$$



Το $ABK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού $AB \parallel \Delta K$. Φέρουμε το ύψος BE , που είναι ταυτόχρονα ύψος του τριγώνου $B\Gamma K$ και του παραλληλογράμμου $ABK\Delta$.

$$\text{Οπότε } (ABK\Delta) = \Delta K \cdot BE \text{ και } (B\Gamma K) = \frac{K\Gamma \cdot BE}{2}.$$

$$\text{Επειδή } K \text{ μέσο, είναι } K\Gamma = \Delta K, \text{ συνεπώς } (B\Gamma K) = \frac{1}{2} \Delta K \cdot BE = \frac{1}{2} (ABK\Delta).$$

Στο τρίγωνο BMK φέρουμε το ύψος $M\Theta$.

$$\text{Οπότε, με την ίδια λογική που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, } (BMK) = \frac{BK \cdot M\Theta}{2} = \frac{(ABK\Delta)}{2}$$

Τελικά $(B\Gamma K) = (BMK)$.

3. Βασισμένο στο θέμα 17908 της Τράπεζας Θεμάτων.

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται μήκη πλευρών $\alpha=6$, $\beta=8$ και $\gamma=10$. Τι είδους τρίγωνο είναι; Ποιο είναι το μήκος του $\cup_{\gamma}$;

Για το τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$, συνεπώς το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

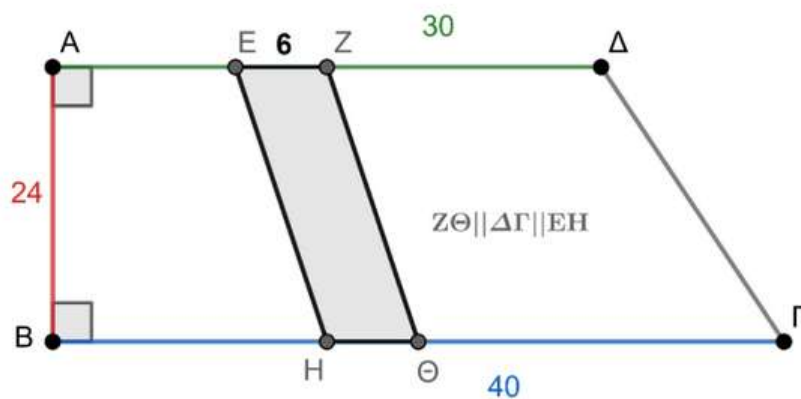
Βρίσκουμε ότι $(AB\Gamma) = \frac{\alpha \cdot \beta}{2} = 24$. Όμως $(AB\Gamma) = \frac{\Upsilon \cdot \upsilon_{\Upsilon}}{2}$ οπότε:

$$\frac{\Upsilon \cdot \upsilon_{\Upsilon}}{2} = 24$$

$$10\upsilon_{\Upsilon} = 24$$

$$\upsilon_{\Upsilon} = \frac{12}{5}$$

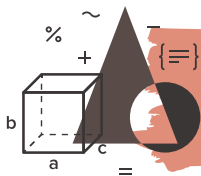
4. Υπολόγισε το εμβαδόν του μη γραμμοσκιασμένου χωρίου.



Το γραμμοσκιασμένο $EZ\Theta H$ είναι ένα παραλληλόγραμμο με πλευρά 6 και ύψος όσο το ύψος του τραπεζίου, δηλαδή 24. Συνεπώς $(EZ\Theta H) = 6 \cdot 24 = 144$.

Το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θα έχει εμβαδόν $\frac{(30 + 40) \cdot 24}{2} = 840$.

Οπότε το εμβαδόν που ψάχνουμε είναι $840 - 144 = 696$.



4. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν στα τρίγωνα.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ θεωρούμε τ την **ημιπερίμετρο** του τριγώνου.

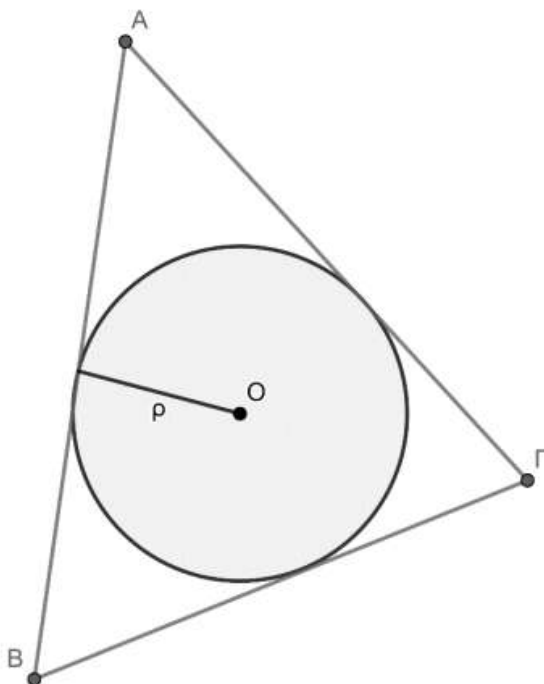
Ισχύουν οι παρακάτω τύποι για το εμβαδόν:

α. $E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$, γνωστός και ως τύπος του Ήρωνα. Τα α, β, γ είναι οι πλευρές του τριγώνου και τ είναι η ημιπερίμετρος.

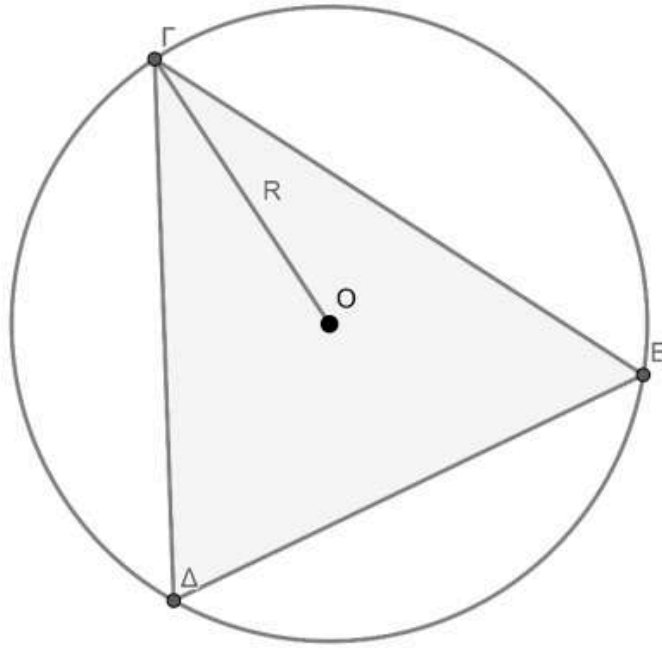
π.χ. Σε τρίγωνο με πλευρές 4, 5, και 7 έχουμε $\tau = \frac{4+5+7}{2} = \frac{16}{2} = 8$ και

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} = \sqrt{16(16 - 4)(16 - 5)(16 - 7)} = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 9} = 24\sqrt{33}$$

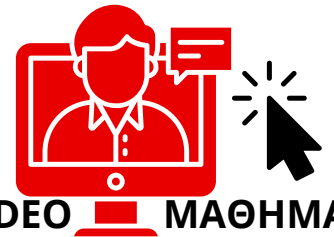
β. $E = \tau \cdot \rho$, όπου τ η ημιπερίμετρος και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.



γ. $E = \frac{a \cdot b \cdot \gamma}{4R}$, a, b, γ οι πλευρές του τριγώνου και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Αν γνωρίζουμε ότι για ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $(AB\Gamma)=20$ και η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του είναι $\rho=4$, να βρείτε την περίμετρό του.

Από τον τύπο $E = \tau \cdot \rho$ παίρνουμε $20 = \tau \cdot 4$ οπότε $\tau=5$ και η περίμετρος είναι $\pi=2\tau=10$.

