

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ



Διαδραστικό Βοήθημα

Θεωρία - VideoΜαθήματα - Ασκήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο : Διανύσματα

1.1 Η Έννοια του Διανύσματος

1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση Διανυσμάτων

1.3 Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

1.4 Συντεταγμένες στο Επίπεδο

1.5 Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο : Η Ευθεία στο Επίπεδο

2.1 Εξίσωση Ευθείας

2.2 Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας

2.3 Εμβαδόν Τριγώνου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : Κωνικές Τομές

3.1 Ο Κύκλος

3.2 Η Παραβολή

3.3 Η Έλλειψη

3.4 Η Υπερβολή

3.5 Η Εξίσωση $Ax^2 + By^2 + \Gamma x + \Delta y + E = 0$



διανύσματα



1. Η έννοια του διανύσματος

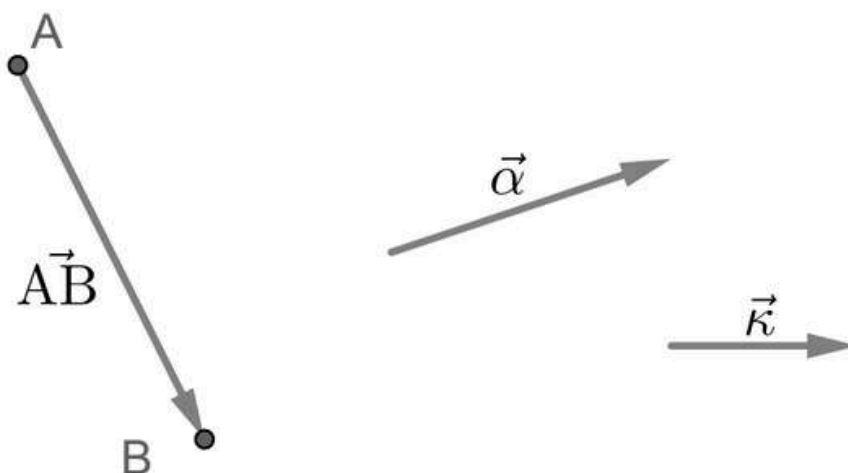


ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζεται διάνυσμα;

Διάνυσμα ονομάζεται ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το ένα άκρο λέγεται αρχή του διανύσματος, ενώ το άλλο λέγεται πέρας (τέλος).

Συμβολίζεται είτε με $\overrightarrow{AB}$ (όπου A η αρχή και B το τέλος), είτε με μικρά γράμματα της αλφαβήτου ().

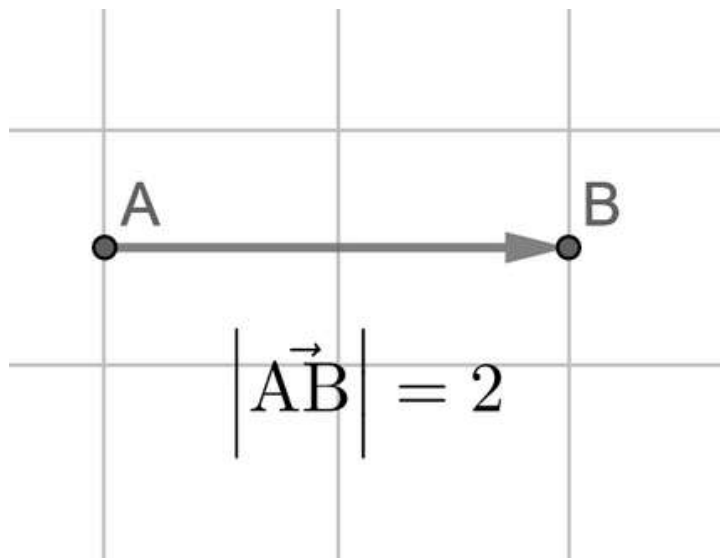


2. Ποιο διάνυσμα ονομάζεται μηδενικό;

Αν σε ένα διάνυσμα η αρχή και το πέρας του συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται μηδενικό διάνυσμα ($\vec{0}$), π.χ. το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα γιατί ξεκινάει και τελειώνει στο σημείο A.

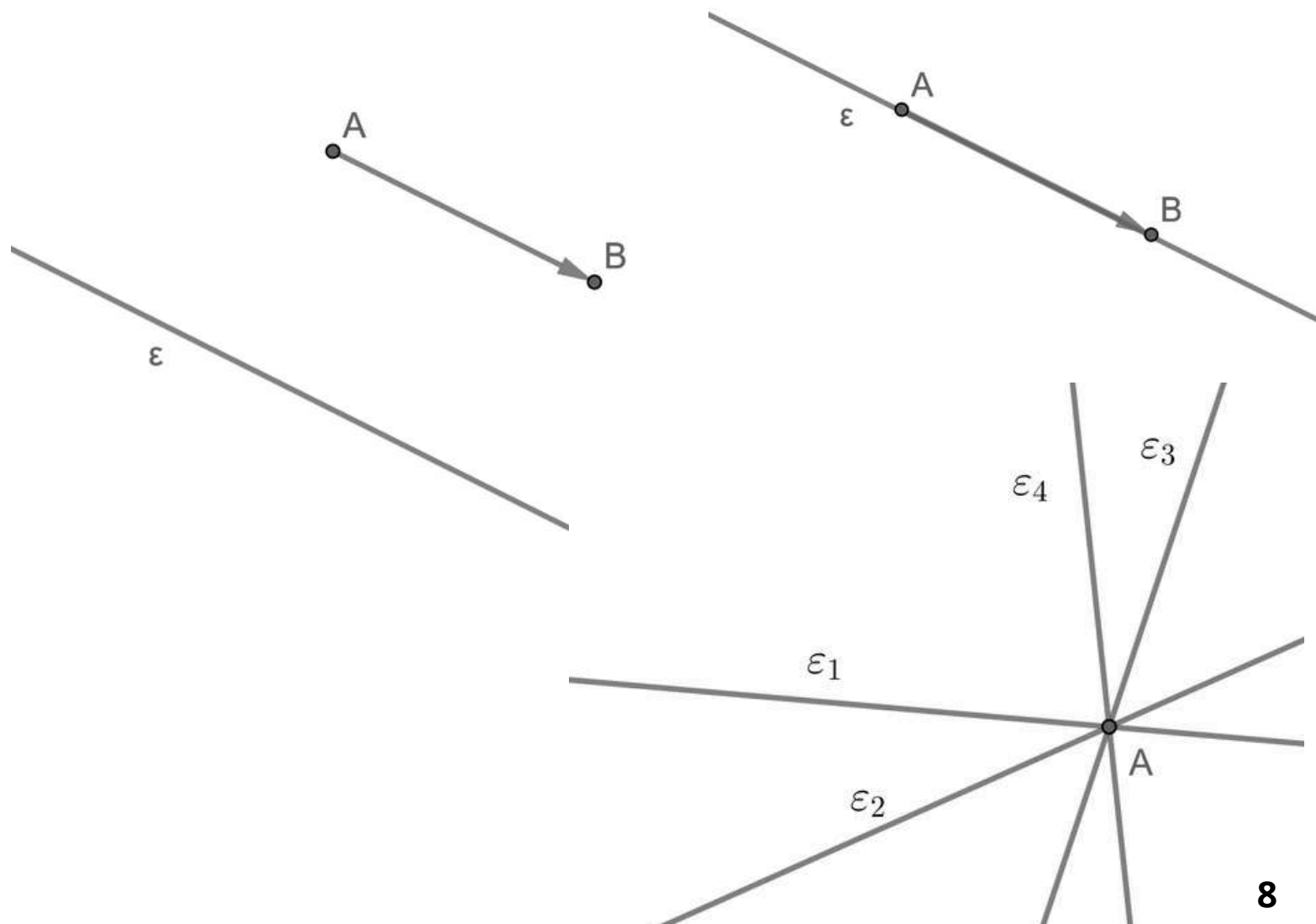
3. Τι ονομάζουμε μέτρο διανύσματος;

Μέτρο ενός διανύσματος ονομάζεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB και συμβολίζουμε $|\overrightarrow{AB}|$. Αν ένα διάνυσμα έχει μέτρο 1, ονομάζεται μοναδιαίο διάνυσμα.



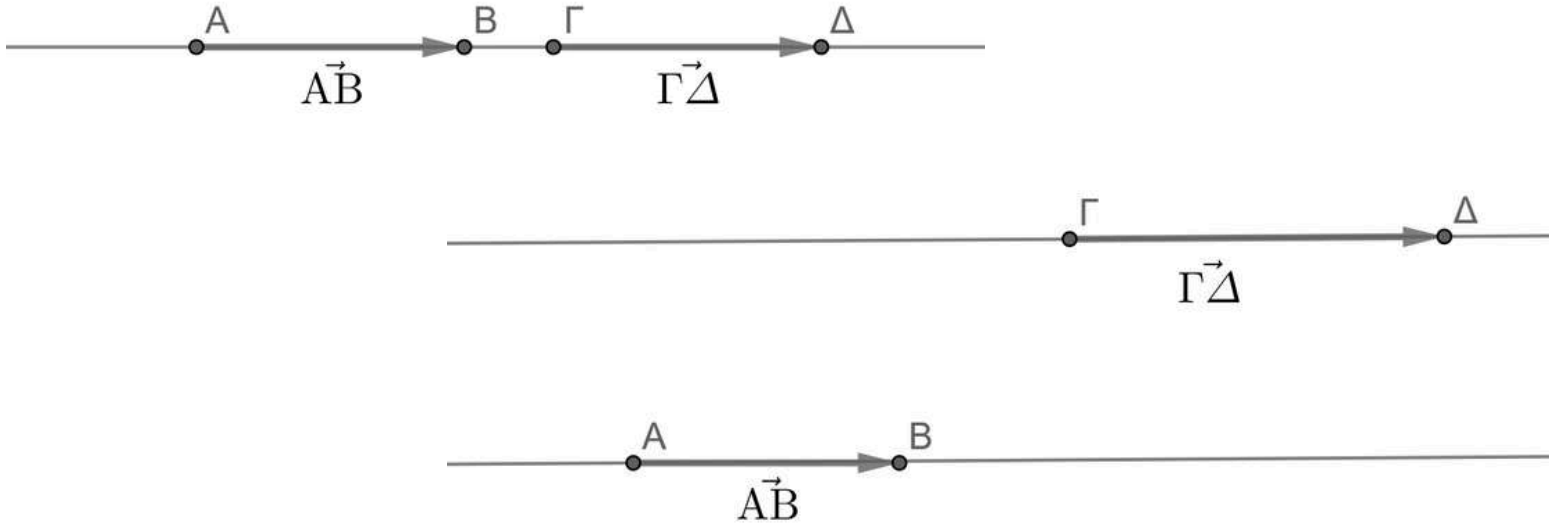
4. Τι ονομάζουμε φορέα διανύσματος;

Φορέα ενός μη μηδενικού διανύσματος ονομάζουμε την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα. Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\vec{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με την ευθεία ε τότε λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{AB}$ είναι παράλληλο προς την ευθεία ε και συμβολίζουμε $\vec{AB} \parallel \varepsilon$. Στο μηδενικό διάνυσμα φορείς είναι κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο A.



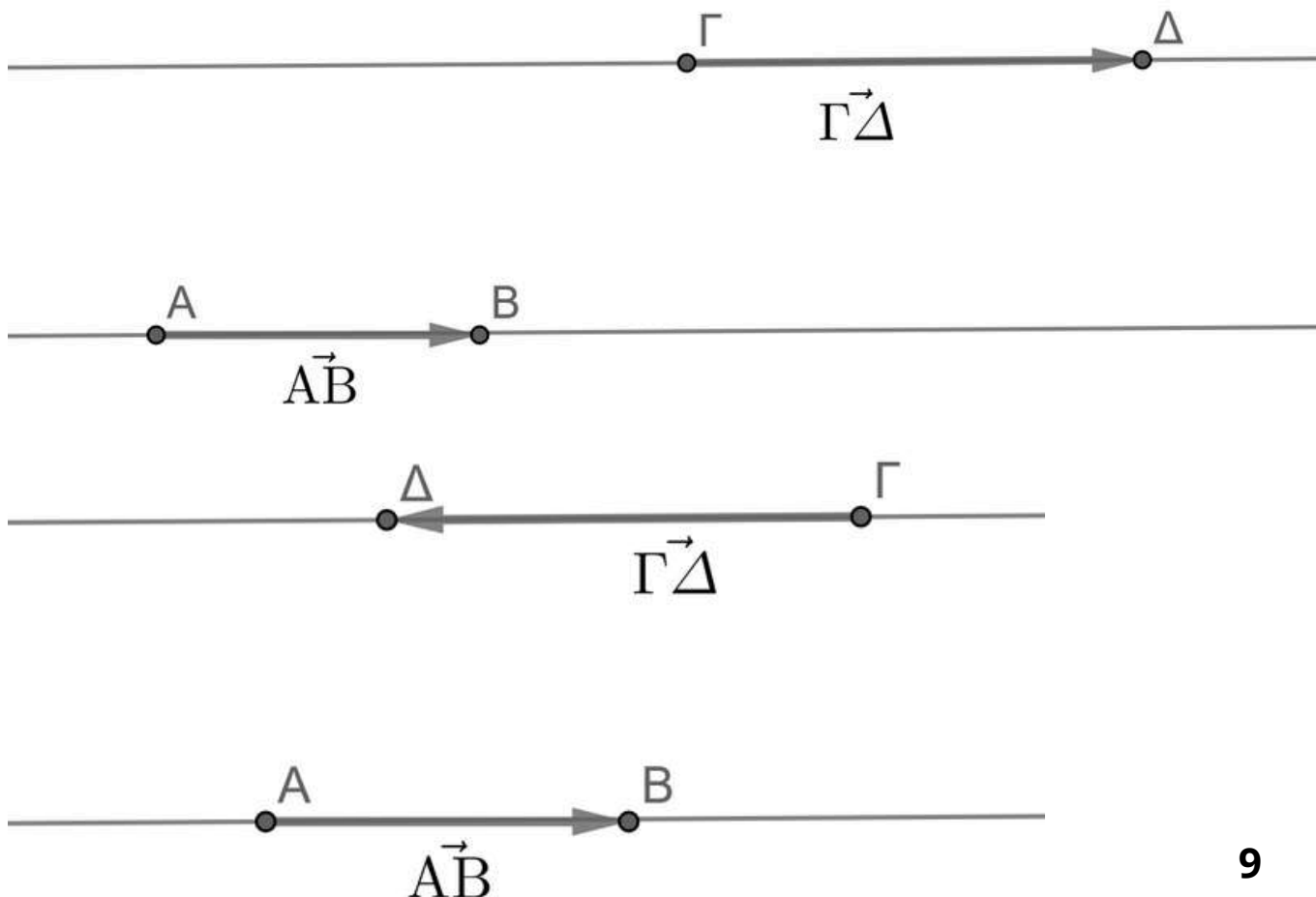
5. Πότε δύο διανύσματα είναι παράλληλα ή συγγραμμικά;

Θα λέμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ είναι παράλληλα (συγγραμμικά) όταν ανήκουν στον ίδιο φορέα ή έχουν παράλληλους φορείς. Συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.



6. Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται τα συγγραμμικά διανύσματα;

- Ομόρροπα: είναι τα διανύσματα που είναι συγγραμμικά και έχουν την ίδια φορά. Συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
- Αντίρροπα: είναι τα διανύσματα που είναι συγγραμμικά και έχουν αντίθετη φορά. Συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.



7. Τι ονομάζουμε κατεύθυνση ενός διανύσματος;

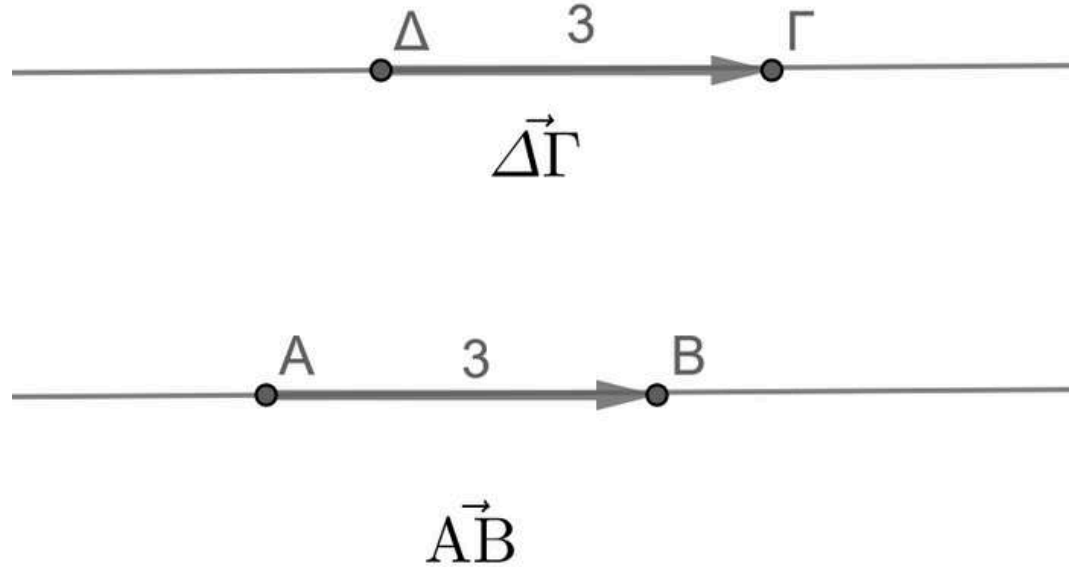
Κατεύθυνση είναι το μέγεθος που περιγράφει την διεύθυνση και τη φορά ενός διανύσματος δηλαδή: σε ποια ευθεία ανήκει (διεύθυνση) και προς ποιο σημείο ορίζεται (φορά).

8. Πότε δύο διανύσματα λέγονται ίσα;

Ίσα λέγονται δύο διανύσματα που έχουν ίδιο μέτρο και ίδια κατεύθυνση.

Συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Δηλαδή:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{\Delta\Gamma} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \end{cases}$$



9. Πότε δύο διανύσματα ονομάζονται αντίθετα;

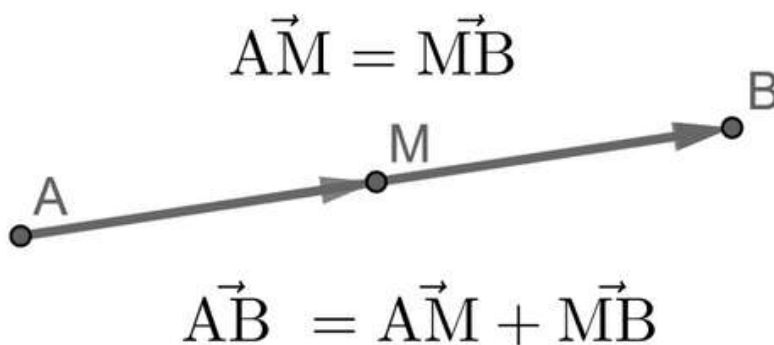
Δυο διανύσματα είναι αντίθετα όταν είναι αντίρροπα (έχουν αντίθετη κατεύθυνση) και ίσα μέτρα.