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=5, ΑΓ=8 και $\hat{A} = 60^\circ$, να βρεθεί το εμβαδόν.

Θα αξιοποιήσουμε τον τύπο $E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$, που προϋποθέτει να γνωρίζουμε όλες τις πλευρές.

Από τον νόμο των συνημιτόνων μπορούμε να υπολογίσουμε την πλευρά ΒΓ.

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2 \cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \cos \hat{A}$$

$$B\Gamma^2 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$B\Gamma^2 = 89 - 40$$

$$B\Gamma^2 = 49$$

$$B\Gamma = 7$$

Συνεπώς πλέον έχουμε περίμετρο 20 και ημιπερίμετρο $\tau=10$. Αξιοποιούμε τον τύπο και έχουμε $E = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} = 10\sqrt{3}$.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με ΑΒ=3, ΑΓ=4 να βρεθεί η ακτίνα του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου.

Αφού το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές ΑΒ=3 και ΑΓ=4, από Πυθαγόρειο Θεώρημα βρίσκουμε ΒΓ=5. Πλέον μπορούμε με χρήση του τύπου του Ήρωνα να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου.

$$E = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)} = \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$$

Για να βρούμε τις ακτίνες των κύκλων θα χρησιμοποιήσουμε τους άλλους δύο τύπους.

$$E = \tau \cdot \rho \Leftrightarrow 6 = 6\rho \Leftrightarrow \rho = 1, \text{ συνεπώς η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου είναι } 1.$$

$$E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R} \Leftrightarrow 6 = \frac{60}{4R} \Leftrightarrow 24R = 60 \Leftrightarrow R = \frac{60}{24} = \frac{5}{2}, \text{ συνεπώς η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι } \frac{5}{2}.$$

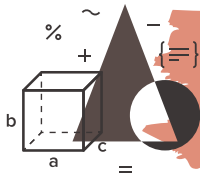
4. Τι σχέση συνδέει το εμβαδόν δύο τριγώνων $AB\Gamma$ και ΔEZ που είναι περιγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο;

Έχουμε:
$$\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot \rho}{\frac{\delta + \varepsilon + \zeta}{2} \cdot \rho} \Leftrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\delta + \varepsilon + \zeta}$$

Αντίστοιχα για τρίγωνα που είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο θα είχαμε:

$$\begin{aligned} (AB\Gamma) &= \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R} \\ (\Delta EZ) &= \frac{\delta \cdot \varepsilon \cdot \zeta}{4R} \end{aligned} \quad \text{συνεπώς} \quad \frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{\frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R}}{\frac{\delta \cdot \varepsilon \cdot \zeta}{4R}} \Leftrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{\delta \cdot \varepsilon \cdot \zeta}$$





5. Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων - πολυγώνων

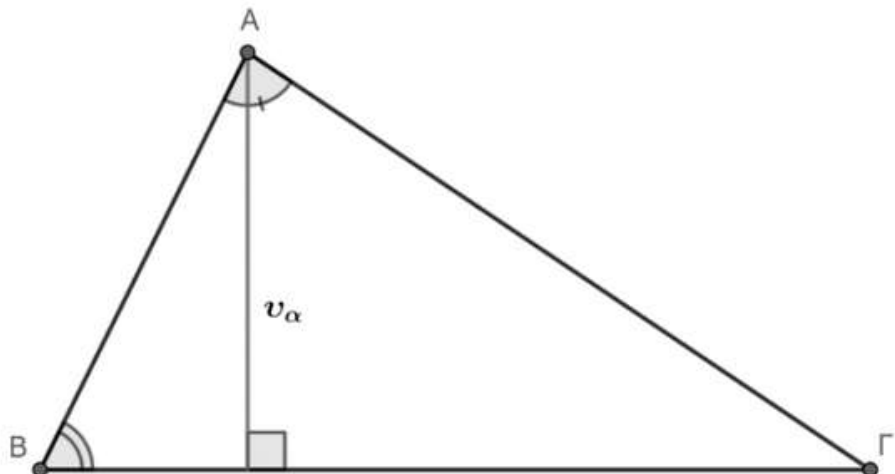
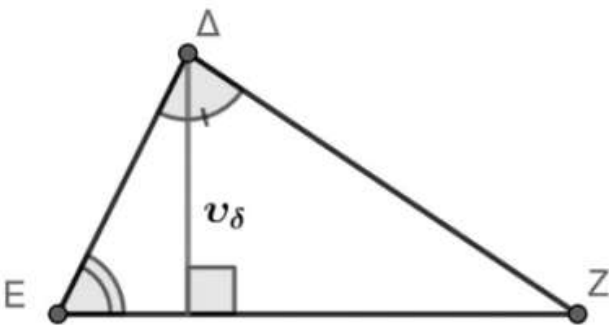
Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Θεώρημα 1

Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Απόδειξη:

Έστω δύο όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ , με $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{E}$.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Τότε: $\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{\upsilon_{\alpha}}{\upsilon_{\varepsilon}} = \lambda$, όπου λ είναι ο λόγος ομοιότητας.

Επίσης $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{\upsilon_{\alpha}}{\upsilon_{\varepsilon}} = \lambda \cdot \lambda = \lambda^2$

Θεώρημα 2

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Θεώρημα 3

Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Απόδειξη:

Θεωρούμε τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ με $\hat{A} = \hat{\Delta}$ (ή $\hat{A} = 180^\circ - \hat{\Delta}$).

Τότε έχουμε $\eta\mu A = \eta\mu \Delta$ και αξιοποιώντας την ισότητα $E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$ έχουμε:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$$

$$(\Delta EZ) = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \zeta \cdot \eta\mu \Delta$$

και διαιρώντας κατά μέλη έχουμε $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\varepsilon \cdot \zeta}$, που είναι και το ζητούμενο.

Θυμόμαστε ότι για να βρούμε το εμβαδόν τριγώνου μπορούμε να αξιοποιήσουμε τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu A$$

όπου β, γ είναι πλευρές τριγώνου και η γωνία A είναι η γωνία περιεχόμενη τους γωνία.



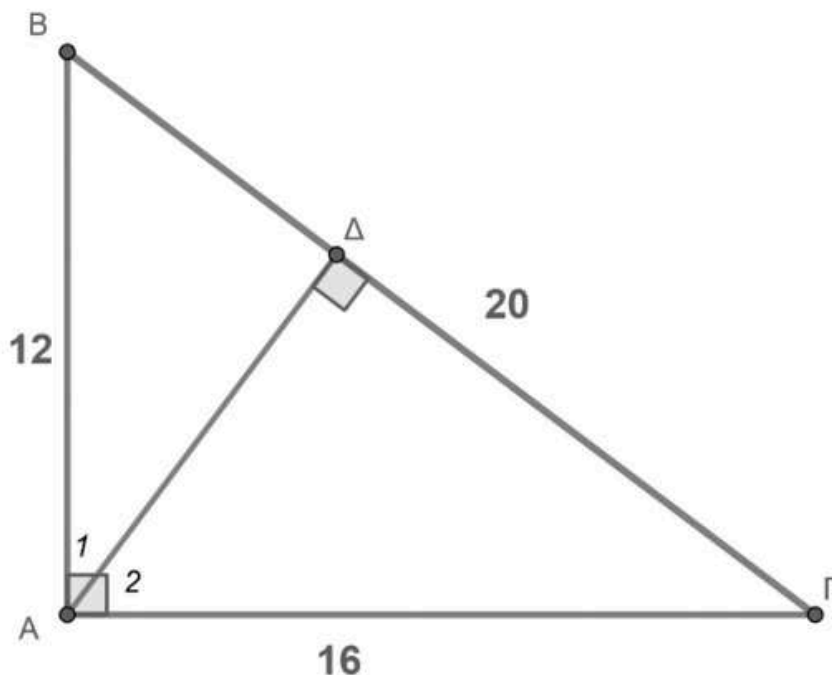
1. Για τρίγωνο $AB\Gamma$ γνωρίζουμε ότι $(AB\Gamma)=3$ και πώς $AB\Gamma$ και ΔEZ όμοια τρίγωνα. Αν ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων είναι $\frac{1}{2}$, να υπολογίσεις το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ .

Γνωρίζουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των εμβαδών είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας των όμοιων τριγώνων, συνεπώς θα είναι $\frac{1}{4}$.

$$\text{Οπότε έχουμε } \frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{(\Delta EZ)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (\Delta EZ) = 12.$$

2. Σε τρίγωνο με $AB=12$, $A\Gamma=16$ και $B\Gamma=20$ φέρουμε ύψος $A\Delta$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια και να βρείτε τον λόγο ομοιότητας των αντίστοιχων εμβαδών.

Θα σχεδιάσουμε αρχικά το τρίγωνο $AB\Gamma$. Αξιοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα βρίσκουμε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.



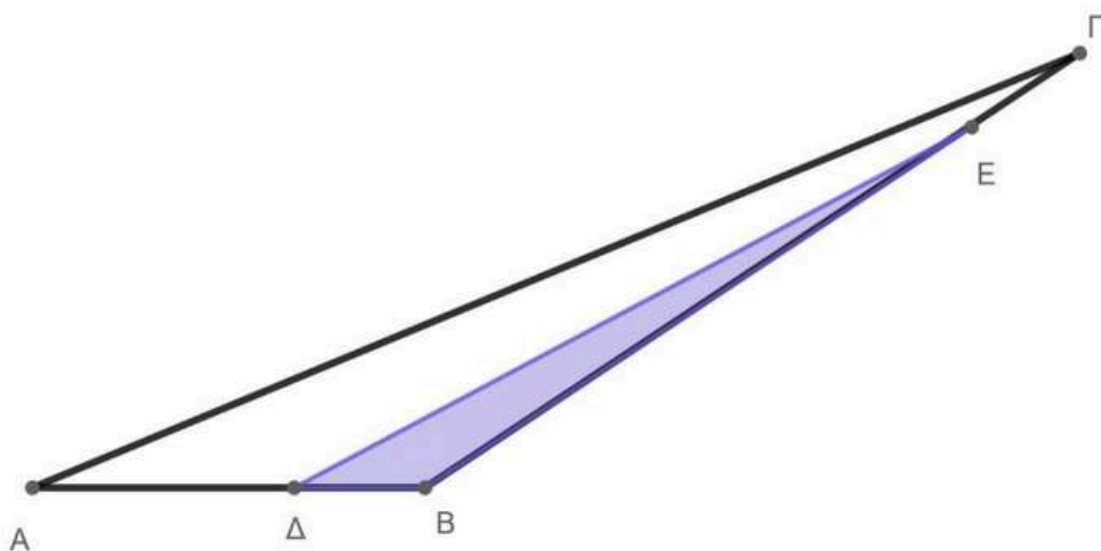
Με το ύψος ΑΔ παίρνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ.

Αυτά έχουν $\hat{\Delta} = 90^\circ$ και επιπλέον: $\hat{A}_1 + \hat{B} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} + \hat{B} = 90^\circ$
(από το αρχικό ορθογώνιο τρίγωνο), άρα $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$.

Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας: $\lambda = \frac{AB}{AG} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

Ο λόγος ομοιότητας των εμβαδών θα είναι $\frac{(AB\Delta)}{(AG\Delta)} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$.

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε δύο σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $\Delta B = \frac{1}{3} AB$ και $E\Gamma = \frac{1}{6} B\Gamma$. Να υπολογίσεις τον λόγο $\frac{(EB\Delta)}{(AB\Gamma)}$.



$E\Gamma = \frac{1}{6} B\Gamma \Leftrightarrow BE = \frac{5}{6} B\Gamma$, τα τρίγωνα ΕΒΔ και ΑΒΓ έχουν κοινή γωνία Β, συνεπώς ο

λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τη γωνία Β σε καθένα από τα τρίγωνα.

Οπότε έχουμε $\frac{(EB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{B\Delta \cdot BE}{BA \cdot B\Gamma} = \frac{\frac{1}{3} AB \cdot \frac{5}{6} B\Gamma}{AB \cdot B\Gamma} = \frac{5}{18}$.

4. Βασισμένο στο θέμα 18369 της τράπεζας θεμάτων.

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $AB=AG$ και $\hat{A} = 36^\circ$.

Αν $B\Delta$ διχοτόμος να αποδείξετε ότι $B\Delta\Gamma$ και $AB\Gamma$ όμοια τρίγωνα. Για ποιο σημείο Δ μπορούμε να πάρουμε $\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 1$;

Αφού $\hat{A} = 36^\circ$, στο τρίγωνο $AB\Gamma$ βρίσκουμε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 144^\circ$ και επειδή $AB\Gamma$ ισοσκελές παίρνουμε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 72^\circ$.

Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος, συνεπώς χωρίζει τη γωνία B σε δύο ίσα μέρη με $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 36^\circ$.

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ έχουν $\hat{\Gamma}$ κοινή γωνία και $\hat{A} = \hat{B}_2 = 36^\circ$, συνεπώς είναι όμοια.

Για να βρούμε το Δ ώστε $\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 1$ αρκεί να σκεφτούμε ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων θα ισούται με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν δύο ίσες ή παραπληρωματικές γωνίες.

Οι γωνίες $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ είναι παραπληρωματικές οπότε έχουμε:

$$\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{A\Delta \cdot B\Delta}{\Delta\Gamma \cdot B\Delta} = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = 1 \Leftrightarrow A\Delta = \Delta\Gamma.$$

Συνεπώς θέλουμε το Δ να χωρίζει τη πλευρά AG σε δύο ίσα μέρη, δηλαδή να είναι το μέσο της AG .

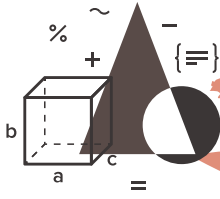




μέτρηση κύκλου



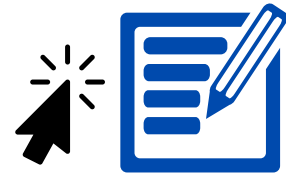
Ενότητα 11η - Γεωμετρία Β' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



11.1-11.2 Κανονικά Πολύγωνα , Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

1. Τι ονομάζουμε κανονικό πολύγωνο;

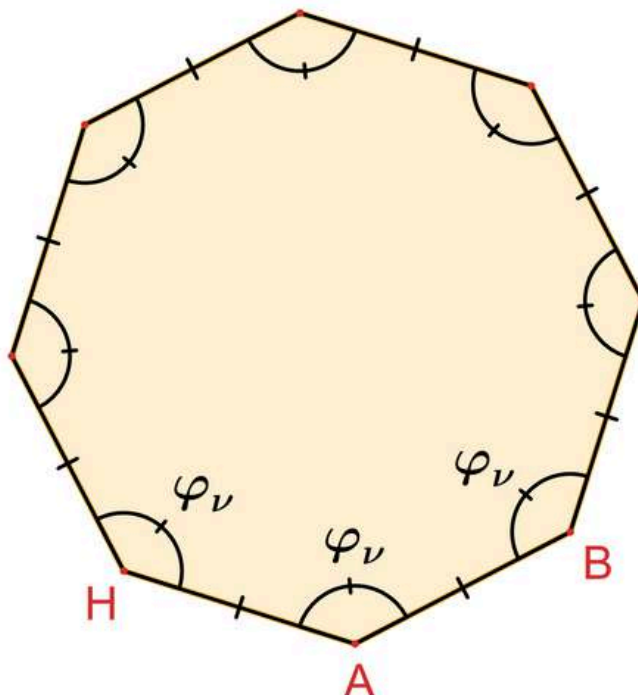
Κανονικό πολύγωνο λέγεται ένα πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