Συμβολίζουμε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Δηλαδή
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}| \end{cases}$$

10. Τι ισχύει για το μέσο ενός διανύσματος;

Για το μέσο Μ του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

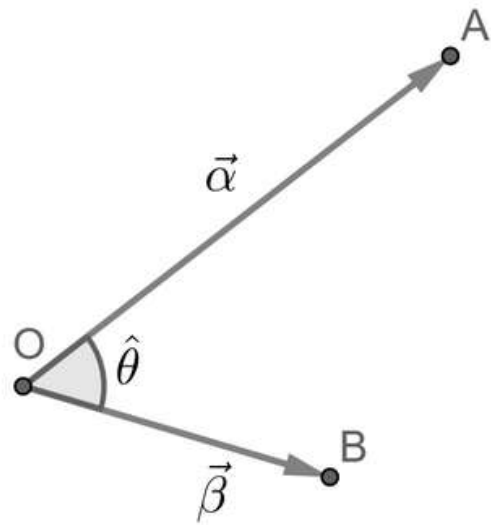


11. Πώς ορίζουμε γωνία δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$;

Η γωνία δύο διανυσμάτων ορίζεται ως η κυρτή γωνία που σχηματίζουν οι ημιευθείες των διανυσμάτων αυτών. Συνήθως συμβολίζεται $\widehat{\vec{\alpha} \vec{\beta}}$

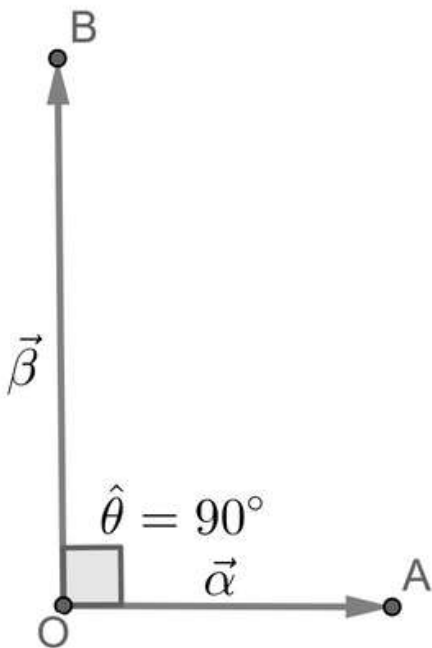
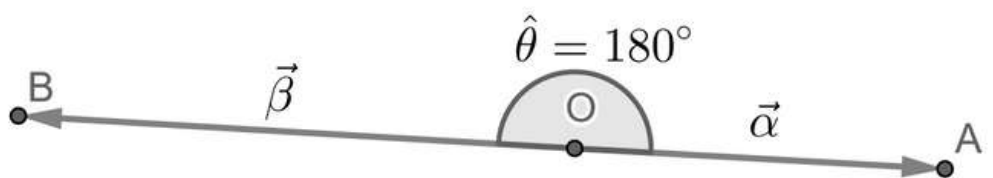
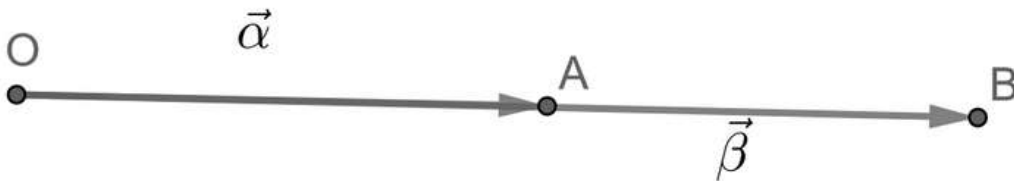
Για κάθε γωνία $\widehat{\vec{\alpha} \vec{\beta}}$ ισχύει:

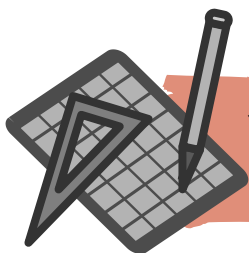
- $0 \leq \widehat{\vec{\alpha} \vec{\beta}} \leq 180^\circ$
- αν $\widehat{\vec{\alpha} \vec{\beta}} = 0^\circ$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$
- αν $\widehat{\vec{\alpha} \vec{\beta}} = 180^\circ$ τότε $\vec{\alpha} \updownarrow \vec{\beta}$
- αν $\widehat{\vec{\alpha} \vec{\beta}} = 90^\circ$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$



·αν ένα διάνυσμα είναι μηδενικό, τότε δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τη γωνία που σχηματίζει με ένα άλλο διάνυσμα, οπότε λέμε ότι το διάνυσμα είναι κάθετο, ομμόροπο, αντίρροπο, κλπ με κάθε άλλο διάνυσμα.

$$\hat{\theta} = 0^\circ$$





1.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

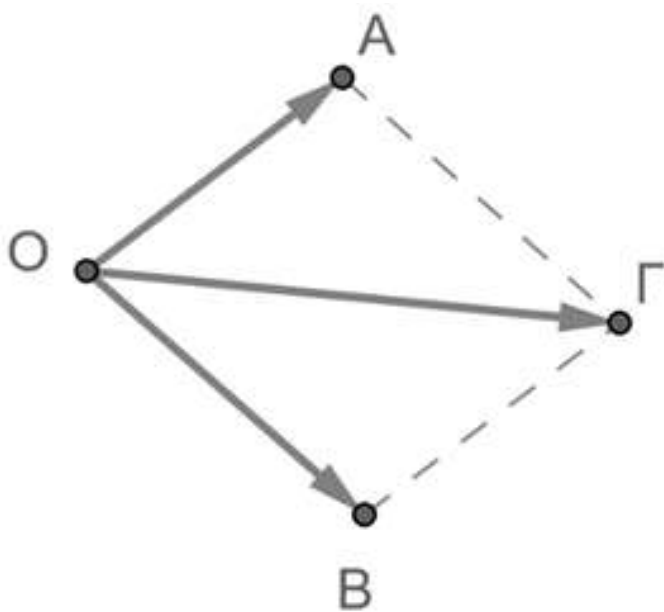


ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πώς προσθέτουμε δύο διανύσματα;

Για να βρούμε το άθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$, παίρνουμε με αρχή το O το διάνυσμα $\vec{OA} = \vec{a}$ και στη συνέχεια με αρχή το σημείο A το διάνυσμα $\vec{AB} = \vec{\beta}$ και ορίζουμε σαν άθροισμα $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$.

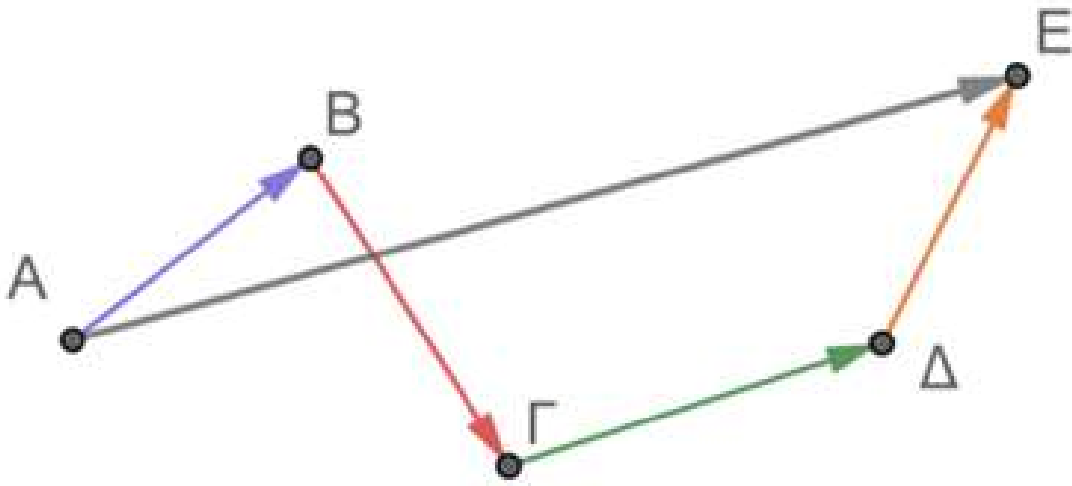
Αν τα διανύσματα έχουν κοινή αρχή βρίσκουμε το άθροισμά τους με τον κανόνα παραλληλογράμμου, δηλαδή παίρνουμε $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OG}$.



Γενικά όταν προσθέτουμε διαδοχικά διανύσματα (δηλαδή διανύσματα που το τέλος του ενός ταυτίζεται με την αρχή του άλλου) παίρνουμε άθροισμα ένα διάνυσμα με αρχή την αρχή του πρώτου και τέλος το τέλος του τελευταίου διαστήματος.

Π.χ:

$$\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GD} + \vec{DE} = \vec{AG} + \vec{GE} = \vec{AE}$$



2. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων;

$$1. \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

αντιμεταθετική ιδιότητα

$$2. (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

προσεταιριστική ιδιότητα

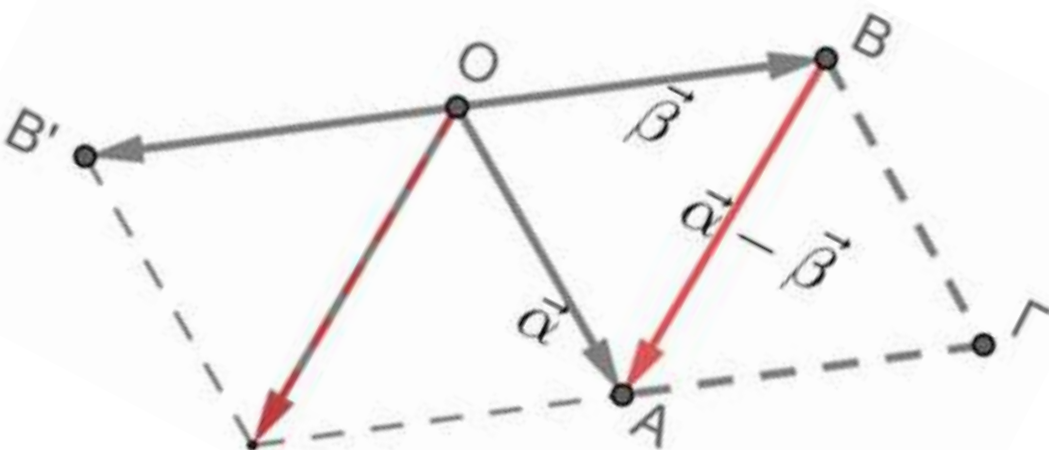
$$3. \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$4. \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

3. Πώς αφαιρούμε διανύσματα;

Για να βρούμε τη διαφορά $\vec{a} - \vec{b}$ αρκεί να βρούμε το άθροισμα $\vec{a} + (-\vec{b})$.

Δηλαδή αρκεί στο διάνυσμα $\vec{a}$ να προσθέσουμε το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{b}$.

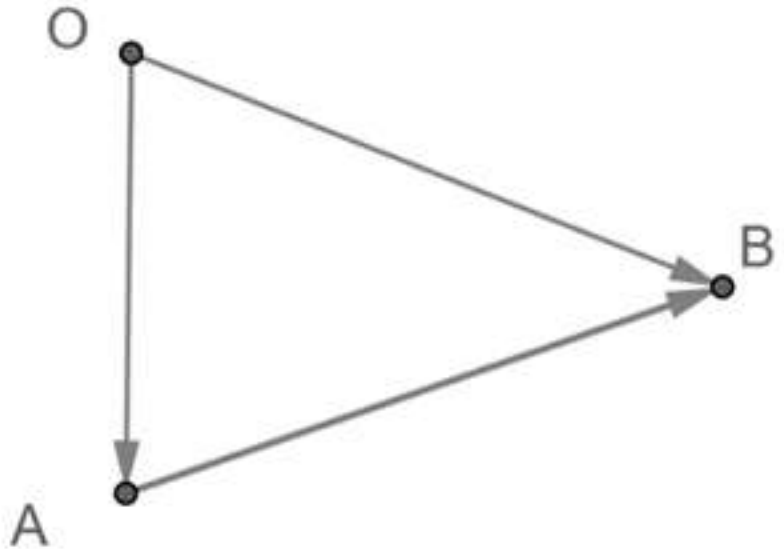


4. Τι είναι η διανυσματική ακτίνα ενός σημείου;

Διανυσματική ακτίνα ενός σημείου είναι το διάνυσμα που έχει αρχή ένα σταθερό σημείο O και πέρας το σημείο A .

Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής.

Δηλαδή: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$



5. Τι ισχύει για το μέτρο του αθροίσματος διανυσμάτων;

Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε:

$$\left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Θα ισχύει ότι:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad \text{όταν} \quad \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right| \quad \text{όταν} \quad \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$$



1. Αν γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{A\epsilon} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma\epsilon}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ συμπίπτουν.

Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία B, Γ συμπίπτουν αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{0} \text{ ή } \overrightarrow{\Gamma B} = \vec{0}$$

Παίρνουμε την αρχική σχέση $\overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{A\epsilon} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma\epsilon}$ και γράφουμε διαδοχικά:

$$\overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{A\epsilon} - \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\epsilon} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{A\epsilon} + \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\epsilon\Gamma} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{A\epsilon} + \overrightarrow{\epsilon\Gamma} = \vec{0}$$

Θυμόμαστε ότι όταν προσθέτουμε διανύσματα στα οποία το τέλος του ενός ταυτίζεται με την αρχή του άλλου μπορούμε να πάρουμε ένα νέο διάνυσμα με αρχή την αρχή του πρώτου και τέλος το τέλος του δεύτερου. Οπότε παίρνουμε:

$$\overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{0}$$

Δηλαδή τα σημεία B και Γ ταυτίζονται.

Αλλιώς, θα γράψουμε τα διανύσματα σε σχέση με ένα σημείο αναφοράς O και θα πάρουμε:

$$\overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\epsilon} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O\Delta} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\epsilon} - \overrightarrow{O\Gamma}$$

$$\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{O\Gamma}$$

Δηλαδή τα σημεία B και Γ ταυτίζονται.

2. Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{E\Gamma}$ να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του AB .

Παίρνουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} &= \overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{E\Gamma} \\ \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{E\Gamma} &= \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} \\ \overrightarrow{A\Gamma} &= \overrightarrow{\Gamma B}\end{aligned}$$

Οπότε το σημείο Γ είναι μέσο του AB .

3. Αν γνωρίζουμε ότι $|\vec{a}| = 5$ και $|\vec{\beta}| = 3$ να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|\vec{a} - \vec{\beta}|$

Γράφουμε $|\vec{a} - \vec{\beta}| = |\vec{a} + (-\vec{\beta})|$ και από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε:

$$||\vec{a}| - |-\vec{\beta}|| \leq |\vec{a} + (-\vec{\beta})| \leq |\vec{a}| + |-\vec{\beta}|$$

Όμως γνωρίζουμε ότι $|\vec{\beta}| = |-\vec{\beta}|$, οπότε έχουμε:

$$|5 - 3| \leq |\vec{a} + (-\vec{\beta})| \leq 5 + 3$$

Δηλαδή: $2 \leq |\vec{a} - \vec{\beta}| \leq 8$

4. Δίνονται τα ομόροπα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 12 \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$$

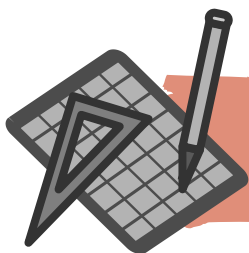
Να βρείτε τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$

Γνωρίζουμε ότι $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$ όταν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$, άρα παίρνουμε:

$$12 = |2|\vec{\beta}| - |\vec{\beta}||$$

$$12 = |\vec{\beta}| \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}| = 24$$





1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

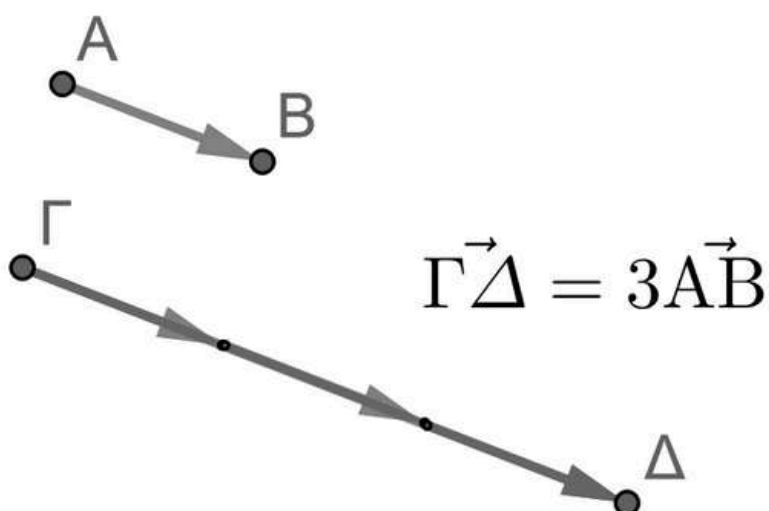


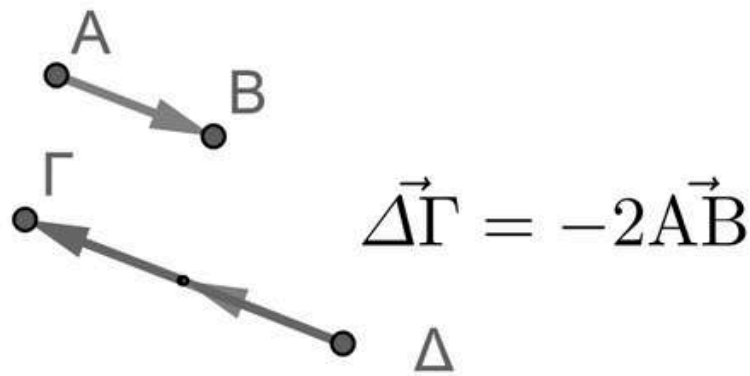
ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πώς ορίζεται ο πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα;

Αν ο λ είναι ένας πραγματικός μη μηδενικός αριθμός και $\vec{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα, ορίζουμε ως γινόμενο του λ με το $\vec{a}$, το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{a}$ με:

- $\lambda \cdot \vec{a}$ ομόροπο του $\vec{a}$ αν $\lambda > 0$
- $\lambda \cdot \vec{a}$ αντίροπο του $\vec{a}$ αν $\lambda < 0$
- αν $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$ τότε $\lambda \cdot \vec{a}$ μηδενικό διάνυσμα





2. Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα;

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

$$\lambda (\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$$

$$\lambda (\mu \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a}$$

$$\lambda \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$$

$$\lambda \vec{a} = \mu \vec{a} \text{ και } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ τότε } \lambda = \mu$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda \vec{\beta} \text{ και } \lambda \neq 0 \text{ τότε } \vec{a} = \vec{\beta}$$

3. Τι ονομάζουμε γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων;

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων είναι κάθε διάνυσμα $\vec{\gamma} = \kappa \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$ της μορφής όπου κ, λ πραγματικοί αριθμοί.

4. Συνθήκη Παραλληλίας

Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι διανύσματα με $\vec{\beta} \neq 0$ τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Ειδικά έχουμε:

$$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda > 0$$

$$\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda < 0$$

5. Πώς ορίζεται η διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος;

Για ένα διάνυσμα (ή ένα ευθύγραμμο τμήμα) $\overline{AB}$ με M μέσο και O ένα τυχαίο σημείο αναφοράς έχουμε:

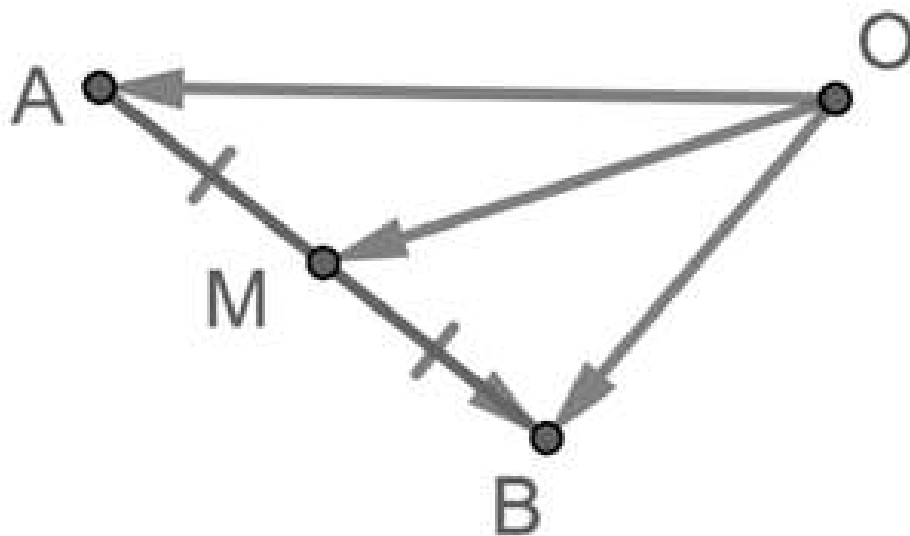
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$$

οπότε παίρνουμε:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$$

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$





1. Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίρροπα αν γνωρίζουμε ότι:

$$3\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{\Gamma E} + 2\overrightarrow{E\Delta} = 3\overrightarrow{EA} - 3\overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

Για να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα είναι παράλληλα αποδεικνύουμε ότι $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.
Αν $\lambda < 0$ τότε αντίρροπα.

Ξεκινάμε από τη σχέση που μας δίνει η άσκηση:

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{\Gamma E} + 2\overrightarrow{E\Delta} &= 3\overrightarrow{EA} - 3\overrightarrow{\Gamma\Delta} \\ 3\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{\Gamma E} + 2\overrightarrow{E\Delta} - 3\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{\Gamma\Delta} &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{\Gamma E} + 2\overrightarrow{E\Delta} + 3\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{\Gamma\Delta} &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{AE} + 3\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{\Gamma E} + 2\overrightarrow{E\Delta} + 3\overrightarrow{\Gamma\Delta} &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{\Gamma\Delta} + 3\overrightarrow{\Gamma\Delta} &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{\Gamma\Delta} &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{AB} &= -5\overrightarrow{\Gamma\Delta} \\ \overrightarrow{AB} &= -\frac{5}{3}\overrightarrow{\Gamma\Delta} \end{aligned}$$

Δηλαδή $\lambda = -\frac{5}{3} < 0$ και τα διανύσματα αντίρροπα.