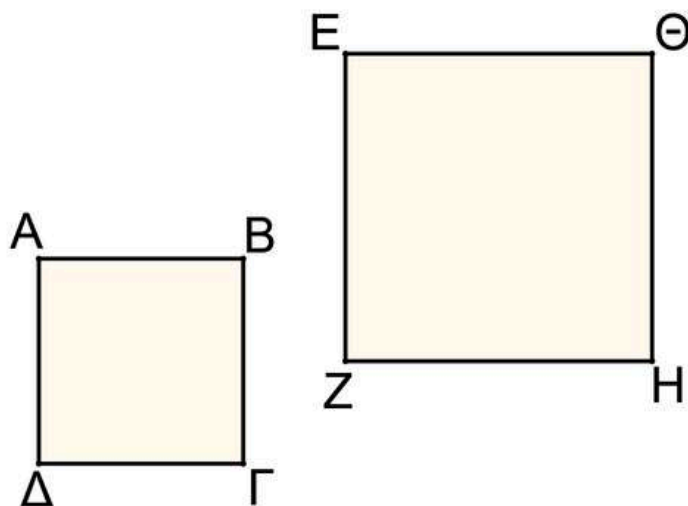
2. Πώς υπολογίζουμε την γωνία ενός κανονικού πολυγώνου;

Η γωνία του κανονικού πολυγώνου φ_v υπολογίζεται από τον τύπο $\varphi_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{v}$.



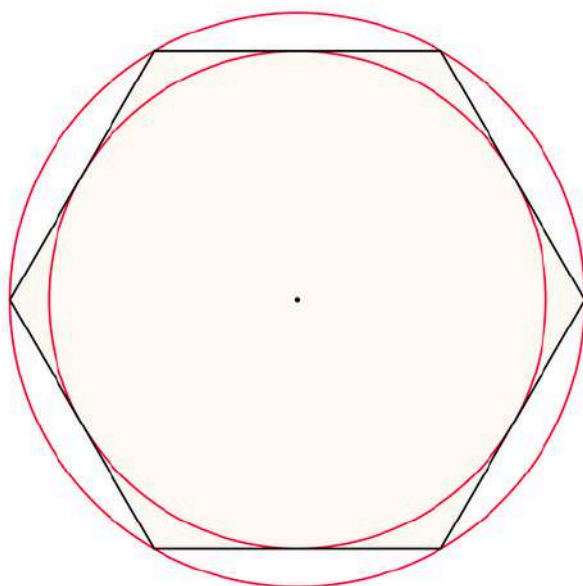
3. Πότε δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια;

Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.
π.χ. το τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι όμοιο του τετραγώνου ΕΘΖΗ.



4. Ποια είναι μια σημαντική ιδιότητα των κανονικών πολυγώνων;

Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε ένα κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.



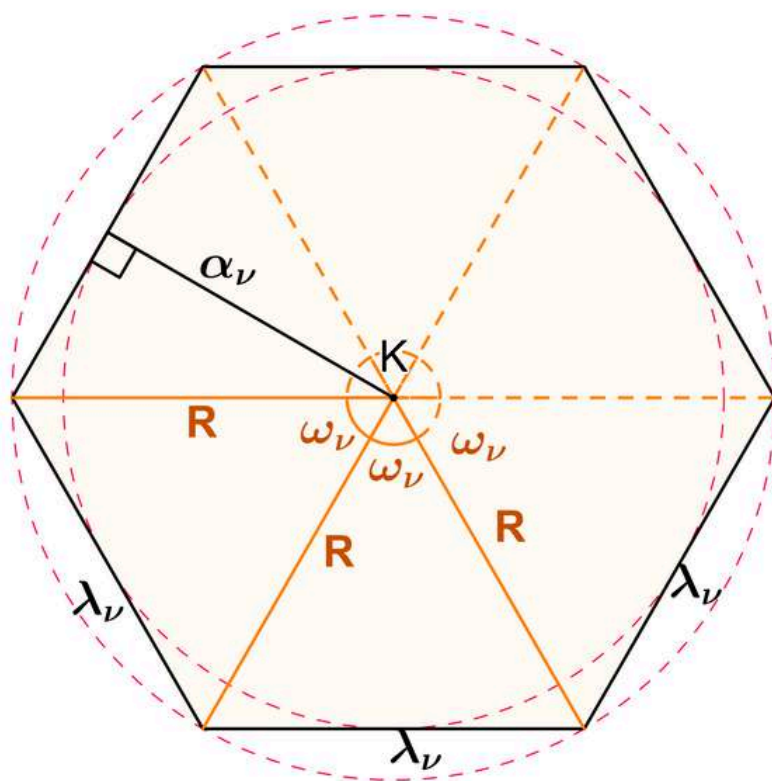
5. Ποια είναι τα στοιχεία τους κανονικού πολυγώνου;

Το κέντρο του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου είναι το κέντρο του πολυγώνου.

Η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται ακτίνα του πολυγώνου.

Η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, που είναι η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του, λέγεται απόστημα α_v του πολυγώνου.

Κάθε γωνία που έχει κορυφή το κέντρο του πολυγώνου και «βλέπει» κάθε πλευρά του λ_v λέγεται κεντρική γωνία ω_v του πολυγώνου. Οι κεντρικές γωνίες του πολυγώνου είναι ίσες.



6. Τι ισχύει για τα στοιχεία του κανονικού πολυγώνου;

Σε κάθε κανονικό n -γωνο, ακτίνας R ισχύει:

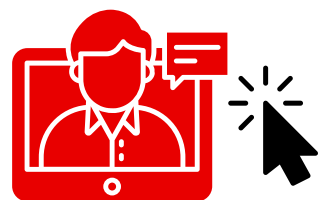
- $a_v^2 + \frac{\lambda_v^2}{4} = R^2$
- $P_v = n \cdot \lambda_v$, όπου P_v : η περίμετρος του πολυγώνου
- $\omega_v = \frac{360^\circ}{n}$
- $E_v = \frac{1}{2} \cdot P_v \cdot a_v$, όπου E_v το εμβαδόν του πολυγώνου

7. Τι ισχύει για το λόγο πλευρών και αποστημάτων ανάμεσα σε κανονικά πολύγωνα;

Σε δύο κανονικά n -γωνο ο λόγος των πλευρών τους είναι ίσος με τον λόγο των ακτινών τους και το λόγο των αποστημάτων τους.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να βρεις τη γωνία και την κεντρική γωνία ενός κανονικού πενταγώνου και εξαγώνου.

Γνωρίζουμε ότι η γωνία ενός πολυγώνου υπολογίζεται από τον τύπο $\varphi_v = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ και η κεντρική γωνία από τον τύπο $\omega_v = \frac{360^\circ}{n}$.

Για το πεντάγωνο είναι: $\varphi_5 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

$$\omega_5 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Για το εξάγωνο είναι:

$$\phi_6 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\omega_6 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

2. Να εξετάσεις αν:

α. υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία 15° .

β. υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία 18° .

Λύση

Για να υπάρχουν τα πολύγωνα αρκεί να προσδιορίσουμε τον αριθμό n , δηλαδή το πλήθος των πλευρών/γωνιών του.