2. Αν γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{B\Gamma} = 3\overrightarrow{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι A, B, Γ συνευθειακά. Τι μπορείτε να πείτε για την θέση των σημείων A, B, Γ;

Για να αποδείξουμε ότι 3 σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο από τα διανύσματα που ορίζουν αυτά τα σημεία είναι παράλληλα.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{B\Gamma} &= 3\overrightarrow{A\Gamma} \\ \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{B\Gamma} - 3\overrightarrow{A\Gamma} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{B\Gamma} + 3\overrightarrow{\Gamma A} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} + 2\overrightarrow{\Gamma A} &= \vec{0} \end{aligned}$$

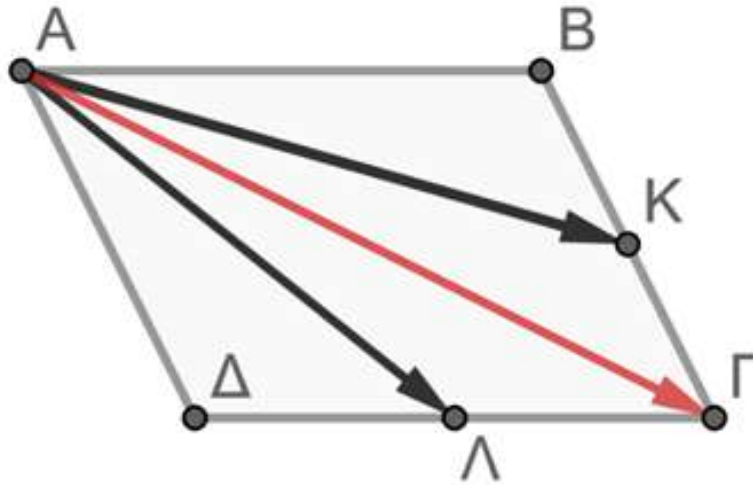
$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma}$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A\Gamma}$$

Άρα τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και μάλιστα σε σειρά B, A και Γ.

3. Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ δίνεται K μέσο της BΓ και Λ μέσο της ΓΔ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{A\Lambda} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$.



Για την διανυσματική ακτίνα του μέσου γνωρίζουμε ότι:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}}{2} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Lambda} = \frac{\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}}{2}$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο ισότητες έχουμε:

$$\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{A\Lambda} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}}{2} + \frac{\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}}{2}$$

$$2\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{A\Lambda} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}$$

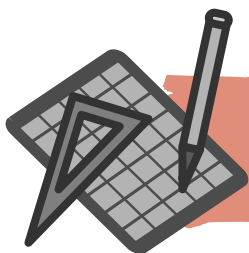
Θυμόμαστε πως στο παραλληλόγραμμο ABΓΔ, και παίρνουμε:

$$2\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{A\Lambda} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Gamma}$$

$$2\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{A\Lambda} = 3\overrightarrow{A\Gamma}$$

$$\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{A\Lambda} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$$





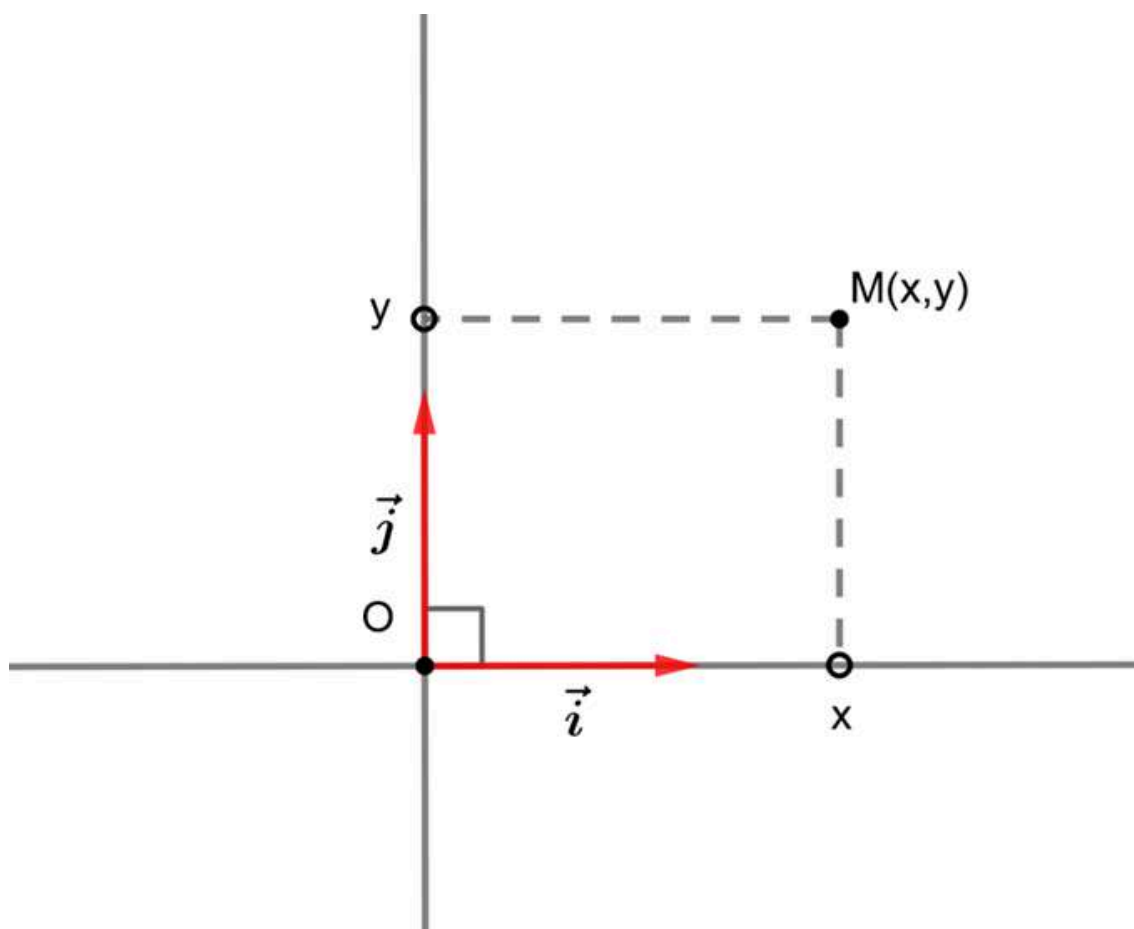
1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

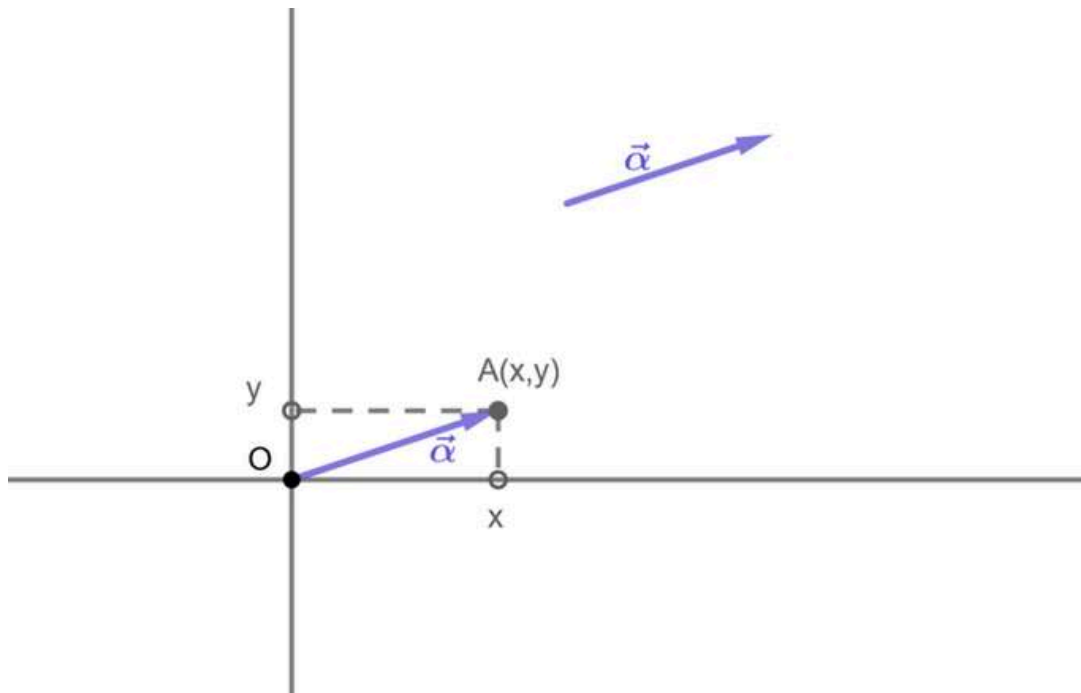
1. Τι γνωρίζετε για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$;

Τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$ είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα που έχουν σχεδιαστεί με κοινή αρχή το O σε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$. Όλο το επίπεδο που ορίζεται από αυτά τα δύο διανύσματα αποτελεί το καρτεσιανό επίπεδο με αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων. Κάθε σημείο M του επιπέδου έχει τετμημένη x και τεταγμένη y και γράφεται στη μορφή $M(x,y)$. Τα x,y είναι οι συντεταγμένες του σημείου.



2. Ποιες είναι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος στο επίπεδο;

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε ένα διάνυσμα $\vec{a}$. Με αρχή το Ο σχεδιάζουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Προκύπτει σημείο Α με συντεταγμένες (x,y), και αντίστοιχα για τις συντεταγμένες του διανύσματος έχουμε $\vec{a} = (x,y)$.



Για κάθε διάνυσμα του επιπέδου έχουμε ότι γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

3.

- Ένα διάνυσμα είναι το μηδενικό αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του είναι μηδέν, δηλαδή $\vec{a} = (x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
- Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες, δηλαδή για $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ έχουμε $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$
- Για τα βασικά διανύσματα έχουμε: $\vec{0} = (0, 0), \vec{i} = (1, 0), \vec{j} = (0, 1)$.

4. Ποιες είναι οι συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανυσμάτων;

Γενικά ισχύει:

- $\kappa \cdot \vec{a} = \kappa \cdot (x, y) = (\kappa x, \kappa y)$
- $\vec{a} + \vec{b} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

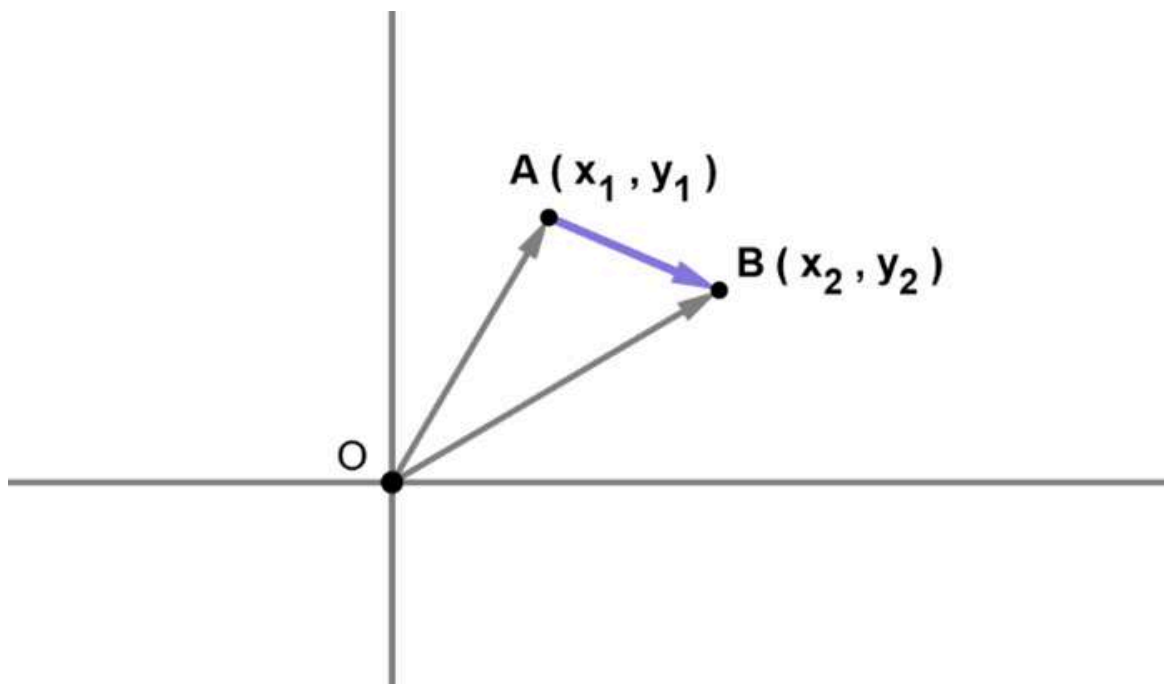
Για τον γραμμικό συνδυασμό $\kappa \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ παίρνουμε $\kappa \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} = (\kappa x_1 + \lambda x_2, \kappa y_1 + \lambda y_2)$.

5. Πώς βρίσκουμε συντεταγμένες ενός διαστήματος με γνωστά άκρα;

Για τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ παίρνουμε διάνυσμα $\vec{AB}$.

Είναι : $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Οπότε έχουμε $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

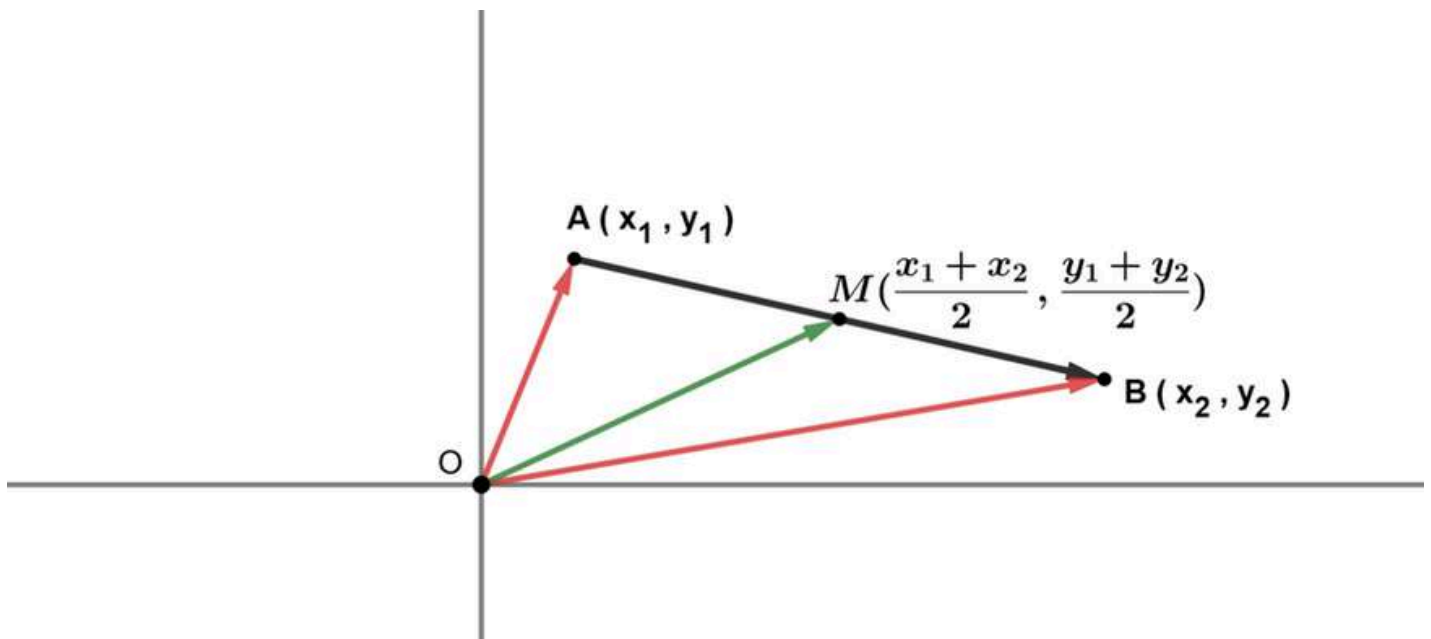


6. Πώς βρίσκουμε το μέτρο ενός διανύσματος όταν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του;

Για κάθε διάνυσμα $\vec{a}=(x,y)$ έχουμε $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$, $|\vec{0}|=0$.

7. Πώς βρίσκουμε συντεταγμένες μέσου ενός τμήματος;

Παίρνουμε $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ και $M(x,y)$ μέσο του AB . Γνωρίζουμε ότι $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ άρα $(x,y)=\frac{1}{2}[(x_1,y_1)+(x_2,y_2)]$. Οπότε για τις συντεταγμένες του μέσου παίρνουμε $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$.



8. Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

Για δύο διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ έχουμε:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 = 0$$

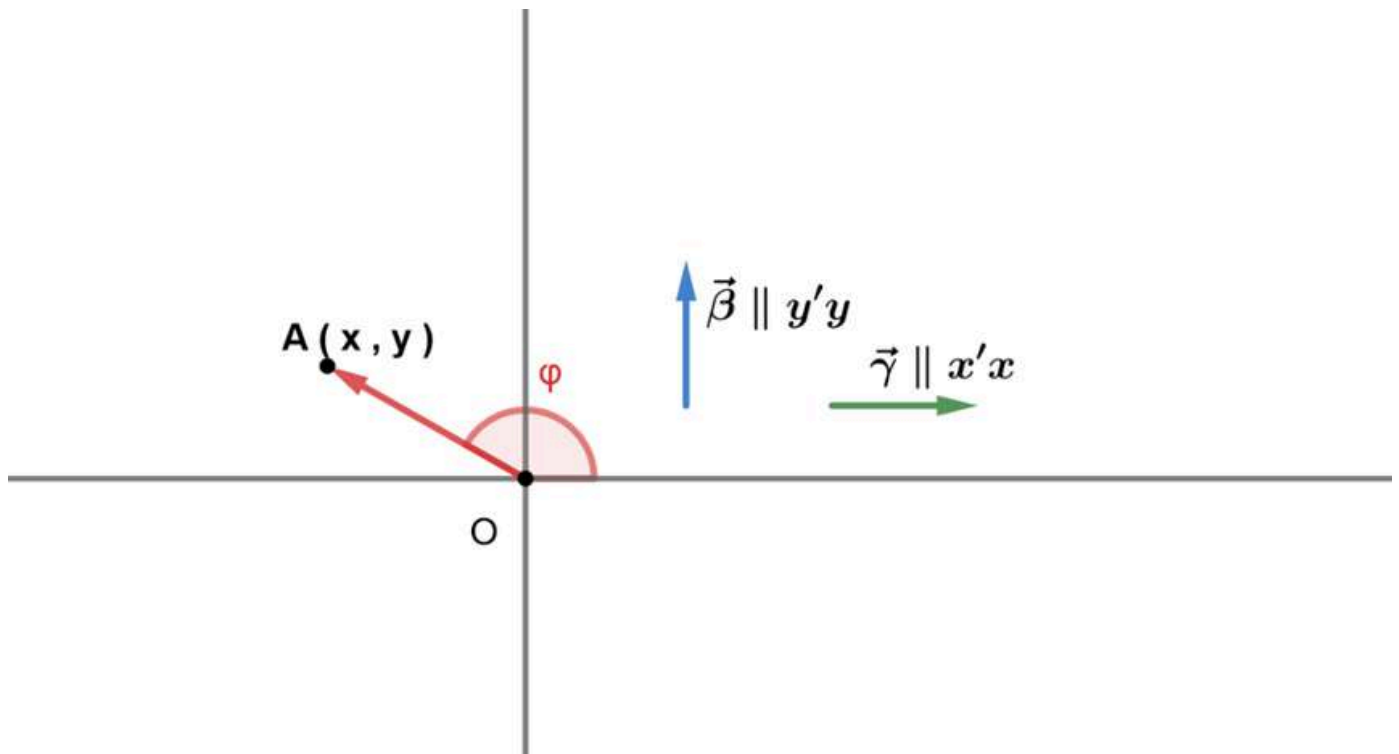
9. Τι ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης ενός διανύσματος;

Ο αριθμός $\lambda = \frac{y}{x} = \varepsilon \varphi \hat{\varphi}$ λέγεται συντελεστής διεύθυνσης ενός διανύσματος με συντεταγμένες $\vec{a} = (x, y)$ και $\hat{\varphi}$ τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα με τον άξονα x' .

Αν $x=0$, δηλαδή $\vec{a} \parallel y'y$, δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης.

Αν $y=0$, δηλαδή $\vec{a} \parallel x'x$, έχουμε $\lambda=0$.

Επίσης ισχύει $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_a = \lambda_b$





Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Υπάρχει αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε το $\vec{a} = (\lambda^2 - 9, \lambda^2 - 4\lambda + 3)$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα;

Για να έχουμε $\vec{a} = \vec{0}$ πρέπει $\vec{a} = (\lambda^2 - 9, \lambda^2 - 4\lambda + 3) = (0, 0)$.

Συνεπώς έχουμε:
$$\begin{cases} \lambda^2 - 9 = 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} (\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \\ (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -3 \\ \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 3 \end{cases}$$

Για να είναι ταυτόχρονα μηδέν και η τετμημένη και η τεταγμένη του διανύσματος πρέπει $\lambda = 3$.

Αν $\lambda = -3$ τότε παίρνουμε $\vec{a} \parallel \gamma'\gamma$ και αν $\lambda = 1$ παίρνουμε $\vec{a} \parallel \chi'\chi$.

2. Δίνονται τα σημεία $A(2,4)$ και $B(-1,3)$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου M για το οποίο έχουμε $\vec{AM} = 2\vec{BM}$;

Παίρνουμε σημείο $M(x,y)$ και έχουμε:

$$\vec{AM} = (x, y) - (2, 4) = (x - 2, y - 4)$$

$$\vec{BM} = (x, y) - (-1, 3) = (x + 1, y - 3)$$

Από τη σχέση $\vec{AM} = 2\vec{BM}$ έχουμε $(x - 2, y - 4) = 2(x + 1, y - 3)$

Παίρνουμε: $(x - 2, y - 4) = (2x + 2, 2y - 6) \begin{cases} x - 2 = 2x + 2 \\ y - 4 = 2y - 6 \end{cases} \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$

Συνεπώς το σημείο είναι $M(-4, 2)$.

3. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (7, 9)$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (1, 3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$

Γραμμικός συνδυασμός σημαίνει ότι το $\vec{\gamma}$ πρέπει να γραφεί στην μορφή $\vec{\gamma} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Οπότε έχουμε: $\vec{\gamma} = \kappa(1, 3) + \lambda(-2, -1) \Leftrightarrow (7, 9) = (\kappa, 3\kappa) + (-2\lambda, -\lambda) \Leftrightarrow (7, 9) = (\kappa - 2\lambda, 3\kappa - \lambda)$

$$\left. \begin{array}{l} \kappa - 2\lambda = 7 \\ 3\kappa - \lambda = 9 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \kappa - 2\lambda = 7 \\ 6\kappa - 2\lambda = 18 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \kappa - 2\lambda = 7 \\ 5\kappa = 11 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{11}{5} - 2\lambda = 7 \\ \kappa = \frac{11}{5} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lambda = -\frac{12}{5} \\ \kappa = \frac{11}{5} \end{array} \right\}$$

Οπότε παίρνουμε: $\vec{\gamma} = \frac{11}{5}\vec{\alpha} - \frac{12}{5}\vec{\beta}$.

4. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Για το διάνυσμα $\vec{a}$ παίρνουμε $\vec{a} = (3, -4)$ και έχουμε $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

5. Αν $A(2, -2)$ και $M(1, 4)$ το μέσο του AB , να βρείτε τις συντεταγμένες του B .

Για τις συντεταγμένες του M έχουμε ότι $(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$$\text{οπότε έχουμε: } (1, 4) = \left(\frac{2 + x_B}{2}, \frac{-2 + y_B}{2}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = \frac{2 + x_B}{2} \\ 4 = \frac{-2 + y_B}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 = 2 + x_B \\ 8 = -2 + y_B \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_B = 0 \\ y_B = 10 \end{array} \right.$$

Οπότε το σημείο B έχει συντεταγμένες $(0, 10)$.

6. Δίνονται τα σημεία $A(2,-3)$, $B(-1,4)$, $\Gamma(5,10)$. Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα.

Αρχικά θα βρούμε τα διανύσματα.

$$\overrightarrow{AB} = (-1-2, 4-(-3)) = (-3, 7) \text{ και } \overrightarrow{A\Gamma} = (5-2, 10-(-3)) = (3, 13).$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = -39 - 21 = -60 \neq 0.$$

Άρα τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα (δεν πληρείται η συνθήκη παραλληλίας).

7. Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(2,3)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(5,-1)$ ορίζουν ένα τρίγωνο.

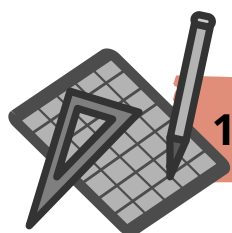
Για να ορίζουν τρίγωνο τα παραπάνω σημεία αρκεί να μην είναι συνευθειακά. Αρχικά θα βρούμε δύο διανύσματα που παράγονται από τα A, B, Γ .

Παίρνω $\overrightarrow{AB} = (-3, -2)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = (6, -2)$ και βρίσκω:

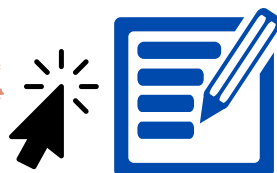
$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 12 = 18 \neq 0$$

άρα τα διανύσματα δεν είναι παράλληλα και μπορούν να αποτελέσουν κορυφές τριγώνου.





1.5 Εσωτερικό γινόμενο



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πώς ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$;

Για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο τον αριθμό $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, όπου $\widehat{\vec{a}, \vec{b}}$ η γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα.

Αν $\vec{a} = 0$ ή $\vec{b} = 0$, τότε ορίζουμε $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι πραγματικός αριθμός και μας δίνει πληροφορίες για την σχέση των διανυσμάτων.

2. Τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε από το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων;

Έχουμε ότι:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \text{ (αντιμεταθετική ιδιότητα)}$$

Αν $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ τότε $\vec{a} \perp \vec{b}$ και αντίστροφα.

Αν $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ τότε $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ (ομόρροπα διανύσματα) και αντίστροφα.

Αν $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ τότε $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ (αντίρροπα διανύσματα) και αντίστροφα.

$$\text{Ισχύει: } \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

3. Τι ισχύει για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{i}, \vec{j}$;

Θυμόμαστε ότι: $\vec{i} = (1, 0)$ και $\vec{j} = (0, 1)$ οπότε έχουμε ότι $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$,
άρα τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$ είναι κάθετα.

$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$: τα διανύσματα είναι μοναδιαία .

4. Πώς βρίσκουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες τους;

Για τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ έχουμε $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

5. Ποιες είναι οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου;

$$\lambda \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ (επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1, \text{ όπου } \lambda_1, \lambda_2 \text{ οι συντελεστές των διανυσμάτων } \vec{a} \text{ και } \vec{b}.$$

6. Απόδειξη: Αν $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, όπου λ_1, λ_2 οι συντελεστές των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$, με $\vec{a}, \vec{b} \nparallel y'y$

Υποθέτουμε ότι $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ και $\vec{a} \perp \vec{b}$, τότε:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 = -x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow \frac{y_1 \cdot y_2}{x_1 \cdot x_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{b}} = -1$$

7. Απόδειξη: Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ με $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, τότε

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Είναι $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

Επίσης $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$, $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, οπότε παίρνουμε:

$$\cos \theta = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$



Λυμένα Παραδείγματα



1. Αν ισχύει ότι $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ και $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \frac{2\pi}{3}$ να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$ και $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Έχουμε: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

Παίρνουμε: $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = (2\vec{a} + 4\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 4\vec{b}) = 4\vec{a} \cdot \vec{a} + 16\vec{a} \cdot \vec{b} + 16\vec{b} \cdot \vec{b} = 4$

$$|\vec{a}|^2 + 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 16|\vec{b}|^2 = 4 - 8 + 16 = 12$$

άρα $|\vec{u}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = 1 + 1 + 1 = 3 \text{ άρα } |\vec{v}| = \sqrt{3}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{a} + 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 4\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 4|\vec{b}|^2 = 2 - 1 - 4 = -3$$

Για την γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{U}$ και $\vec{V}$ παίρνουμε:

$$\cos\theta = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{|\vec{U}| |\vec{V}|} = \frac{-3}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Άρα τα διανύσματα $\vec{U}$ και $\vec{V}$ σχηματίζουν γωνία θ με $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, άρα $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

2. Βασισμένο στην άσκηση 14586 από την τράπεζα θεμάτων. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,4)$, $\Gamma(5,-2)$.

Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να εξετάσετε τη γωνία που σχηματίζουν.

Για να βρούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ παίρνω $\overrightarrow{AB} = (3-1, 4-2) = (2, 2)$ και

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (5-1, -2-2) = (4, -4).$$

Για να βρω τη γωνία των διανυσμάτων θα βρω το εσωτερικό γινόμενο

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) = 8 - 8 = 0.$$

Αφού τα διανύσματα **έχουν εσωτερικό γινόμενο μηδέν**, και δεν είναι τα μηδενικά διανύσματα, θα **είναι κάθετα μεταξύ τους**, άρα θα σχηματίζουν ορθή γωνία.

3. Δίνονται διανύσματα $\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ και $\vec{v} = (\alpha - \beta)\vec{i} + (\alpha + \beta)\vec{j}$.

Τι ισχύει για τα α , β αν για τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ γνωρίζουμε ότι είναι παράλληλα;

Μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Για το $\vec{u}$ έχουμε $\vec{u} = \alpha(1,0) + \beta(0,1) = (\alpha,0) + (0,\beta) = (\alpha,\beta)$.

Για το $\vec{v}$ έχουμε $\vec{v} = (\alpha-\beta)(1,0) + (\alpha+\beta)(0,1) = (\alpha-\beta,0) + (0,\alpha+\beta) = (\alpha-\beta, \alpha+\beta)$.

Αφού τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι παράλληλα, πρέπει η ορίζουσα να είναι μηδέν, οπότε παίρνουμε:

$$\det(\vec{u}, \vec{v})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha - \beta & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \alpha(\alpha + \beta) - \beta(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta - \alpha\beta + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \beta = 0$$

4. Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ έχουμε διάνυσμα $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 5$ και $|\vec{a}| = \sqrt{7}$. Επίσης έχουμε τη σχέση $2\vec{\beta} + \sqrt{3}\vec{\gamma} = 5\vec{a}$. Ποια είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$;

Έχουμε σχέση με διανύσματα και ξέρουμε τα μέτρα των διανυσμάτων, οπότε θα ξεκινήσουμε από τη σχέση και θα την υψώσουμε στο τετράγωνο. Αυτό γιατί γνωρίζουμε ότι $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$.

$$2\vec{\beta} + \sqrt{3}\vec{\gamma} = 5\vec{a}$$

$$(2\vec{\beta} + \sqrt{3}\vec{\gamma})^2 = (5\vec{a})^2$$

$$4\vec{\beta}^2 + 2\sqrt{3}\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + 3\vec{\gamma}^2 = 25\vec{a}^2$$

$$4 \cdot 25 - 2\sqrt{3}\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + 3 \cdot 25 = 25 \cdot 7$$

$$100 - 2\sqrt{3}\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + 75 = 175$$

$$175 - 2\sqrt{3}\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 175$$

$$2\sqrt{3}\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 0$$

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 0$$

Οπότε βρήκαμε ότι τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ έχουν εσωτερικό γινόμενο 0. Επειδή κανένα από τα δύο διανύσματα δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα (έχουν μέτρο διάφορο του μηδενός), συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

Άρα τα διανύσματα σχηματίζουν γωνία 90° .

5. Βασισμένο στο θέμα 18547 από Τράπεζα Θεμάτων.

Δίνονται τα σημεία $A(0, -1)$, $B(\lambda, 1)$ και $\Gamma(\lambda-2, \lambda-3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε :

ΑΒΓ τρίγωνο με $\angle A = 90^\circ$.

β) Για $\lambda = -2$, να βρείτε:

Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

3 σημεία Α,Β,Γ ορίζουν τρίγωνο όταν δεν είναι συνευθειακά. Συνεπώς θα βρούμε τις τιμές του λ για τα τις οποίες τα σημεία είναι συνευθειακά και θα τις απορρίψουμε.

Παίρνουμε $\overrightarrow{AB} = (\lambda, 2)$ και $\overrightarrow{AG} = (\lambda-2, \lambda-2)$.

Για να είναι συνευθειακά τα Α,Β,Γ αρκεί να είναι παράλληλα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ (έχουν ήδη κοινό σημείο το Α).

Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα των διανυσμάτων. Παίρνουμε:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2) = 2(\lambda-2) \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Συνεπώς τα σημεία είναι συνευθειακά για $\lambda=2$, οπότε για $\lambda \neq 2$ τα σημεία ορίζουν τρίγωνο. Για να είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\angle A = 90^\circ$ πρέπει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AG}$ να είναι μηδέν.

$$(\lambda, 2)(\lambda-2, \lambda-2) = 0$$

$$\lambda(\lambda-2) = -2(\lambda-2), \lambda \neq 2$$

$$\text{άρα } \lambda = -2.$$

Για να βρούμε το εμβαδόν του τριγώνου αρκεί να γνωρίζουμε το μήκος των δύο κάθετων πλευρών ΑΒ και ΑΓ, δηλαδή αρκεί να βρούμε το μέτρο των αντίστοιχων διανυσμάτων, με συντεταγμένες $(-2, 2)$ και $(-4, -4)$.

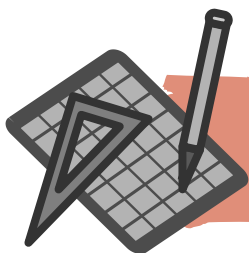
$$\text{Βρίσκουμε } \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ και}$$

$$\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{Για το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε: } \frac{2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

2

η ευθεία στο επίπεδο



2.1 Η ευθεία στο επίπεδο



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πότε μια εξίσωση με δύο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση γραμμής;

Μια εξίσωση λέγεται εξίσωση γραμμής αν και μόνο αν οι συντεταγμένες των σημείων της την επαληθεύουν.

Π.χ. Όλα τα σημεία της μορφής $A(x, 2x)$ επαληθεύουν την εξίσωση $y=2x$.

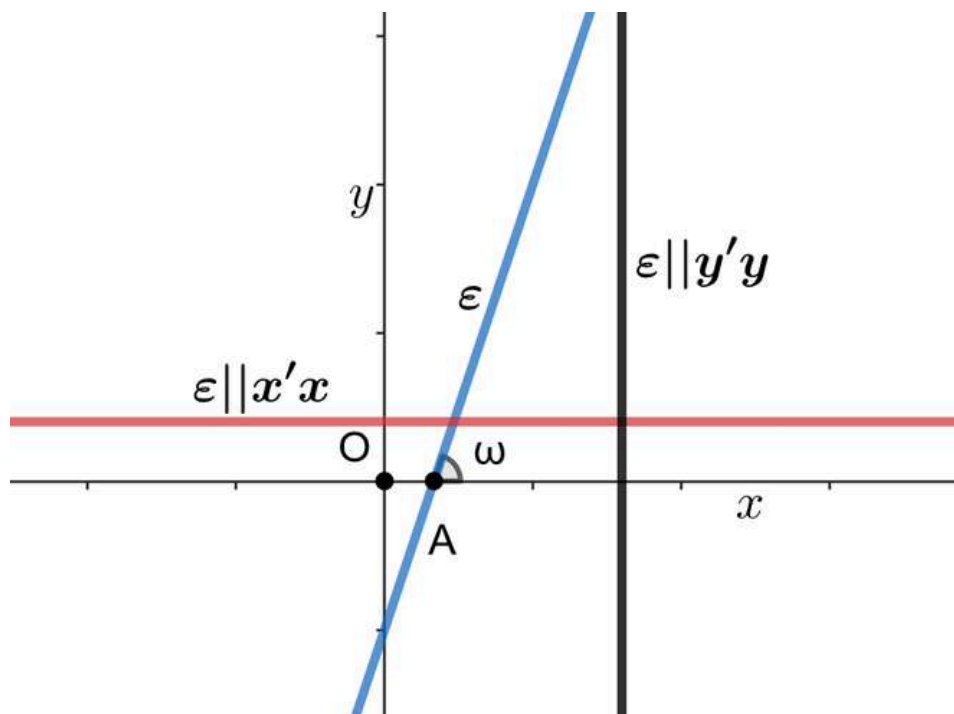
2. Ποια γωνία σχηματίζει μια ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ και τι τιμές παίρνει;

Υποθέτουμε ότι μια ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο A . Η γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το A μέχρι να συμπίψει με την ε είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

Προκύπτει ότι:

- Αν $\varepsilon \parallel x'x$ τότε $\hat{\omega} = 0^\circ$
- Αν $\varepsilon \parallel y'y$ τότε $\hat{\omega} = 90^\circ$

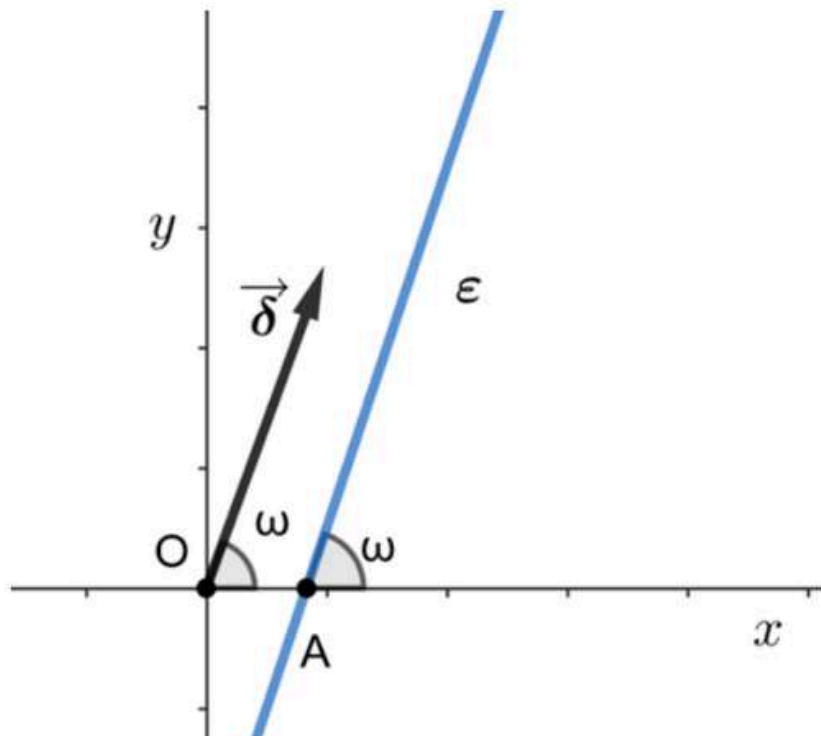
Γενικά για την γωνία ω θα ισχύει: $0 \leq \hat{\omega} \leq 180^\circ$



3. Τι ονομάζεται συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας ϵ ;

Συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ϵ ονομάζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ϵ με τον άξονα $x'x$. Συμβολίζουμε την κλίση με λ και παίρνουμε $\lambda = \epsilon \phi \omega$.

Όταν μια ευθεία ϵ είναι παράλληλη σε ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ τότε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.



4. Πώς ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία $A(x_0, y_0)$ και $B(x_1, y_1)$;

Αν η ευθεία δεν είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι ίδιος με τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overline{AB}$, δηλαδή $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Αν η ευθεία είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δηλαδή παράλληλη στον άξονα $y'y$, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης.

5. Πότε δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 είναι παράλληλες;

Δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες αν ισχύει $\lambda_1 = \lambda_2$ δηλαδή έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

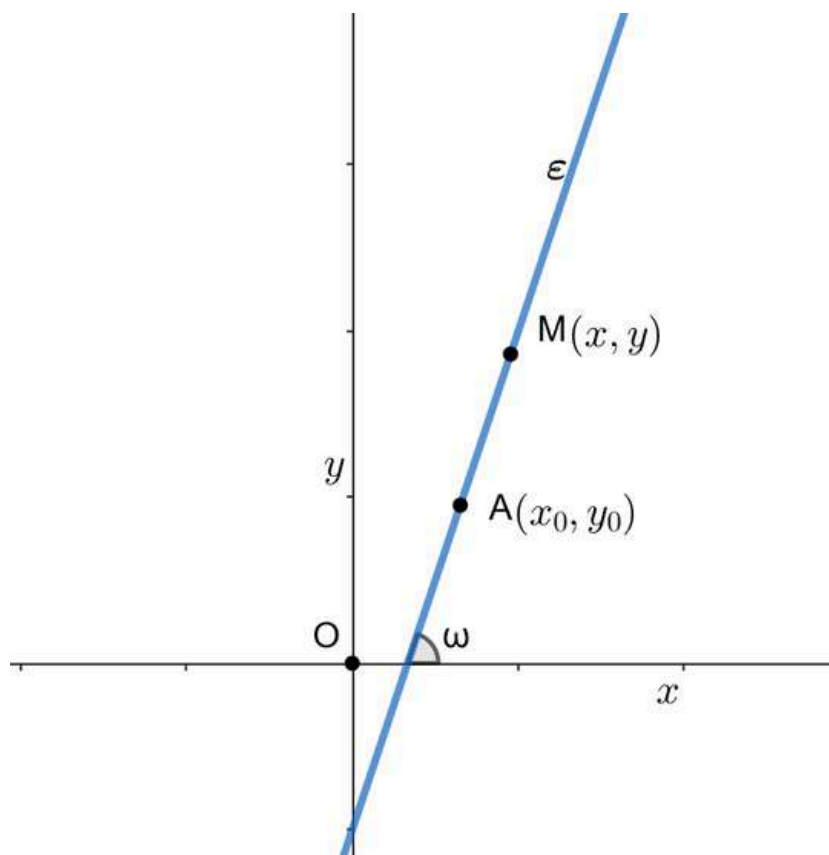
6. Πότε δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 είναι κάθετες μεταξύ τους;

Δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κάθετες αν ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, δηλαδή αν το γινόμενο από τους συντελεστές διεύθυνσης είναι -1.