α. Η κεντρική γωνία προκύπτει από τον τύπο $\omega_n = \frac{360^\circ}{n}$, οπότε παίρνουμε

$$15^\circ = \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow n = \frac{360^\circ}{15^\circ} = 24, \text{ άρα το κανονικό 24-γωνο έχει κεντρική γωνία } 15^\circ.$$

β. Η γωνία προκύπτει από τον τύπο $\phi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, οπότε παίρνουμε

$$18^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow \frac{360^\circ}{n} = 162 \Leftrightarrow n = \frac{360^\circ}{162^\circ} = 2,2222$$

Ο αριθμός n όμως πρέπει να είναι φυσικός αριθμός, συνεπώς δεν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία 18° .

3. Αν γνωρίζουμε ότι ο λόγος των πλευρών δύο κανονικών πολυγώνων

είναι $\mu = \frac{1}{4}$, να βρεις:

α. Αφού έχουν λόγο πλευρών $\mu = \frac{1}{4}$, τότε θα έχουν και λόγο αποστημάτων $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{4}$.

β. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου των πλευρών, οπότε έχουμε $\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

γ. Οι περίμετροι έχουν λόγο ίδιο με το λόγο των πλευρών, οπότε $\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{4}$.

Επίσης ισχύει, από την εκφώνηση της άσκησης, ότι $P_1 + P_2 = 200$.

Θα πάρουμε:

$$P_1 + P_2 = 200 \Leftrightarrow P_1 + 4P_1 = 200 \Leftrightarrow 5P_1 = 200 \Leftrightarrow P_1 = 40\text{cm και } P_2 = 160\text{cm}$$

4. Να βρεις την πλευρά, την περίμετρο, την ακτίνα και το εμβαδόν ενός

κανονικού εξαγώνου με απόστημα $a_v = 2\sqrt{3}\text{cm}$.

Αρχικά για το κανονικό εξάγωνο γνωρίζουμε ότι έχει $\omega_6 = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ και

$$\varphi_6 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Το τρίγωνο KZA είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο, με $KA=AZ=ZK$. Οπότε η πλευρά λ του πολυγώνου θα είναι ίση με την ακτίνα R.

Επίσης καταλαβαίνουμε ότι $\angle A\Theta = \frac{\lambda}{2}$ και $AK = \lambda$.

Το τρίγωνο KΘA είναι ορθογώνιο, με $K\Theta = 2\sqrt{3}$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$K\Theta^2 + A\Theta^2 = KA^2$$

$$a^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 = \lambda^2$$

$$(2\sqrt{3})^2 = \lambda^2 - \frac{\lambda^2}{4}$$

$$4 \cdot 3 = \frac{3\lambda^2}{4}$$

$$16 \cdot 3 = 3\lambda^2$$

$$\lambda^2 = 16$$

$$\lambda = 4$$

Συνεπώς η πλευρά λ του πολυγώνου και η ακτίνα R είναι 4.

Για να βρούμε την περίμετρο θα αξιοποιήσουμε την σχέση

$$P_v = v \cdot \lambda_v \Leftrightarrow P = 6 \cdot 4 = 24$$

Για να βρούμε το εμβαδόν θα αξιοποιήσουμε τη σχέση

$$E_v = \frac{1}{2} \cdot P_v \cdot a_v \Leftrightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$$

5. Έχουμε κανονικό πολύγωνο με κέντρο K και ακτίνα R . Αν η γωνία του είναι 144° , βρες:

α. την κεντρική γωνία

β. το πλήθος των πλευρών του

γ. αν επιπλέον είναι $\lambda=4$, βρες το απόστημα, την περίμετρο και το εμβαδόν συναρτήσει της πλευράς και της ακτίνας.

α. Για την κεντρική και την γωνία ενός κανονικού πολυγώνου, γνωρίζουμε ότι είναι παραπληρωματικές, δηλαδή έχουν άθροισμα 180° . Οπότε θα πάρουμε:

$$\omega + \varphi = 180^\circ \Leftrightarrow \omega + 144 = 180 \Leftrightarrow \omega = 36^\circ$$

β. Αφού $\omega = 36^\circ$, παίρνουμε $36 = \frac{360}{v} \Leftrightarrow v = 10$, οπότε έχουμε ένα κανονικό 10-γωνο.

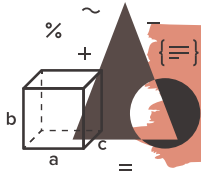
γ. Γνωρίζουμε ότι $\lambda = 10$, οπότε έχουμε:

$$\alpha_v^2 + \frac{\lambda_v^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = R^2 - \frac{10^2}{4} = R^2 - 25 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{R^2 - 25}$$

$$P_v = v \cdot \lambda_v \Leftrightarrow P = 10 \cdot 10 \Leftrightarrow P = 100$$

$$E_v = \frac{1}{2} \cdot P_v \cdot \alpha_v \Leftrightarrow E = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \sqrt{R^2 - 25} \Leftrightarrow E = 50\sqrt{R^2 - 25}$$



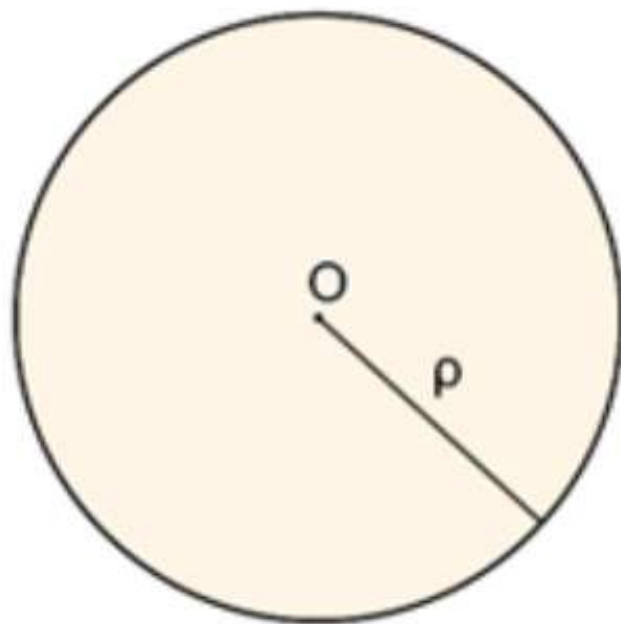


4. Μήκος κύκλου

5. Μήκος τόξου

1. Ποια είναι η σχέση για τον υπολογισμό του μήκους κύκλου;

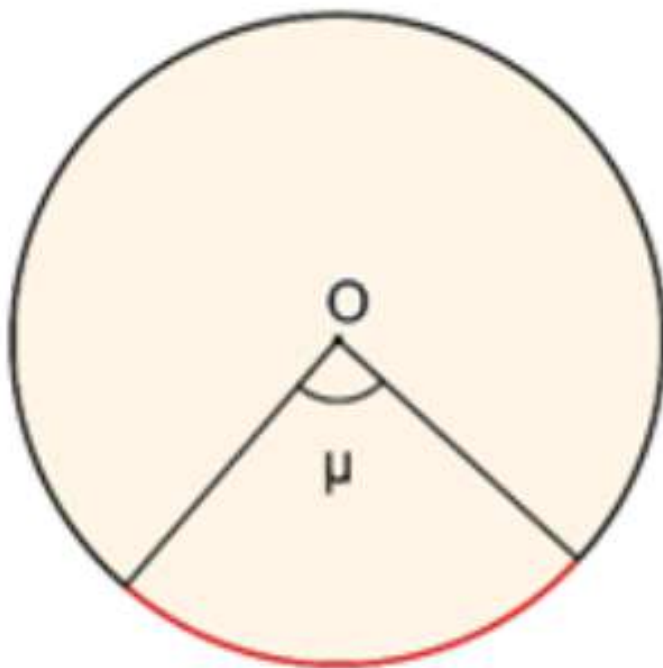
$L = 2\pi r$, όπου L το μήκος του κύκλου, r η ακτίνα του κύκλου και π ο άρρητος αριθμός, με προσέγγιση $\pi \cong 3,14$.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Ποια είναι η σχέση για τον υπολογισμό του μήκους τόξου;

$\ell = \pi r \cdot \frac{\mu}{180^\circ}$, όπου ℓ το μήκος του τόξου, r η ακτίνα, π ο άρρητος αριθμός με προσέγγιση $\pi \cong 3,14$ και μ η γωνία του τόξου σε μοίρες.