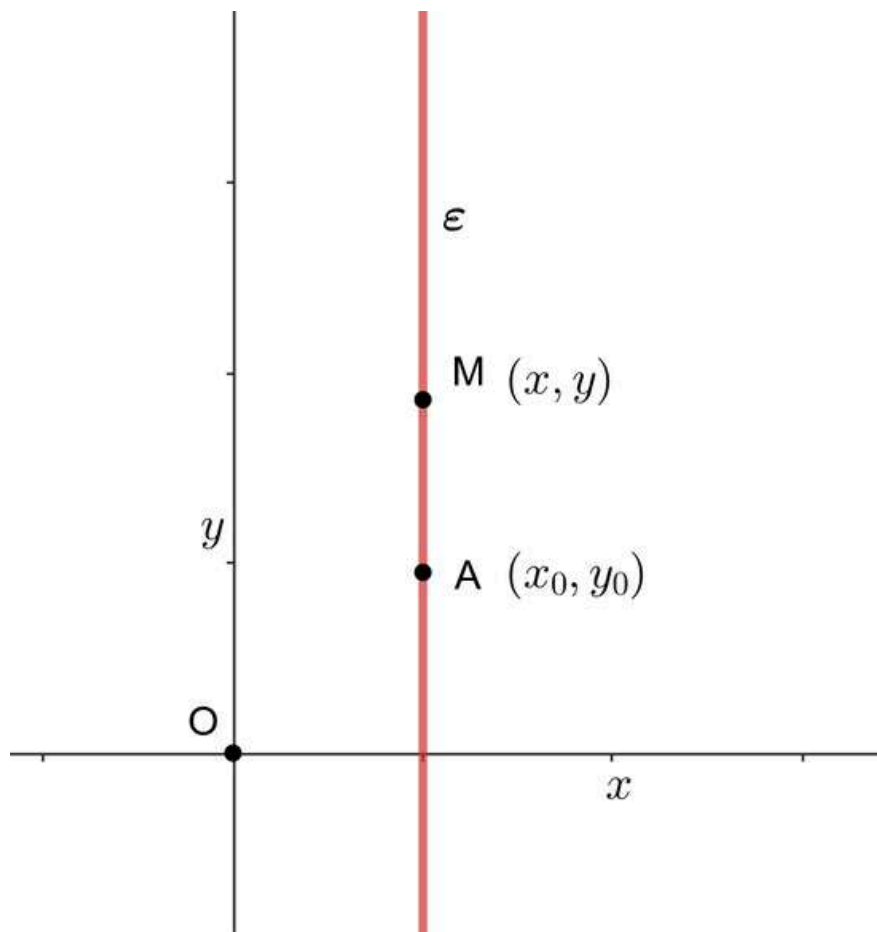
7. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ ;

Η ευθεία θα έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Αν θεωρήσουμε ένα σημείο $M(x, y)$ της ευθείας παίρνουμε διάνυσμα $\overline{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ και επειδή $\lambda_{\overline{AM}} = \lambda_\varepsilon$ θα έχουμε $\lambda_\varepsilon = \lambda = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.



Η ευθεία που είναι κατακόρυφη (άρα παράλληλη στον άξονα x') και διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ θα έχει εξίσωση $x=x_0$.



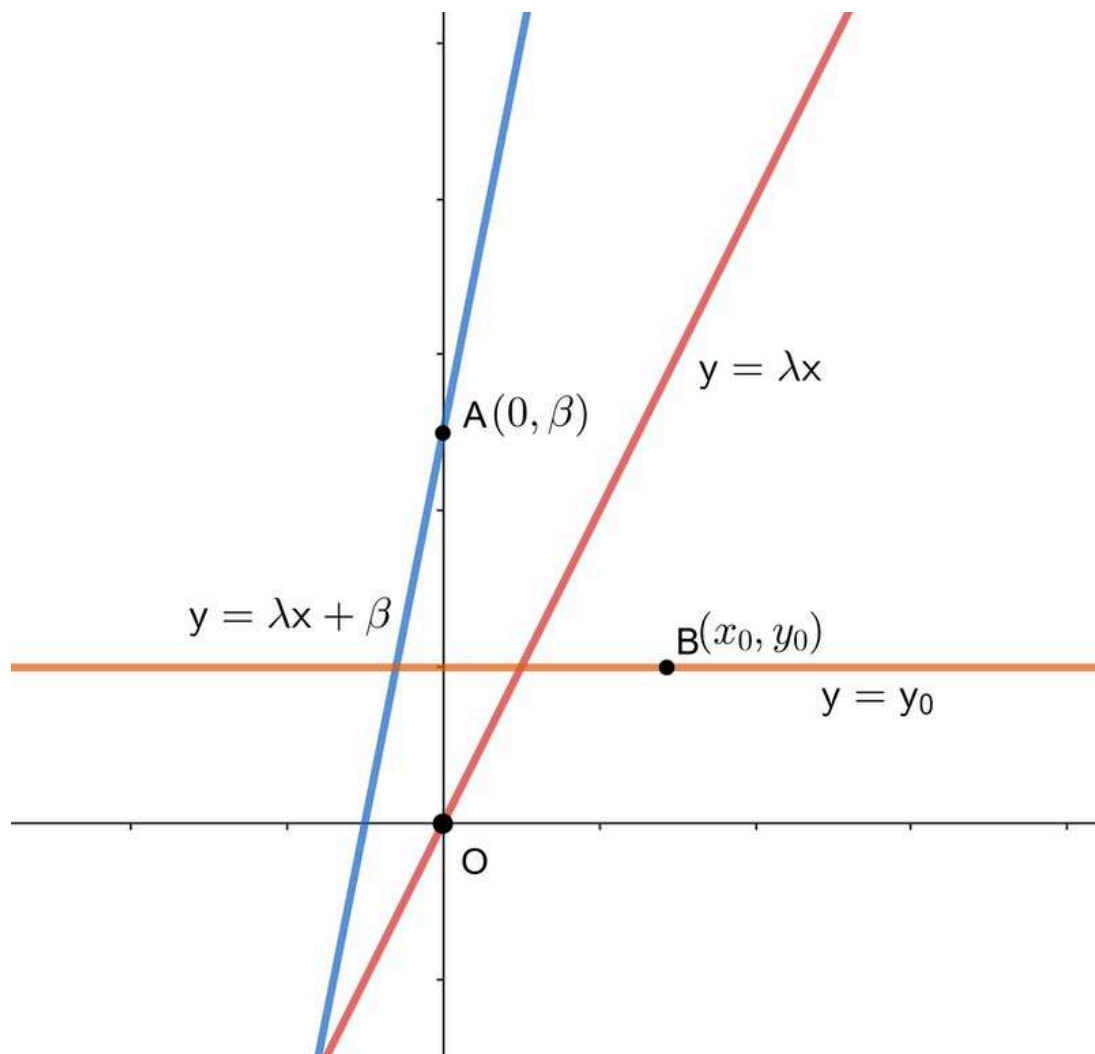
8. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και:

- i. Διέρχεται από σημείο $A(0, \beta)$**
- ii. Διέρχεται από την αρχή των αξόνων;**
- iii. Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$**

Η εξίσωση κάθε ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης λ είναι: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

Οπότε παίρνουμε:

- i.** Για το σημείο $A(0, \beta)$: $y - \beta = \lambda(x - 0) \Leftrightarrow y = \lambda x + \beta$.
- ii.** Διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα από το σημείο $O(0, 0)$ οπότε $y - 0 = \lambda(x - 0) \Leftrightarrow y = \lambda x$.
- iii.** Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, άρα σχηματίζει γωνία $\hat{\omega} = 0^\circ \Leftrightarrow \lambda = 0$ οπότε έχουμε $y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = 0(x - x_0) \Leftrightarrow y = y_0$.



9. Ποιες είναι οι εξισώσεις των ευθειών - διχοτόμων των γωνιών των αξόνων;

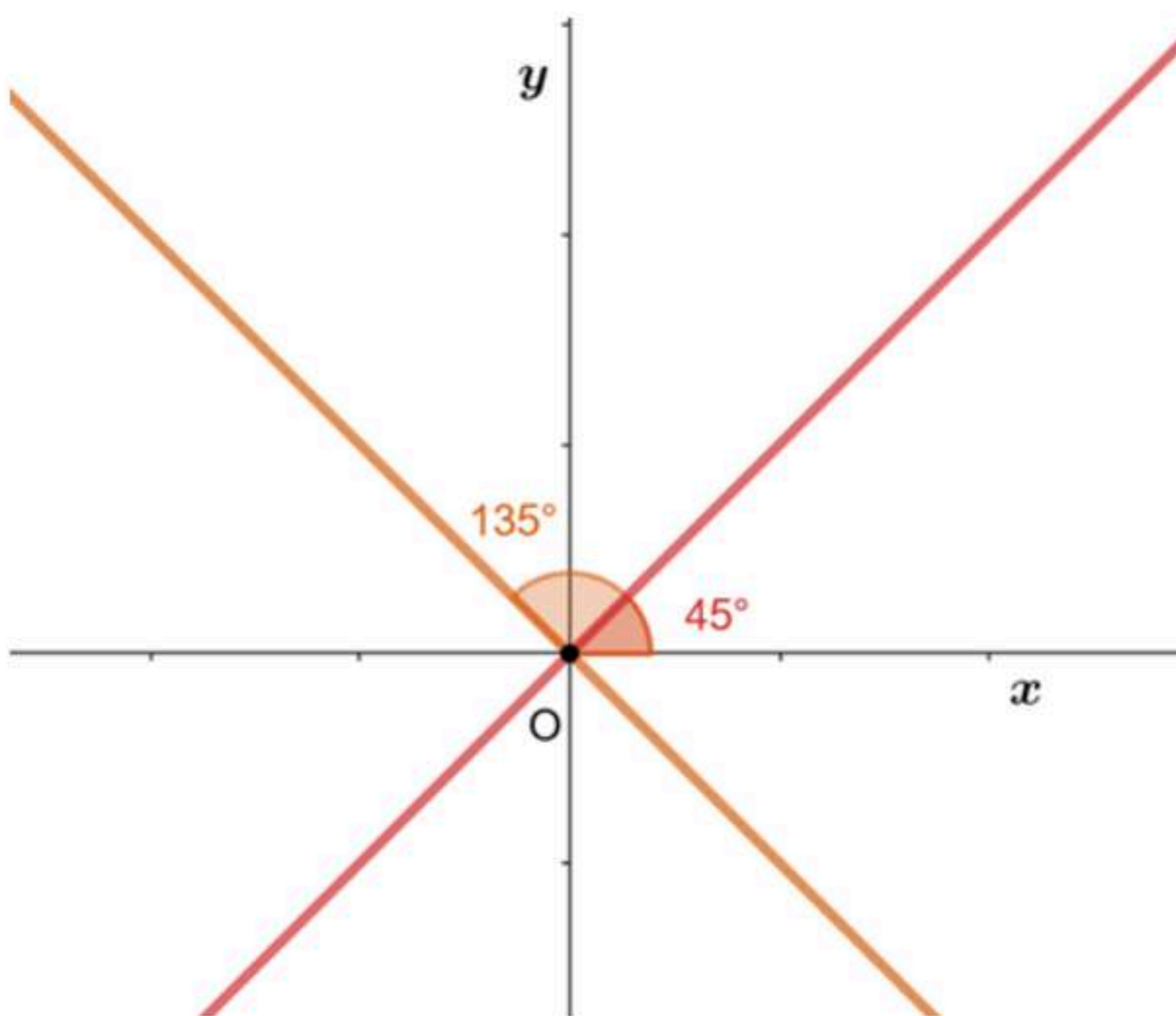
Αφού οι διχοτόμοι διέρχονται από την αρχή των αξόνων, θα έχουν μορφή $y=\lambda x$.

Αφού είναι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων θα σχηματίζουν γωνίες

$\hat{\omega} = 45^\circ$ ή $\hat{\omega} = 135^\circ$ με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$ αντίστοιχα.

Οπότε θα έχουμε: $\delta_1 : y = x$

$\delta_2 : y = -x$





1. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A(2,4) και B(-1,3);

Ξέρουμε ότι η εξίσωση της ευθείας είναι: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

$$\text{Για να βρούμε το } \lambda \text{ παίρνουμε } \lambda = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 4}{-1 - 2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Οπότε πλέον έχουμε: $y - y_0 = \frac{1}{3}(x - x_0)$, και για $(x_0, y_0) = (2, 4)$:

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$y - 4 = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

2. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από σημείο K(2,-4) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -4$;

Ξέρουμε ότι η εξίσωση της ευθείας είναι: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

Κάνουμε αντικατάσταση για $\lambda = -4$ και $(x_0, y_0) = (2, -4)$ οπότε πλέον έχουμε:

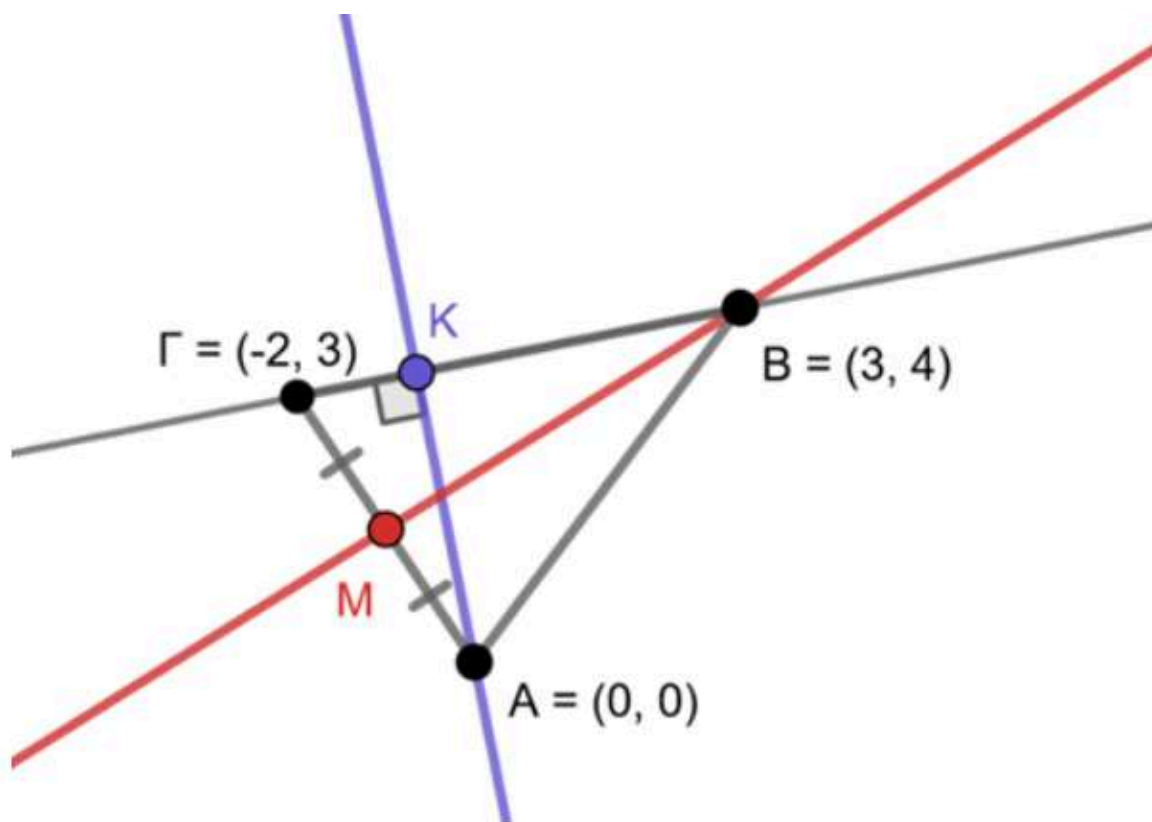
$$y - (-4) = -4(x - 2)$$

$$y + 4 = -4x + 8$$

$$y = -4x + 4$$

3. Θεωρούμε τρίγωνο με κορυφές $A(0,0)$ $B(3,4)$ και $\Gamma(-2,3)$. Να βρείτε:

- i. Την εξίσωση της ευθείας της πλευράς του $B\Gamma$
- ii. Την εξίσωση της ευθείας του ύψους AK
- iii. Την εξίσωση της διαμέσου BM



i. Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας αρκεί να βρούμε τον συντελεστή διεύθυνσης και ένα σημείο.

Σημείο έχουμε το Β (ή και το Γ).

Για τον συντελεστή διεύθυνσης λ θα πάρουμε $\lambda = \frac{y_B - y_\Gamma}{x_B - x_\Gamma} = \frac{4 - 3}{3 - (-2)} = \frac{1}{5}$

Οπότε έχουμε: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

$$y - 4 = \frac{1}{5}(x - 3)$$

ii. Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας αρκεί να σκεφτούμε ότι διέρχεται από το σημείο $A(0,0)$, άρα από την αρχή των αξόνων συνεπώς θα έχει την μορφή $y = \lambda x$,

Για να βρούμε το λ θα σκεφτούμε ότι το ύψος ΑΚ είναι κάθετο στην ευθεία της πλευράς ΒΓ.

Συνεπώς θα ισχύει ότι $\lambda_{AK} \cdot \lambda_{BG} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AK} \cdot \frac{1}{5} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AK} = -5$.

Η εξίσωση του ύψους θα είναι $y = -5x$.

iii. Για να βρούμε την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ χρειαζόμαστε ένα σημείο (το Β) και τον συντελεστή διεύθυνσης λ . Για να βρούμε τον συντελεστή διεύθυνσης χρειαζόμαστε ένα ακόμη σημείο. Μπορούμε να βρούμε το σημείο Μ, αφού ΒΜ διάμεσος, το Μ θα είναι μέσο του ΑΓ, οπότε $M(\frac{x_A + x_\Gamma}{2}, \frac{y_A + y_\Gamma}{2}) = M(\frac{0 + (-2)}{2}, \frac{0 + 3}{2}) = M(-1, \frac{3}{2})$

Πλέον μπορούμε να βρούμε τον συντελεστή διεύθυνσης από τον γνωστό τύπο με

$$\lambda = \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M} = \frac{4 - (-1)}{3 - \frac{3}{2}} = \frac{5}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{3}$$

Οπότε για την ευθεία έχουμε:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{10}{3}(x - 3)$$

4. Οι πλευρές AB και AD ενός παραλληλογράμμου ABΓΔ έχουν εξισώσεις

$y = -\frac{1}{2}x$ και $y = 2x + 3$.

Τι είδους παραλληλόγραμμο περιγράφει η άσκηση;

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;

Παρατηρούμε ότι οι ευθείες των δύο πλευρών $y = -\frac{1}{2}x$ και $y = 2x + 3$ έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ και $\lambda_2 = 2$

Οπότε έχουμε $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$, συνεπώς οι ευθείες είναι κάθετες και το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου Α αρκεί να βρούμε το σημείο τομής των ευθειών των πλευρών AB και AD.

Θα λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x \\ y = 2x + 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x = 2x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -x = 4x + 6 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -5x = 6 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{6}{5} \\ y = -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{6}{5}) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{6}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{array} \right.$$

Οπότε το σημείο Α έχει συντεταγμένες $(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5})$

5. Βασισμένο στο θέμα 14970 από Τράπεζα Θεμάτων

Δίνεται η ευθεία $y=\lambda(x-2)+\lambda-2$.

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda=1$ και όταν $\lambda=2$ και το κοινό τους σημείο Μ.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $y=\lambda(x-2)+\lambda-2$ για τις διάφορες τιμές του λ , διέρχονται από το Μ.

γ) Να βρείτε:

i. τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας $y=\lambda(x-2)+\lambda-2$ με τους άξονες x' και y' .

ii. για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

Για $\lambda=1$ παίρνουμε: $y = 1(x - 2) + 1 - 2 \Leftrightarrow y = x - 3$

Για $\lambda=2$ παίρνουμε: $y = 2(x - 2) + 2 - 2 \Leftrightarrow y = 2x - 4$

Το κοινό σημείο Μ προκύπτει αν λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{array}{l} y = x - 3 \\ y = 2x - 4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - 3 = 2x - 4 \\ y = x - 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \end{array}$$

Οπότε το κοινό σημείο είναι Μ(1,-2).

Η γενική μορφή της εξίσωσης της ευθείας είναι $y=\lambda(x-2)+\lambda-2$.

Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι για $\lambda=1$ και $\lambda=2$ το κοινό σημείο είναι το Μ(1,-2). Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου Μ στην ευθεία και παίρνουμε:

$$-2 = \lambda(1 - 2) + \lambda - 2 \Leftrightarrow -2 = -\lambda + \lambda - 2 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Συνεπώς βρήκαμε ότι το σημείο $M(1,-2)$ επιβεβαιώνει την εξίσωση της ευθείας ανεξάρτητα από τις τιμές του λ , συνεπώς όλες οι ευθείες της μορφής $y=\lambda(x-2)+\lambda-2$ διέρχονται από το σημείο M .

Για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας $y=\lambda(x-2)+\lambda-2$ με τους άξονες:

Το σημείο τομής με τον άξονα x' είναι το σημείο A με συντεταγμένες $A(x,0)$.

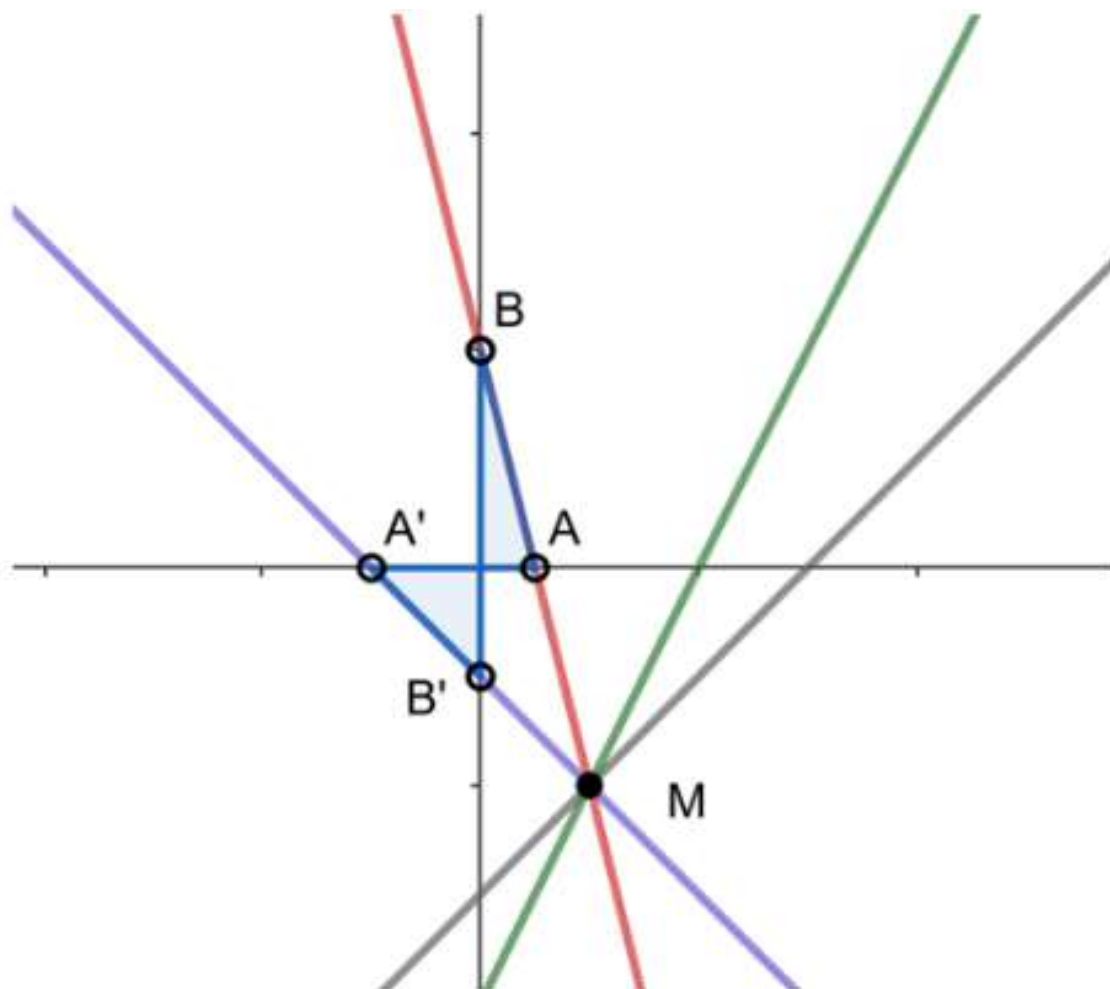
Οπότε έχουμε: $0 = \lambda(x - 2) + \lambda - 2 \Leftrightarrow 0 = \lambda x - 2\lambda + \lambda - 2 \Leftrightarrow x = \frac{\lambda + 2}{\lambda}$.

Δηλαδή παίρνουμε το σημείο $A(\frac{\lambda + 2}{\lambda}, 0)$.

Το σημείο τομής με τον άξονα y' είναι το σημείο B με συντεταγμένες $B(0,y)$.

Οπότε έχουμε: $y = \lambda(0 - 2) + \lambda - 2 \Leftrightarrow y = -2\lambda + \lambda - 2 \Leftrightarrow y = -\lambda - 2$.

Δηλαδή παίρνουμε το σημείο $B(0,-\lambda-2)$.



Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν αρκεί να πάρουμε

$$\frac{(OA)(OB)}{2} = \frac{\left| \frac{\lambda+2}{\lambda} \right| \cdot |-\lambda-2|}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |-(\lambda+2)^2| = |\lambda|$$
$$(\lambda+2)^2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \text{αδύνατο}$$
$$(\lambda+2)^2 = -\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = -\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -4 \text{ ή } \lambda_2 = -1$$

Συνεπώς το εμβαδόν γίνεται $\frac{1}{2}$ όταν $\lambda = -4$ ή $\lambda = -1$.

6. Δίνονται τα σημεία A(1,2) και B(3,4). Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A,B και την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας αρχικά θα υπολογίσουμε τον συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) της ευθείας.

$$\lambda = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4 - 2}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Από την εξίσωση της ευθείας έχουμε: $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ και για $(x_0, y_0) = (x_A, y_A) = (1, 2)$

Παίρνουμε:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 1(x - 1)$$
$$y - 2 = x - 1 \Leftrightarrow y = x + 1$$

Άρα η εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία A, B είναι $y = x + 1$

Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας της μεσοκαθέτου αρκεί να σκεφτούμε ότι είναι κάθετη στην ευθεία AB και περνάει από το μέσο του AB.

Αφού η μεσοκάθετος είναι κάθετη στην AB θα ισχύει $\lambda_{\text{μεσ}} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_{\text{μεσ}} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\text{μεσ}} = -1$.

Αρκεί να βρούμε το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Από τον γνωστό τύπο έχουμε $M = (\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}) = (\frac{1+3}{2}, \frac{2+4}{2}) = (2, 3)$.

Τελικά για την εξίσωση της μεσοκαθέτου έχουμε:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -1(x - 2) \\ y - 3 &= -x + 2 \Leftrightarrow y = x + 5 \end{aligned}$$

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(5,3), Β(-1,6) και Γ(4,1). Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στη πλευρά ΑΜ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ και την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο Μ.

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 5, 6 - 3) = (-6, 3)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(-6, 3) = (-2, 1)$$

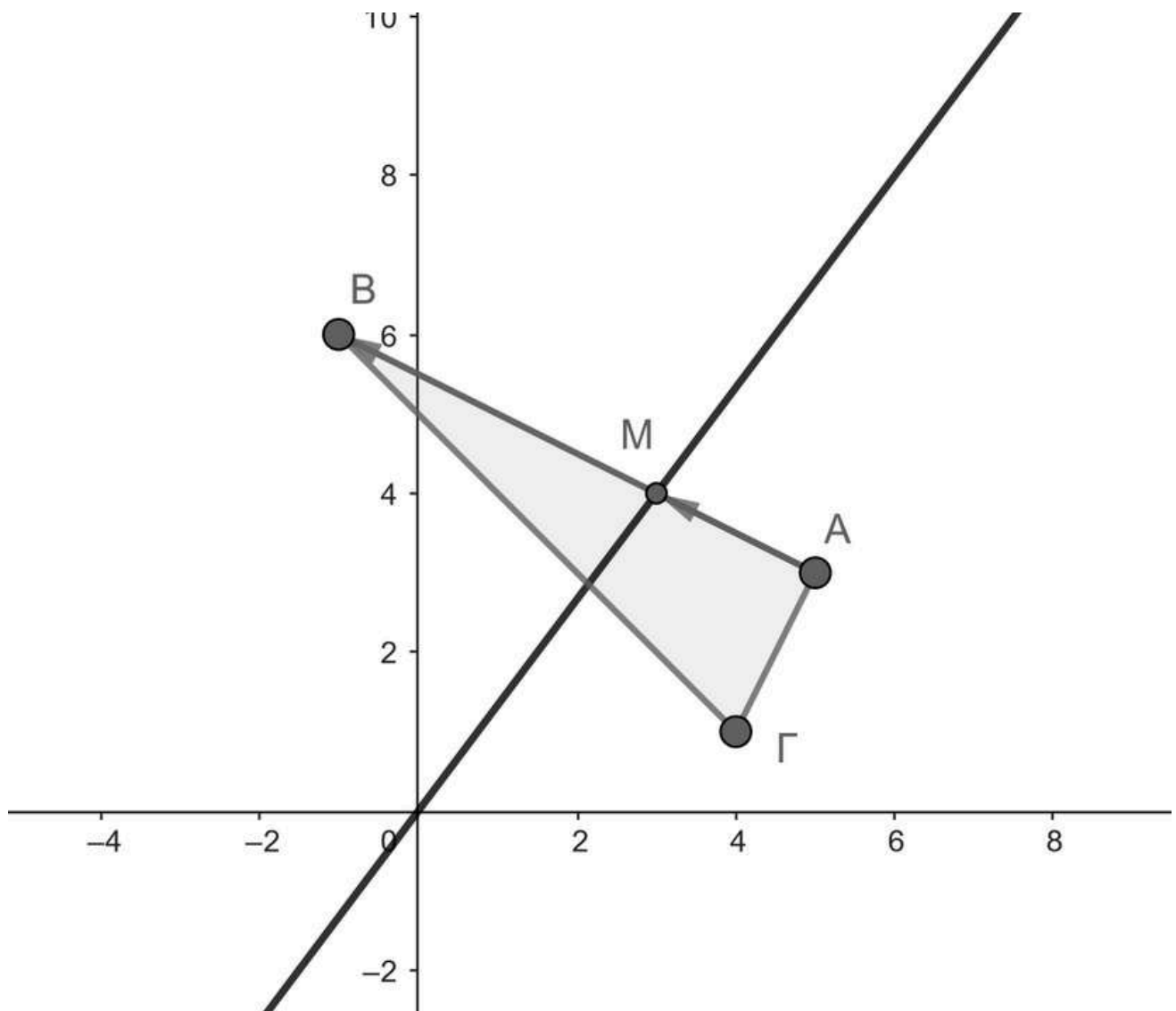
Για το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ έχουμε:

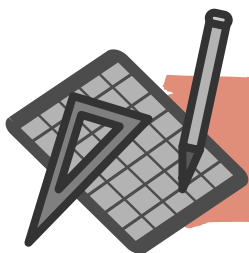
$$\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A, y_M - y_A) \Leftrightarrow (-2, 1) = (x_M - 5, y_M - 3) \Leftrightarrow (x_M, y_M) = (3, 4)$$

Συνεπώς το σημείο Μ είναι το σημείο Μ(3,4).

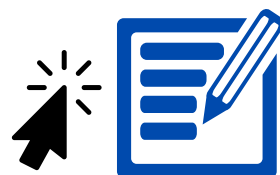
Η εξίσωση της ευθείας, αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων, θα έχει τη μορφή $y = \lambda x$, και επειδή το σημείο Μ(3,4) ανήκει στην ευθεία θα έχουμε $4 = \lambda \cdot 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$.

Άρα η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο Μ είναι η ευθεία $y = \frac{4}{3}x$.





2.2 Γενική Μορφή Εξίσωσης Ευθείας



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής:

$Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ και αντιστρόφως κάθε εξίσωση τέτοιας μορφής παριστάνει ευθεία γραμμή.

Κλίση ευθείας:

Αν $B \neq 0$ τότε η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ έχει κλίση $\lambda = -\frac{A}{B}$.

Αν η ευθεία έχει $B=0$, τότε είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ και σχηματίζει ορθή γωνία με τον άξονα $x'x$.

Σχέση ευθείας με διάνυσμα:

Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.

Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

Παρατηρούμε ότι $\vec{\delta} \cdot \vec{\eta} = (B, -A) \cdot (A, B) = A \cdot B - A \cdot B = 0$, πράγματι τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.



1. Δίνεται η εξίσωση $(a^2 + a - 2) \cdot x + (2a^2 + a - 3) \cdot y + a^2 - 3a + 2 = 0$.

Να βρείτε:

- για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία,
- ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία και ένα διάνυσμα κάθετο,
- την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$,
- την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$,
- την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία να είναι κάθετη στην ευθεία $y=x$.

α. Για να παριστάνει η εξίσωση ευθεία αρκεί $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ δηλαδή $a^2 + a - 2 \neq 0$ ή $2a^2 + a - 3 \neq 0$.

Λύνουμε τις εξισώσεις $a^2 + a - 2 = 0$ και $2a^2 + a - 3 = 0$ και βρίσκουμε για την πρώτη εξίσωση $a = -2$, $a = 1$ και για τη δεύτερη εξίσωση $a = -\frac{3}{2}$, $a = 1$.

Συνεπώς για να εκφράζει η εξίσωση ευθεία πρέπει $a \neq 1$.

β. Από τη θεωρία ξέρουμε ότι παράλληλο διάνυσμα στην ευθεία είναι το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ δηλαδή $\vec{\delta} = (2a^2 + a - 3, -a^2 - a + 2)$ και κάθετο είναι το διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B) = (a^2 + a - 2, 2a^2 + a - 3)$.

γ. Γνωρίζουμε ότι κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ είναι της μορφής $y=k$. Συνεπώς πρέπει να μηδενιστεί το A δηλαδή $a^2 + a - 2 = 0$.

Γνωρίζουμε από προηγούμενο ερώτημα ότι η εξίσωση έχει δύο λύσεις αλλά αποδεκτή είναι μόνο η $a = -2$, γιατί για $a = 1$ δεν ορίζεται ευθεία.

δ. Γνωρίζουμε ότι κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ είναι της μορφής $x=k$. Συνεπώς πρέπει να μηδενιστεί το Β δηλαδή $2a^2 + a - 3 = 0$.

Γνωρίζουμε από προηγούμενο ερώτημα ότι η εξίσωση έχει δύο λύσεις αλλά αποδεκτή είναι μόνο η $a = -\frac{3}{2}$, γιατί για $a=1$ δεν ορίζεται ευθεία.

ε. Γνωρίζουμε ότι δύο ευθείες είναι μεταξύ τους κάθετες αν $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Η ευθεία έχει κλίση $\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{a^2 + a - 2}{2a^3 + a - 3}$ και η ευθεία $y=x$ έχει κλίση $\lambda=1$.

Οπότε έχουμε $-\frac{a^2 + a - 2}{2a^3 + a - 3} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \frac{a^2 + a - 2}{2a^3 + a - 3} = 1 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 2a^3 + a - 3 \Leftrightarrow -2 = -3$
αδύνατο!

Άρα δεν υπάρχει a για το οποίο η αρχική ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

2. Δίνεται η εξίσωση: $2x + 3y - 2 + k(x - 2y + 4) = 0$. Να αποδείξεις ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή και πως όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Αρχικά θα κάνουμε πράξεις για να φέρουμε την εξίσωση στη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$. Οπότε παίρνουμε :

$$2x + 3y - 2 + k(x - 2y + 4) = 0$$

$$2x + kx + 3y - 2ky + 4k - 2 = 0$$

$$(2 + k)x + (3 - 2k)y + 4k - 2 = 0$$

Δηλαδή $A=2+k$ και $B=3-2k$, οπότε **δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα** και η εξίσωση παριστάνει πάντα ευθεία.

Για να βρούμε το κοινό σημείο θα αξιοποιήσουμε την αρχική εξίσωση

$$2x + 3y - 2 + k(x - 2y + 4) = 0$$

και θα βρούμε για ποια x και y μηδενίζονται οι δύο παράγοντες, δηλαδή:

$$2x + 3y - 2 = 0$$

$$x - 2y + 4 = 0$$

και λύνοντας το σύστημα παίρνουμε

$$y = \frac{10}{7}$$

$$x = -\frac{8}{7}$$

Δηλαδή όλες οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $A(-\frac{8}{7}, \frac{10}{7})$.

3. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $x+3y-2=0$ και $2x+y+4=0$.

Για να βρούμε τη γωνία των ευθειών, θα βρούμε διανύσματα παράλληλα στις ευθείες. Από τη θεωρία ξέρουμε ότι το διάνυσμα της μορφής $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$.

Συνεπώς παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (-3, -1)$ και $\vec{\delta}_2 = (1, -2)$ παράλληλα στις ευθείες $x+3y-2=0$ και $2x+y+4=0$ αντίστοιχα. Για να βρούμε τη γωνία των διανυσμάτων αρκεί να αξιοποιήσουμε το εσωτερικό γινόμενο και παίρνουμε:

$$\cos(\widehat{\vec{\delta}_1 \vec{\delta}_2}) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|} = \frac{(-3, -1) \cdot (1, -2)}{\sqrt{3^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{-3 + 2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{50}} = -\frac{\sqrt{50}}{50} = -\frac{5\sqrt{5}}{50} = -\frac{\sqrt{5}}{10}$$

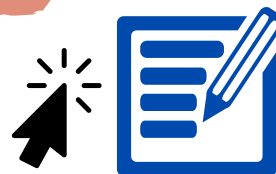
Οπότε βρίσκουμε ότι $\widehat{\vec{\delta}_1 \vec{\delta}_2} \approx 103^\circ$.

Επειδή ψάχνουμε την οξεία γωνία των ευθειών, βρίσκουμε ότι θα είναι $180^\circ - 103^\circ = 77^\circ$.





2.3 Εμβαδόν Τριγώνου



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πώς βρίσκουμε την απόσταση ενός σημείου από μια ευθεία;

Αν η ευθεία ε έχει τη μορφή $Ax + By + \Gamma = 0$ και το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(x_0, y_0)$ τότε η απόσταση του σημείου M από την ευθεία ε δίνεται από την σχέση:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ειδικά:

- Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα x' , δηλαδή της μορφής $x=a$, τότε η απόσταση του M από την ευθεία υπολογίζεται από τη σχέση :

$$d(M, \varepsilon) = |x_0 - a|$$

- Αν η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα y' , δηλαδή της μορφής $y=\beta$, τότε η απόσταση του M από την ευθεία υπολογίζεται από τη σχέση :

$$d(M, \varepsilon) = |y_0 - \beta|$$

2. Πώς βρίσκουμε το εμβαδόν τριγώνου;

Το εμβαδόν ενός τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από τον τύπο: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$

3. Πώς βρίσκουμε απόσταση δύο παράλληλων ευθειών;

Για να βρούμε την απόσταση δύο παράλληλων ευθειών μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

- Αν φέρουμε τις ευθείες σε μορφή $\varepsilon_1 : y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \lambda x + \beta_2$ τότε η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

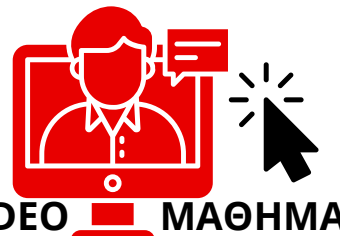
$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}.$$

- Αλλιώς μπορούμε να βρούμε ένα σημείο της ευθείας και να υπολογίσουμε την απόσταση του από την άλλη, από τον γνωστό τύπο:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Βρες την απόσταση του σημείου $M(4, -2)$ από την ευθεία $2x + 3y + 10 = 0$.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο $d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ οπότε έχουμε:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 - 6 + 10|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$$

2. Βρες το εμβαδόν τριγώνου με κορυφές τα σημεία A(1,1) , B(2,4) και Γ (0,-1).

Αρχικά βρίσκουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 4 - 1) = (1, 3)$ και $\overrightarrow{AG} = (0 - 1, -1 - 1) = (-1, -2)$.

Στη συνέχεια βρίσκουμε την ορίζουσα των δύο διανυσμάτων:

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - (-3) = -2 + 3 = 1.$$

Από τον τύπο προκύπτει: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |1| = \frac{1}{2}$

3. Βρες την απόσταση των ευθειών $y=3x-2$ και $y=3x+4$.

Παρατηρούμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.

1ος τρόπος:

Αξιοποιούμε τον τύπο $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$ και έχουμε:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|-2 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

2ος τρόπος:

Βρίσκουμε ένα σημείο της 1ης ευθείας.

Π.χ. για $x=0$ παίρνουμε $y=-2$ και έχουμε το σημείο $M(0,-2)$.

Αξιοποιούμε τον τύπο $d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ για την ευθεία $y=3x+4$ δηλαδή $-3x+y-4=0$

και παίρνουμε: $d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

4. Δίνεται η ευθεία $\lambda x + 2y - \lambda + 2 = 0$. Να βρεθεί το λ ώστε η απόσταση της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων να είναι ίση με 1.

Από τον τύπο παίρνουμε $d(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$

$$\frac{|\lambda \cdot 0 + 2 \cdot 0 - \lambda + 2|}{\sqrt{\lambda^2 + 2^2}} = 1$$

$$|2 - \lambda| = \sqrt{4 + \lambda^2}$$

$$(2 - \lambda)^2 = (4 + \lambda^2)$$

$$4 - 4\lambda + \lambda^2 = 4 + \lambda^2$$

$$-4\lambda = 0$$

$$\lambda = 0$$

5. Βρες τα σημεία της ευθείας $x + y = 0$ που απέχουν 2 μονάδες από την ευθεία $2x + y - 4 = 0$.