3. Τι είναι το ακτίνιο;

Ένα τόξο κύκλου με μήκος ίσο με την ακτίνα του R λέγεται ακτίνιο (rad). Ένα τόξο α rad έχει μήκος αR , δηλαδή $\ell = \alpha \cdot R$.

4. Ποια σχέση συνδέει τις μοίρες μ με τα ακτίνια α ;

Η σχέση που συνδέει τις μοίρες με τα ακτίνια είναι $\frac{\alpha \text{ (rad)}}{\pi} = \frac{\mu \text{ (}^\circ\text{)}}{180}$.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Να βρεις το μήκος των τόξων που αντιστοιχούν σε επίκεντρες γωνίες 30° , 45° , 60° , 90° και 180° συναρτήσει της ακτίνας του κύκλου, και στη συνέχεια να κάνεις τους ίδιους υπολογισμούς για τα τόξα μετρημένα σε ακτίνια.

Γνωρίζουμε ότι το μήκος ενός τόξου υπολογίζεται από την σχέση $\ell = \pi \rho \cdot \frac{\mu}{180^\circ}$, οπότε έχουμε :

$$\ell = \pi \rho \cdot \frac{\mu}{180^\circ} \Leftrightarrow \ell = \pi \rho \cdot \frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \rho}{6} = \frac{2\pi \rho}{12}, \text{ δηλαδή έχει μήκος ίσο με το } \frac{1}{12} \text{ του κύκλου.}$$

$$\ell = \pi \rho \cdot \frac{\mu}{180^\circ} \Leftrightarrow \ell = \pi \rho \cdot \frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \rho}{4} = \frac{2\pi \rho}{8}, \text{ δηλαδή έχει μήκος ίσο με το } \frac{1}{8} \text{ του κύκλου.}$$

$$\ell = \pi \rho \cdot \frac{\mu}{180^\circ} \Leftrightarrow \ell = \pi \rho \cdot \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \rho}{3} = \frac{2\pi \rho}{6}, \text{ δηλαδή έχει μήκος ίσο με το } \frac{1}{6} \text{ του κύκλου.}$$

$$\ell = \pi \rho \cdot \frac{\mu}{180^\circ} \Leftrightarrow \ell = \pi \rho \cdot \frac{90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \rho}{2} = \frac{2\pi \rho}{4}, \text{ δηλαδή έχει μήκος ίσο με το } \frac{1}{4} \text{ του κύκλου.}$$

$$\ell = \pi \rho \cdot \frac{\mu}{180^\circ} \Leftrightarrow \ell = \pi \rho \cdot \frac{180^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \rho}{1} = \frac{2\pi \rho}{2}, \text{ δηλαδή έχει μήκος ίσο με το } \frac{1}{2} \text{ του κύκλου.}$$

Για να κάνουμε την ίδια διαδικασία και υπολογισμούς σε ακτίνια έχουμε:

$$30^\circ: \frac{\alpha \text{ (rad)}}{\pi} = \frac{30 \text{ (}^\circ\text{)}}{180} \Leftrightarrow 180\alpha = 30\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{30\pi}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ και το μήκος θα είναι } \ell = \frac{\pi}{6} \cdot \rho$$

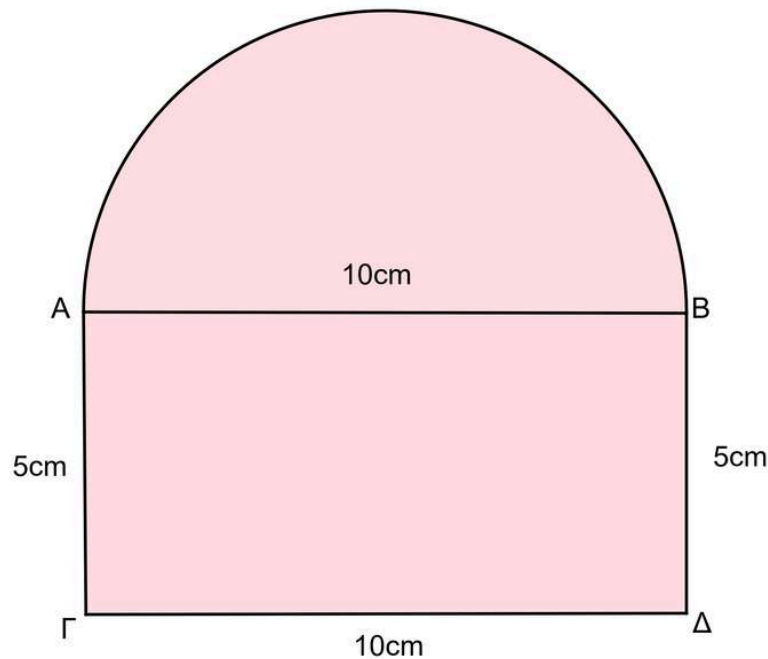
$$45^\circ: \frac{\alpha \text{ (rad)}}{\pi} = \frac{45 \text{ (}^\circ\text{)}}{180} \Leftrightarrow 180\alpha = 45\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{45\pi}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ και το μήκος θα είναι } \ell = \frac{\pi}{4} \cdot \rho$$

$$60^\circ: \frac{\alpha \text{ (rad)}}{\pi} = \frac{60 \text{ (}^\circ\text{)}}{180} \Leftrightarrow 180\alpha = 60\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{60\pi}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ και το μήκος θα είναι } \ell = \frac{\pi}{3} \cdot \rho$$

$$90^\circ: \frac{\alpha \text{ (rad)}}{\pi} = \frac{90 \text{ (}^\circ\text{)}}{180} \Leftrightarrow 180\alpha = 90\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{90\pi}{180} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ και το μήκος θα είναι } \ell = \frac{\pi}{2} \cdot \rho$$

$$180^\circ: \frac{\alpha \text{ (rad)}}{\pi} = \frac{180 \text{ (}^\circ\text{)}}{180} \Leftrightarrow 180\alpha = 180\pi \Leftrightarrow \alpha = \pi \text{ και το μήκος θα είναι } \ell = \pi \cdot \rho$$

2. Στο παρακάτω σχήμα γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι η διάμετρος του ημικυκλίου, με μήκος $AB=10\text{cm}$. Να βρεις το μήκος του AB και την περίμετρο του σχήματος.



Για να βρούμε το μήκος του $\widehat{AB}$, αρκεί να αξιοποιήσουμε την σχέση $\ell = \pi r \cdot \frac{\mu}{180^\circ}$

Το $\widehat{AB}$ είναι 180° και ανήκει σε κύκλο διαμέτρου 10cm , δηλαδή ακτίνας $r=5\text{cm}$.

$$\text{Οπότε παίρνουμε } \ell = \pi \cdot 5 \cdot \frac{180^\circ}{180^\circ} = 5\pi$$

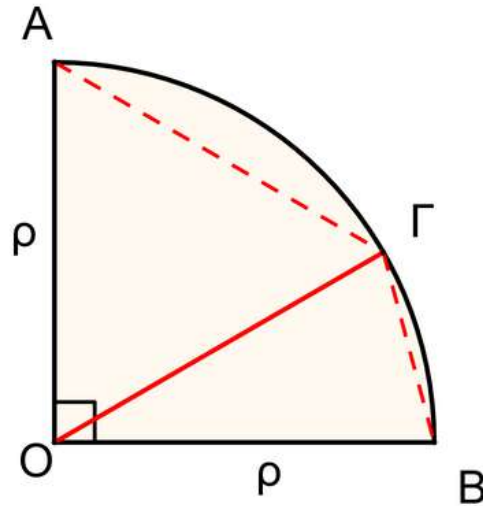
Για να βρούμε την περίμετρο του σχήματος θα πάρουμε απλά:

$$\Pi = 10 + 5 + 5\pi + 5 = 20 + 5\pi = 5(4 + \pi)\text{cm}$$

3. Δίνεται τεταρτοκύκλιο AB ακτίνας ρ και κέντρου O. Αν $A\Gamma=2B\Gamma$ τότε να βρεις:

α. το μήκος του BΓ

β. τι είδους τρίγωνο είναι το OΓΑ και το OΓΒ



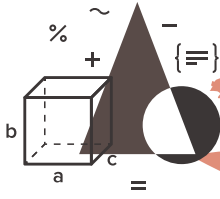
α. Γνωρίζουμε ότι $\widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{B\Gamma} + \widehat{B\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\widehat{B\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{B\Gamma} = 30^\circ$, και $\widehat{A\Gamma} = 60^\circ$

για το μήκος του τόξου θα έχουμε $\ell_{\widehat{B\Gamma}} = \pi\rho \frac{30}{180} = \frac{\pi\rho}{6}$

β. Στο τρίγωνο OΒΓ παρατηρούμε ότι $OB=OG=\rho$, οπότε καταλαβαίνουμε ότι είναι ισοσκελές.

Στο τρίγωνο OΑΓ παρατηρούμε ότι $OA=OG=\rho$ και επιπλέον $\widehat{AOG} = 60^\circ$, συνεπώς το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

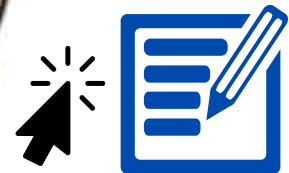
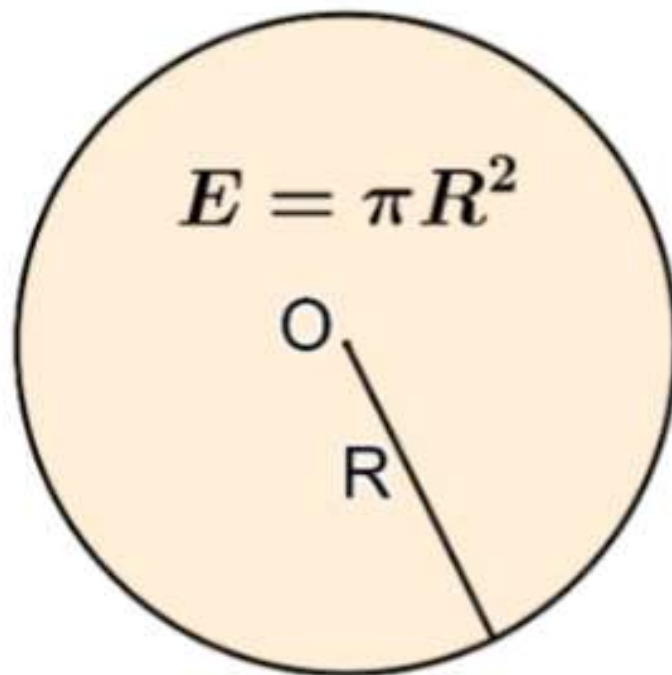




11.6-11.7 Εμβαδόν κύκλου, κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

1. Πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (του κύκλου);

Το εμβαδόν E ενός κύκλου ακτίνας R δίνεται από την σχέση $E = \pi R^2$.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Τι είναι κυκλικός τομέας και πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν του;

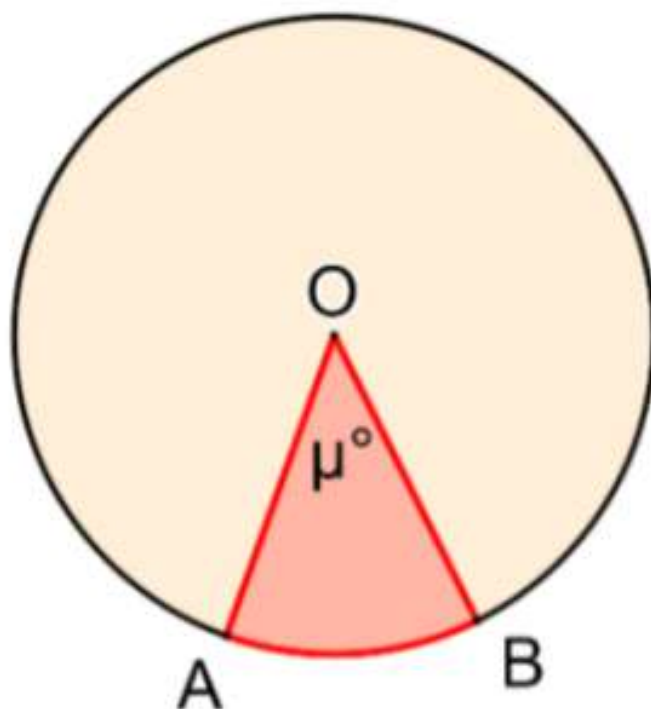
Ο κυκλικός τομέας είναι το σύνολο των κοινών σημείων του κύκλου και μιας επίκεντρης του γωνίας.

Για έναν κυκλικό τομέα $\widehat{OAB}$ μ° , σε κύκλο ακτίνας R υπολογίζουμε το εμβαδόν από τον τύπο:

$$(\widehat{OAB}) = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ}$$

Αντίστοιχα, για έναν κυκλικό τομέα α rad, θα υπολογίζουμε το εμβαδόν από τον τύπο:

$$(\widehat{OAB}) = \frac{1}{2} \alpha R^2$$

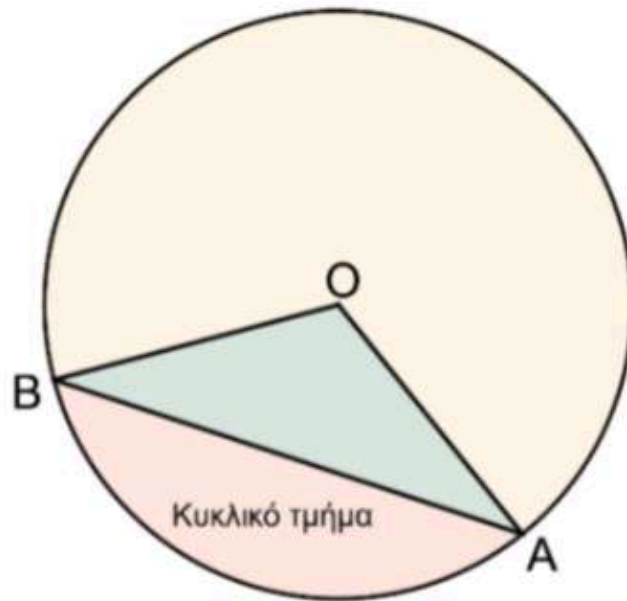


$$E = \pi R^2 \frac{\mu}{360^\circ}$$

3. Τι είναι κυκλικό τμήμα και πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν του;

Το κυκλικό τμήμα είναι το ένα από τα δύο μέρη που προκύπτουν όταν σε ένα κύκλο φέρουμε μια χορδή.