Υποθέτουμε ότι το σημείο M ανήκει στην πρώτη ευθεία, συνεπώς θα είναι της μορφής $M(x_1, -x_1)$. Από τον τύπο απόστασης σημείου από ευθεία παίρνουμε:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2$$

$$\frac{|2x_1 + 1 \cdot (-x_1) - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2$$

$$|x_1 - 4| = 2\sqrt{5}$$

$$x_1 - 4 = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow x_1 = 2\sqrt{5} + 4$$

$$x_1 - 4 = -2\sqrt{5} \Leftrightarrow x_1 = -2\sqrt{5} + 4$$

6. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $2x+y-4$ και $2x+y$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας τους.

Γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο της μεσοπαράλληλης θα ισαπέχει από τις δύο ευθείες, δηλαδή $d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$.

Για σημείο M με τυχαίες συντεταγμένες έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{|2x+y-4|}{\sqrt{2^2+1^2}} &= \frac{|2x+y|}{\sqrt{2^2+1^2}} \\ |2x+y-4| &= |2x+y| \\ 2x+y-4 &= 2x+y, \text{ αδύνατο} \\ \text{ή} \\ 2x+y-4 &= -2x-y \\ 4x+2y-4 &= 0 \\ 2x+y-2 &= 0\end{aligned}$$

Οπότε η εξίσωση της μεσοπαράλληλης είναι $2x+y-2=0$.

7. Δίνεται τετράπλευρο με κορυφές $A(1,-1)$, $B(2,-3)$, $\Gamma(3,4)$ και $\Delta(4,2)$. Να βρείτε το είδος του τετράπλευρου και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Βρίσκουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (2-1, -3-(-1)) = (1, -2)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (4-3, 2-4) = (1, -2)$, συνεπώς το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Πλέον για να υπολογίσουμε το εμβαδόν αρκεί να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ και να πάρουμε το διπλάσιο.

Βρίσκουμε $\overrightarrow{A\Gamma} = (3-1, 4-(-1)) = (2, 5)$ και έχουμε:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |5+4| = \frac{9}{2}$$

Συνεπώς για το παραλληλόγραμμο παίρνουμε $(AB\Gamma\Delta) = 2 \cdot \frac{9}{2} = 9$.



3

κωνικές τομές



3.1 Κύκλος



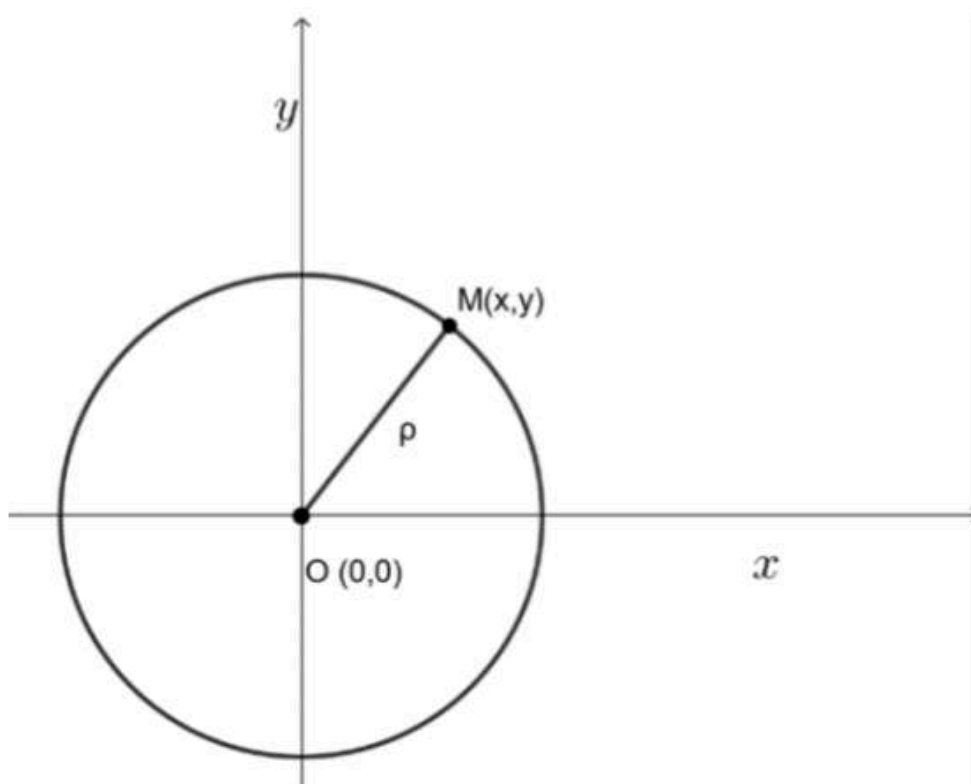
ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Πότε ένα σημείο ανήκει σε έναν κύκλο;

Ένα σημείο ανήκει σε έναν κύκλο αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου.

1η Απόδειξη:

Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ είναι $x^2 + y^2 = \rho^2$



Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει σε έναν κύκλο C αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο O απόσταση ίση με την ακτίνα, δηλαδή αν ισχύει $(OM)=\rho$.

Γνωρίζουμε ότι $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε παίρνουμε $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$.

Παρατηρούμε ότι οι συντεταγμένες κάθε σημείου του κύκλου, και μόνο αυτές, επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$. Άρα ο κύκλος με το κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2$.

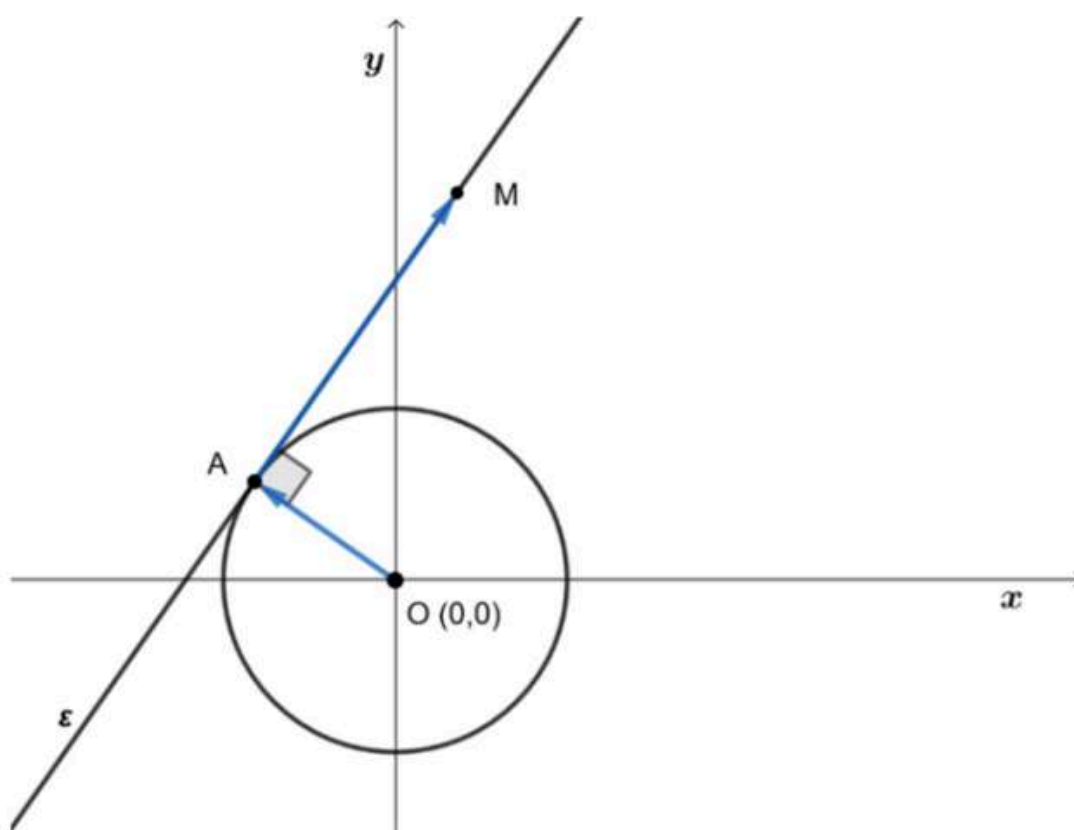
Ποιος κύκλος ονομάζεται μοναδιαίος;

Μοναδιαίος κύκλος είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$. Συνεπώς έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$.

2η Απόδειξη:

Η εξίσωση της εφαπτομένης κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο $A(x_1, y_1)$

είναι $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$



Θεωρούμε κύκλο $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ και ένα σημείο του κύκλου $A(x_1, y_1)$

Για την εφαπτομένη ε του κύκλου στο A ισχύει $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AM}$, όπου $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της εφαπτομένης ε .

Για τα διανύσματα έχουμε $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ και $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1)$, οπότε:

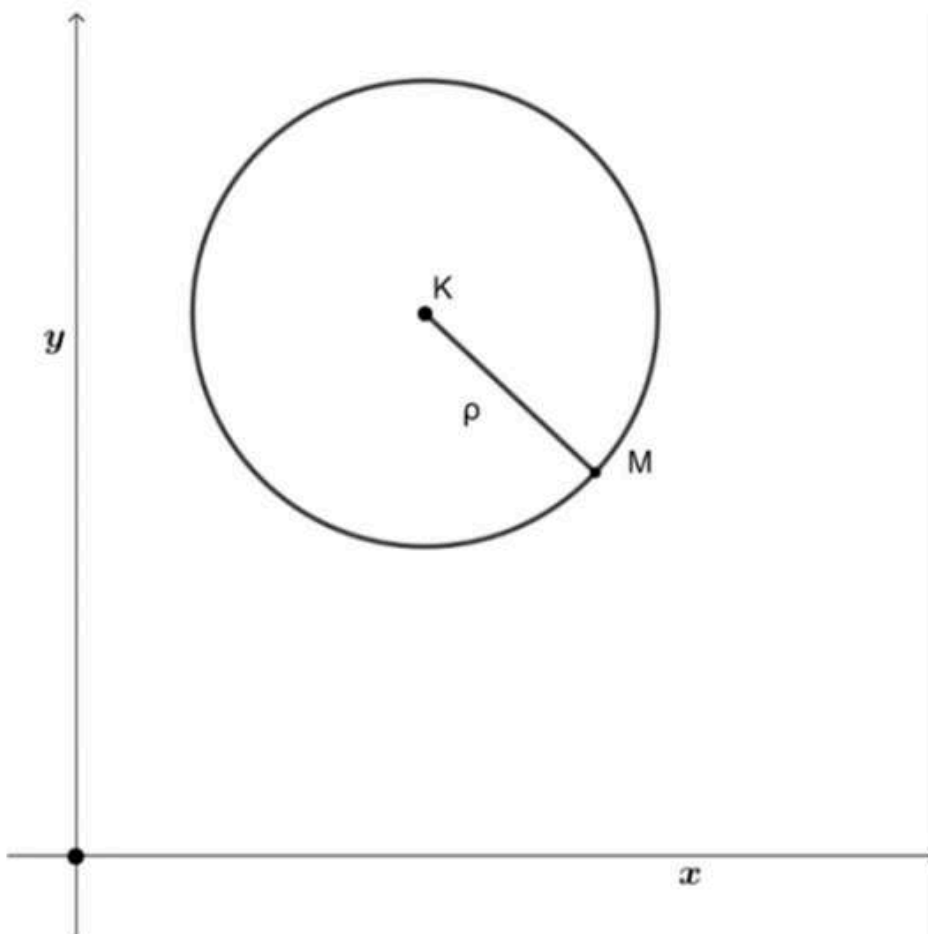
$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0 \Leftrightarrow x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$$

Επειδή το σημείο A είναι σημείο του κύκλου θα έχουμε $x_1^2 + y_1^2 = \rho^2$, οπότε τελικά έχουμε ότι $x_1x + y_1y = \rho^2$

3η Απόδειξη:

Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$

και ακτίνα ρ είναι $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$



Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο K απόσταση ίση με την ακτίνα ρ , δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει:

$$(MK) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2.$$

Άρα ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2.$$

4η Απόδειξη:

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ και αντίστροφα κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο.

Από την εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$, κάνοντας πράξεις έχουμε:

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = \rho^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - \rho^2) = 0$$

Συνεπώς για $A = -2x_0, B = -2y_0$ και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$ παίρνουμε

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

Για το αντίστροφο:

Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ γίνεται:

$$\begin{aligned} (x^2 + 2\frac{A}{2}x) + (y^2 + 2\frac{B}{2}y) &= -\Gamma \Leftrightarrow (x^2 + 2\frac{A}{2}x + \frac{A^2}{4}) + (y^2 + 2\frac{B}{2}y + \frac{B^2}{4}) = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma \Leftrightarrow \\ (x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 &= \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}. \end{aligned}$$

Πλέον έχουμε:

$\frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} > 0$ τότε $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ κύκλος με κέντρο το σημείο

$K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

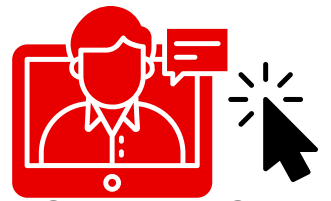
$A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ τότε η $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει το σημείο

$K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$.

$A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$ τότε η $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι αδύνατη.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Βρες την εξίσωση του κύκλου στις παρακάτω περιπτώσεις:

α. έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και έχει ακτίνα 2.

β. έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο $A(3, -4)$.

γ. έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $x+y=2$.

δ. έχει κέντρο το σημείο $K(1, 3)$ και έχει ακτίνα $\frac{1}{2}$.

ε. έχει κέντρο το σημείο $K(0, -4)$ και διέρχεται από το σημείο $A(0, 0)$.

α. Από τον τύπο $x^2 + y^2 = \rho^2$ εύκολα βρίσκουμε $x^2 + y^2 = 2^2$.

β. Από τον τύπο $x^2 + y^2 = \rho^2$ έχουμε $3^2 + (-4)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 9 + 16 = 25 \Leftrightarrow \rho = 5$
οπότε έχουμε $x^2 + y^2 = 5^2$.

γ. Από τον τύπο $x_1x + y_1y = \rho^2$ και την εξίσωση $x+y=2$ βρίσκουμε εύκολα ότι
 $\rho^2 = 2 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{2}$, οπότε $x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$.

δ. Από τον τύπο $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ παίρνουμε $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = (\frac{1}{2})^2$.

ε. Από τον τύπο $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ παίρνουμε $(0 - 0)^2 + (0 - (-4))^2 = \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 4^2$.
Οπότε παίρνουμε $x^2 + (y + 4)^2 = 4^2$.

2. Βρες την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$, όταν:

α. διέρχεται από σημείο $A(2,0)$

β. είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+1$.

γ. είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 7$.

α. Από τον τύπο $x_1x + y_1y = \rho^2$ παίρνουμε για το σημείο A $2x + 0 \cdot y = 2^2 \Leftrightarrow 2x = 4$.

β. Η ευθεία $y=x+1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$. Αφού η εφαπτόμενη είναι
παράλληλη στην $y=x+1$ θα πρέπει να έχει επίσης συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$.

Η ευθεία $x_1x + y_1y = \rho^2$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $x_1x + y_1y - \rho^2 = 0$ με $A=x_1$

και $B=y_1$ και $\lambda = \frac{-A}{B} = \frac{-x_1}{y_1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = -y_1$.

Αρκεί να βρούμε το σημείο του κύκλου που ικανοποιεί τη σχέση $x_1 = -y_1$, δηλαδή το σημείο $B(x_1, -x_1)$ και την εφαπτομένη στο σημείο B. Από την εξίσωση του κύκλου παίρνουμε $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x_1^2 + (-x_1)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{2}$.

Οπότε έχουμε τα σημεία $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ και $B'(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, από τα οποία προκύπτουν αντίστοιχα οι εφαπτόμενες με κλίση $\lambda=1$: $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 4$ και $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = -4$.

γ. Η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 7$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{2}$. Αφού η εφαπτόμενη είναι κάθετη στην $y = \frac{1}{2}x - 7$ θα πρέπει να έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$, ώστε

$$\frac{1}{2} \cdot (-2) = -1.$$

Η ευθεία $x_1x + y_1y - \rho^2 = 0$ έχει κλίση $\lambda = \frac{-A}{B} = \frac{-x_1}{y_1} = -2 \Leftrightarrow x_1 = 2y_1$.

Παίρνουμε το σημείο $\Gamma(x_1, 2x_1)$ και από την εξίσωση του κύκλου έχουμε

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x_1^2 + (2x_1)^2 = 4 \Leftrightarrow 5x_1^2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Προκύπτουν τα σημεία $A(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5})$ και $AB(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5})$

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 + \lambda(2x - y + 5) = 0$. Να αποδείξετε ότι παριστάνει εξίσωση κύκλου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων από τα οποία περνάνε όλοι οι κύκλοι της εξίσωσης.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 + \lambda(2x - y + 5) &= 0 \Leftrightarrow \\x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 + 2\lambda x - \lambda y + 5\lambda &= 0 \Leftrightarrow \\x^2 + y^2 + (-2 + 2\lambda)x + (-4 - \lambda)y - 20 + 5\lambda &= 0\end{aligned}$$

Οπότε έχουμε: $A = 2\lambda - 2, B = -4 - \lambda, \Gamma = -20 + 5\lambda$

$$\begin{aligned}A^2 + B^2 - 4\Gamma &= (2\lambda - 2)^2 + (-4 - \lambda)^2 - 4(-20 + 5\lambda) \\4\lambda^2 - 8\lambda + 4 + 16 + 8\lambda + \lambda^2 + 80 - 20\lambda &= \\5\lambda^2 - 20\lambda + 100 &= \lambda^2 - 4\lambda + 20\end{aligned}$$

Για την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε $\Delta = 16 - 80 < 0$, συνεπώς η ποσότητα $\frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$ είναι πάντα θετική και η εξίσωση εκφράζει πάντα κύκλο.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των κύκλων, αρκεί να πάρουμε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές του λ .

$$\text{Για } \lambda = 0 \text{ έχουμε: } x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

$$\text{Για } \lambda = 1 \text{ έχουμε: } x^2 + y^2 - 5y - 15 = 0$$

Αν αφαιρέσουμε τις παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη παίρνουμε:

$$-2x + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 5$$

Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε:

$$\begin{aligned}x^2 + (2x - 5)^2 - 5(2x - 5) - 15 &= 0 \\x^2 + 4x^2 - 20x + 25 - 10x + 25 - 15 &= 0 \\5x^2 - 30x + 35 &= 0 \\x^2 - 6x + 7 &= 0\end{aligned}$$

$$\Delta = 36 - 28 = 8, \text{ οπότε παίρνουμε } x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} \text{ και αντίστοιχα } y_{1,2} = \pm 2 \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} - 5$$

4. (Βασισμένο στο θέμα 18239 της Τράπεζας Θεμάτων)

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(-3,1)$, που εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$

Η εξίσωση του κύκλου είναι της μορφής $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

Συνεπώς πρέπει να γνωρίζουμε το κέντρο $K(x_0, y_0)$ και την ακτίνα ρ .

Το κέντρο γνωρίζουμε ότι είναι το σημείο $K(-3,1)$.

Για να βρούμε την ακτίνα αρκεί να σκεφτούμε ότι όταν ο κύκλος εφάπτεται μιας ευθείας, τότε η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα.

Συνεπώς παίρνουμε: $d(K, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, και η ευθεία ε παίρνει την μορφή

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \Leftrightarrow 4x + 3y + 5 = 0.$$

$$\text{Πλέον έχουμε } d(K, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-12 + 3 + 8|}{\sqrt{25}} = \frac{|-4|}{5} = \frac{4}{5}.$$

Τελικά γνωρίζουμε ότι ο κύκλος θα έχει κέντρο $K(-3, 1)$ και ακτίνα $\rho = \frac{4}{5}$, και η εξίσωση του θα είναι $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$.