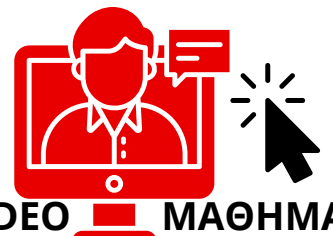
Για να βρούμε το εμβαδόν ενός κυκλικού τμήματος ϵ αρκεί να αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα, το εμβαδόν του τριγώνου.



$$E_{\text{κ.τμήμα}} = E_{\text{κ.τομέα OAB}} - E_{\text{Τριγώνου OAB}}$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα R. Να βρεις το εμβαδόν των τόξων που αντιστοιχούν σε επίκεντρες γωνίες 30° , 45° , 60° , 90° και 180° συναρτήσει της ακτίνας του κύκλου.

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τόξου υπολογίζεται από την σχέση $E = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ}$ οπότε έχουμε :

$$E = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ} \Leftrightarrow E = \pi R^2 \cdot \frac{30}{360^\circ} = \pi R^2 \cdot \frac{1}{12}.$$

$$E = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ} \Leftrightarrow E = \pi R^2 \cdot \frac{45}{360^\circ} = \pi R^2 \cdot \frac{1}{8}$$

$$E = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ} \Leftrightarrow E = \pi R^2 \cdot \frac{60}{360^\circ} = \pi R^2 \cdot \frac{1}{6}.$$

$$. E = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ} \Leftrightarrow E = \pi R^2 \cdot \frac{90}{360^\circ} = \pi R^2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$E = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ} \Leftrightarrow E = \pi R^2 \cdot \frac{180}{360^\circ} = \pi R^2 \cdot \frac{1}{2}$$

2. Δίνεται κύκλος και τόξο του $AB=30$. Αν ο κύκλος έχει μήκος 6π cm, να βρεις την ακτίνα του κύκλου, το εμβαδόν του κυκλικού τομέα και το εμβαδόν του κύκλου.

Αφού ο κύκλος έχει μήκος 6π , παίρνουμε $2\pi\rho = 6\pi \Leftrightarrow \rho = 3$.

Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E_{\kappa} = \pi\rho^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$.

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι $E = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ} \Leftrightarrow E = 9\pi \frac{30}{360} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$.

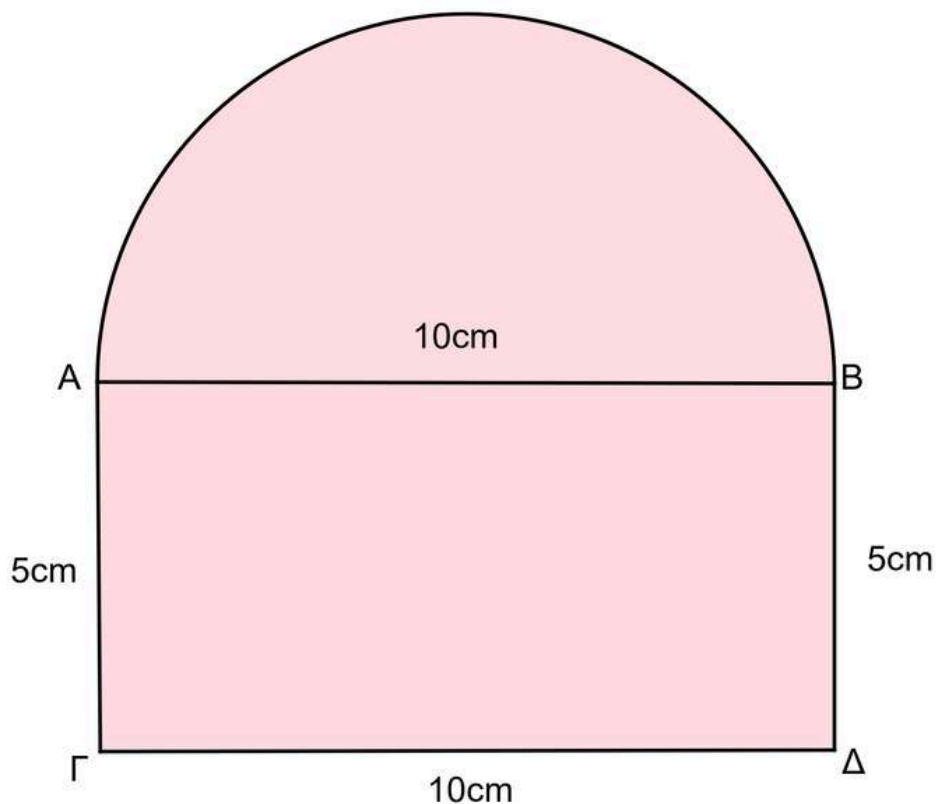
3. Στο παρακάτω σχήμα γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι η διάμετρος του ημικυκλίου, με μήκος $AB=10\text{cm}$. Να βρεις το εμβαδόν του σχήματος.

Αφού AB διάμετρος $= 10\text{cm}$, τότε ακτίνα $\rho=5\text{cm}$.

Για να βρούμε το εμβαδόν του σχήματος θα χρειαστεί να υπολογίσουμε ξεχωριστά το εμβαδόν του ορθογώνιου και του ημικυκλίου.

Για το ορθογώνιο: $E_1 = 5 \cdot 10 = 50$.

Για το ημικύκλιο: $E_2 = \pi \cdot \rho^2 \cdot \frac{180}{360} = \frac{25\pi}{2}$



Οπότε το συνολικό εμβαδόν είναι $E = E_1 + E_2 = 50 + \frac{25\pi}{2} = 25(2 + \frac{\pi}{2})\text{cm}^2$

4. Να βρεις το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος όπως φαίνεται στο σχήμα, συναρτήσει της ακτίνας ρ του κύκλου.

Γνωρίζουμε ότι για να βρούμε το εμβαδόν ενός κυκλικού τμήματος ϵ αρκεί να αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα, το εμβαδόν του τριγώνου.

Ο κυκλικός τομέας αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 90° ,

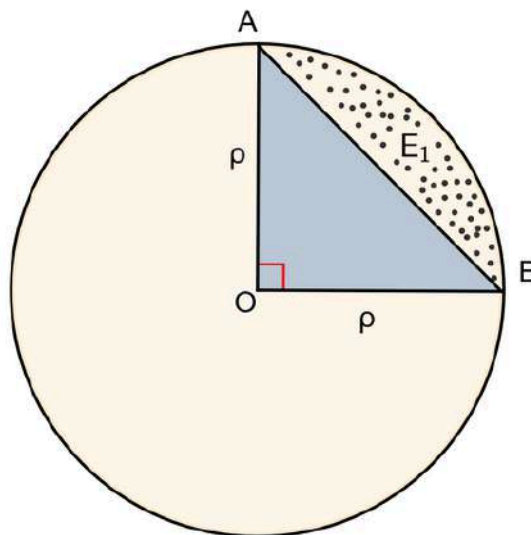
$$\text{οπότε θα έχει εμβαδόν } E = \pi \rho^2 \frac{\mu}{360} = \pi \cdot \rho^2 \cdot \frac{90}{360} = \frac{\pi \rho^2}{4}$$

Το τρίγωνο είναι ένα ισοσκελές ορθογώνιο, με κάθετες πλευρές τις $OA=OB=\rho$.

$$\text{Συνεπώς θα έχει εμβαδόν } \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{\rho^2}{2}$$

Τελικά το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος θα είναι

$$E_1 = \frac{\pi \rho^2}{4} - \frac{\rho^2}{2} = \frac{\pi \rho^2}{4} - \frac{2\rho^2}{4} = \rho^2 \left(\frac{\pi - 2}{4} \right)$$



ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΚΔΟΣΗΣ:
Πρόδρομος Μιχαλάκης

© ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΛΥΣΑΡΙ | LISARI.GR
& Πρόδρομος Μιχαλάκης



Πανόρμου 14 & Σμύρνης,
12242, Αιγάλεω
τηλ.: 210 5982 614
e-mail: info@lisari.gr
www.lisari.gr

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται από τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και από τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η χωρίς γραπτή άδεια του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή οποιοδήποτε μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