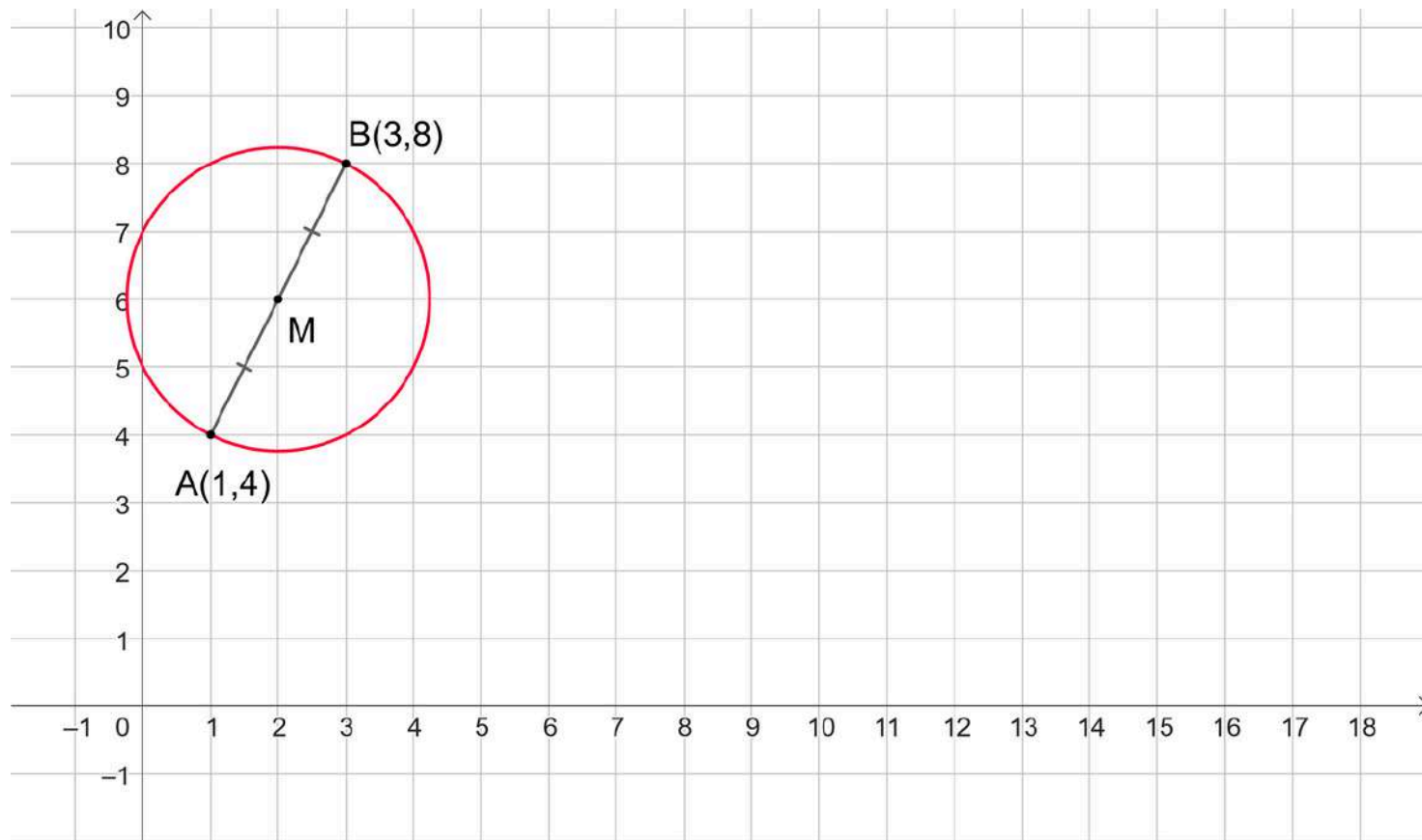
5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB, αν $A(1, 4)$ και $B(3, 8)$.

Ο κύκλος που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB θα έχει κέντρο το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και ακτίνα ίση με την απόσταση $AM = MB$.

Το μέσο M προκύπτει από τον τύπο $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = (2, 6)$

Η ακτίνα ρ θα είναι $(AM) = \sqrt{(1-2)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Συνεπώς ο κύκλος θα είναι της μορφής $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{5})^2$.



6. Να βρείτε τη σχετική θέση μιας ευθείας $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$. και ενός κύκλου με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .

Γνωρίζουμε από την Γεωμετρία ότι ένας κύκλος και μια ευθεία έχουν 3 είδη σχετικών θέσεων:

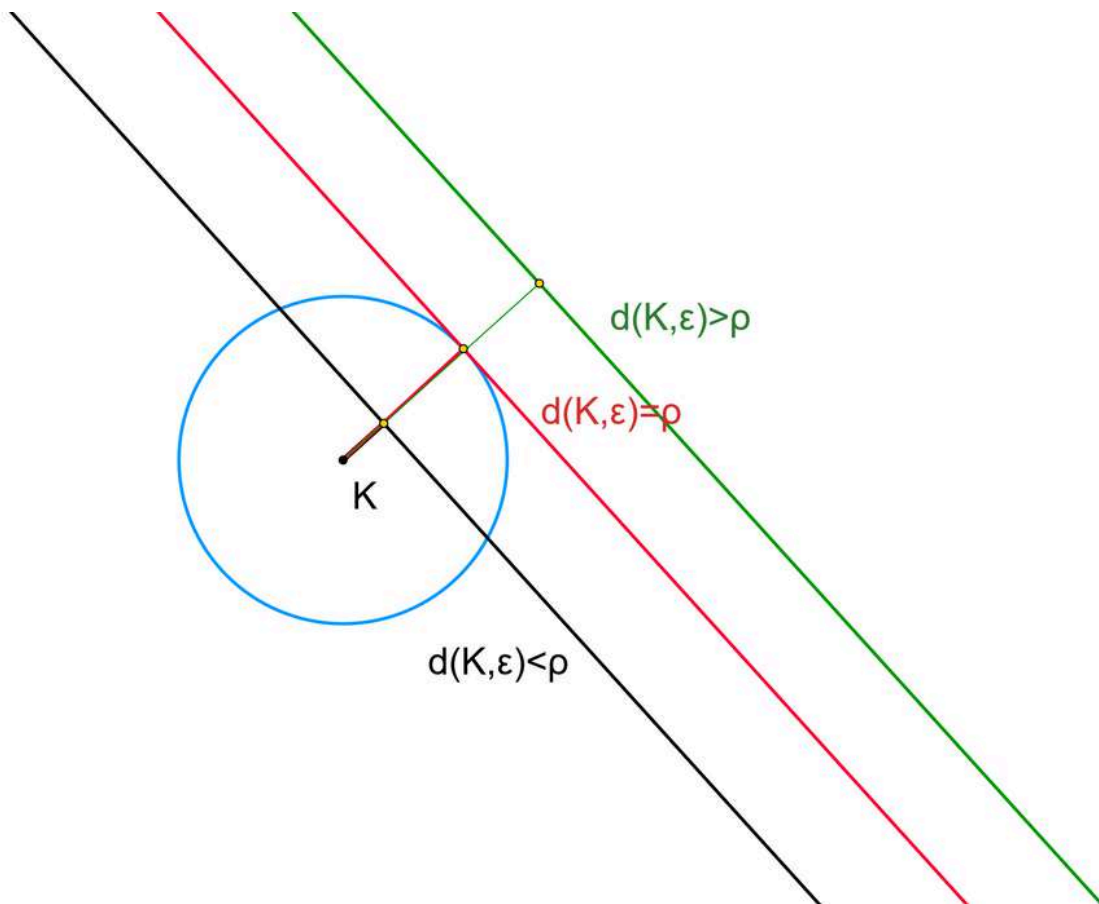
- α) η ευθεία να είναι τέμνουσα του κύκλου
- β) η ευθεία να εφάπτεται του κύκλου
- γ) η ευθεία να είναι εξωτερική του κύκλου

Αυτές οι καταστάσεις μεταφράζονται ως εξής:

α) η ευθεία είναι τέμνουσα του κύκλου αν και μόνο αν $d(K,\varepsilon) < \rho \Leftrightarrow \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} < \rho$

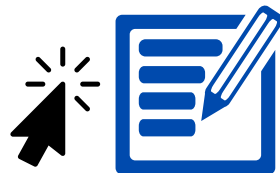
β) η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν $d(K,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \rho$

γ) η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου αν και μόνο αν $d(K,\varepsilon) > \rho \Leftrightarrow \frac{|Ax_o + By_o + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} > \rho$





3.2 Η παραβολή



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποιος είναι ο ορισμός της παραβολής;

Παραβολή ορίζουμε τον γεωμετρικό τόπο όλων των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από μια σταθερή ευθεία δ και ένα σταθερό σημείο E , που δεν ανήκει στην ευθεία δ . Η ευθεία δ ονομάζεται διευθετούσα και το σημείο E ονομάζεται εστία της παραβολής.

Για όλα τα σημεία της παραβολής ισχύει $d(M, \delta) = d(M, E)$

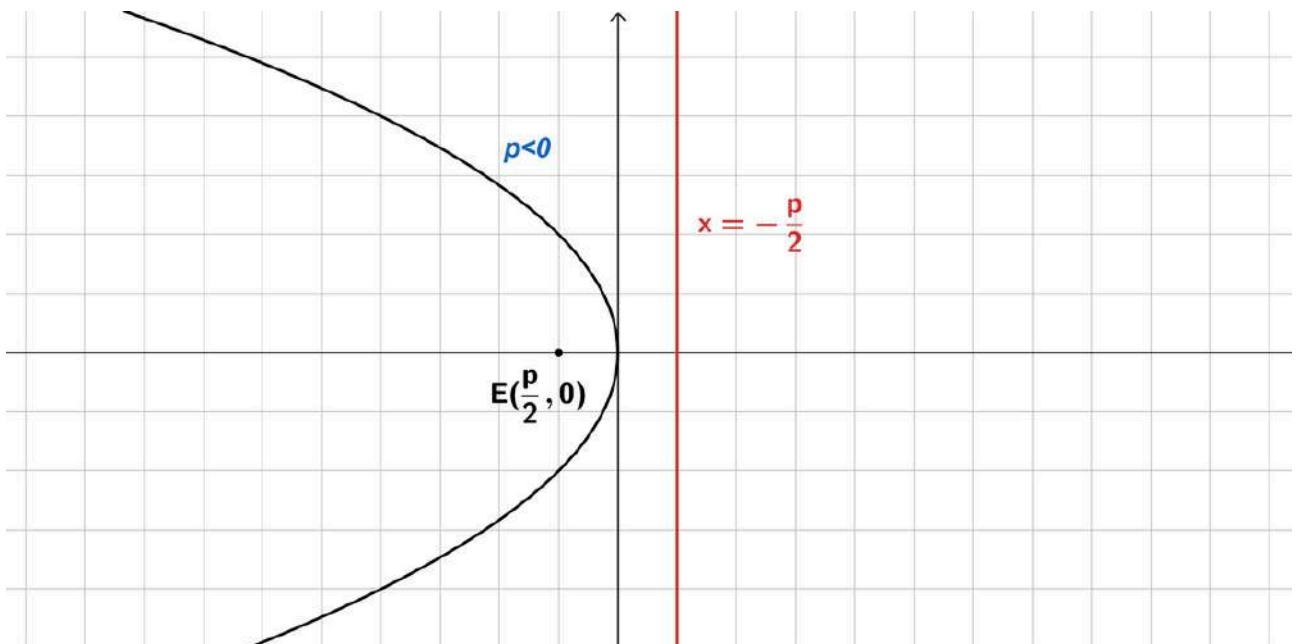
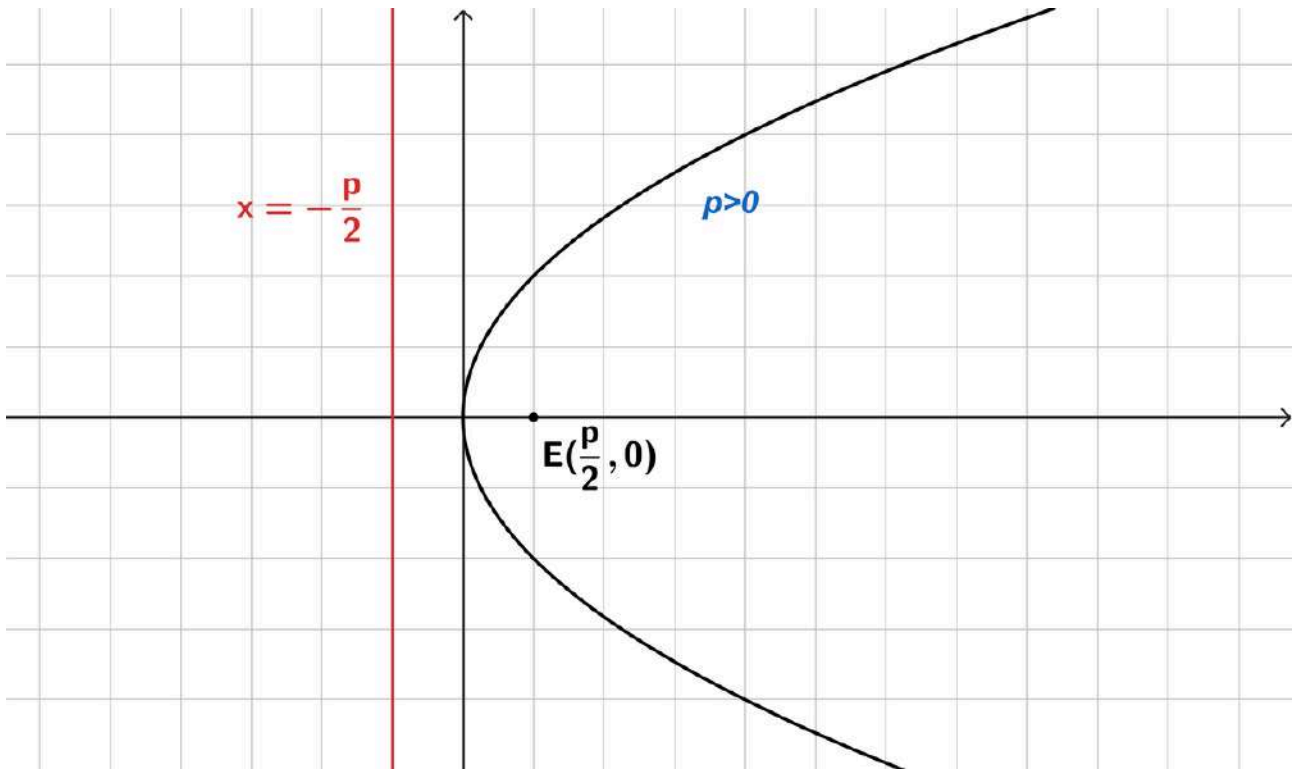
2. Ποια είναι η εξίσωση της παραβολής; (Αναφερόμαστε ειδικά στην παραβολή με άξονα συμμετρίας τους άξονες $x'x$ ή $y'y$ και κορυφή την αρχή των αξόνων.)

A.

Η εξίσωση της παραβολής που έχει εστία πάνω στον άξονα $x'x$ είναι $y^2 = 2px$.

Η εστία E έχει συντεταγμένες $E(\frac{p}{2}, 0)$

Η διευθετούσα έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$

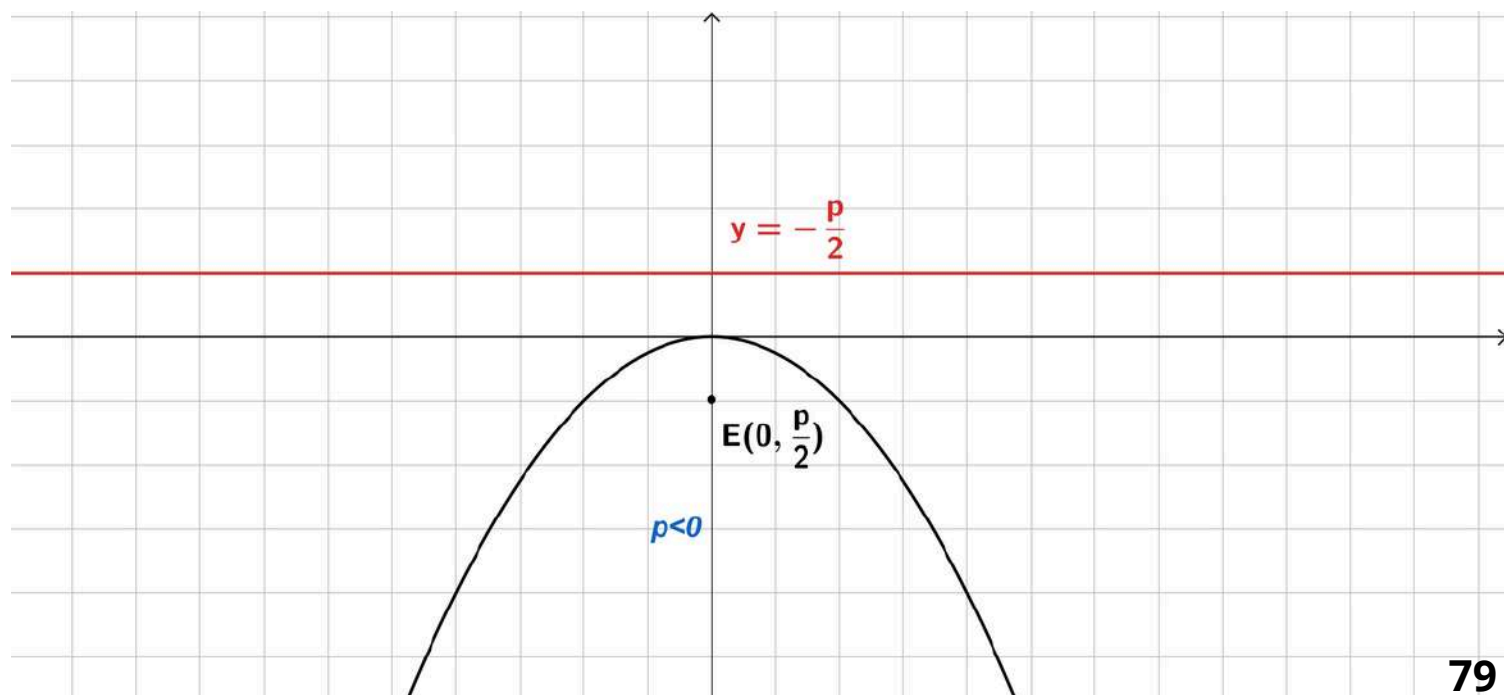
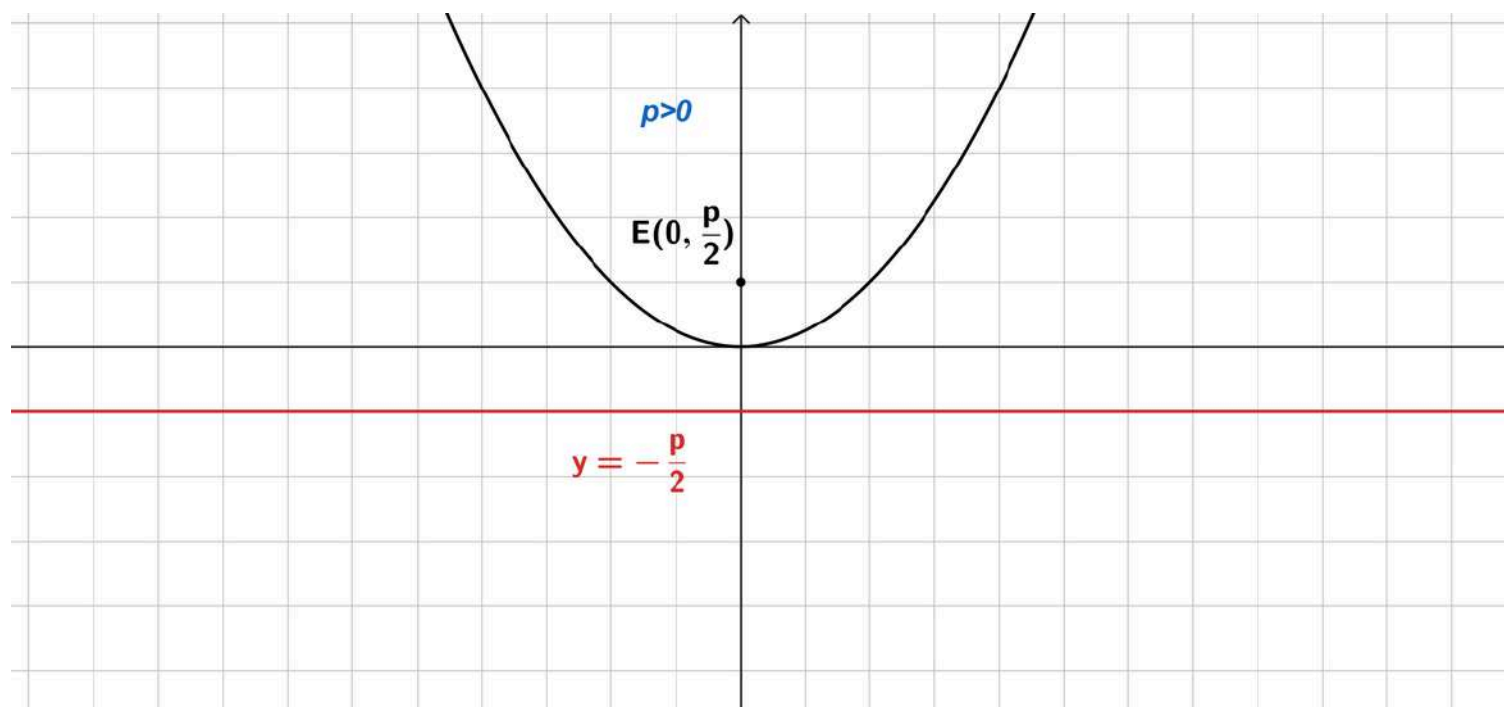


B.

Η εξίσωση της παραβολής που έχει εστία πάνω στον άξονα $y'y$ είναι $x^2 = 2py$

Η εστία E έχει συντεταγμένες $E(0, \frac{p}{2})$.

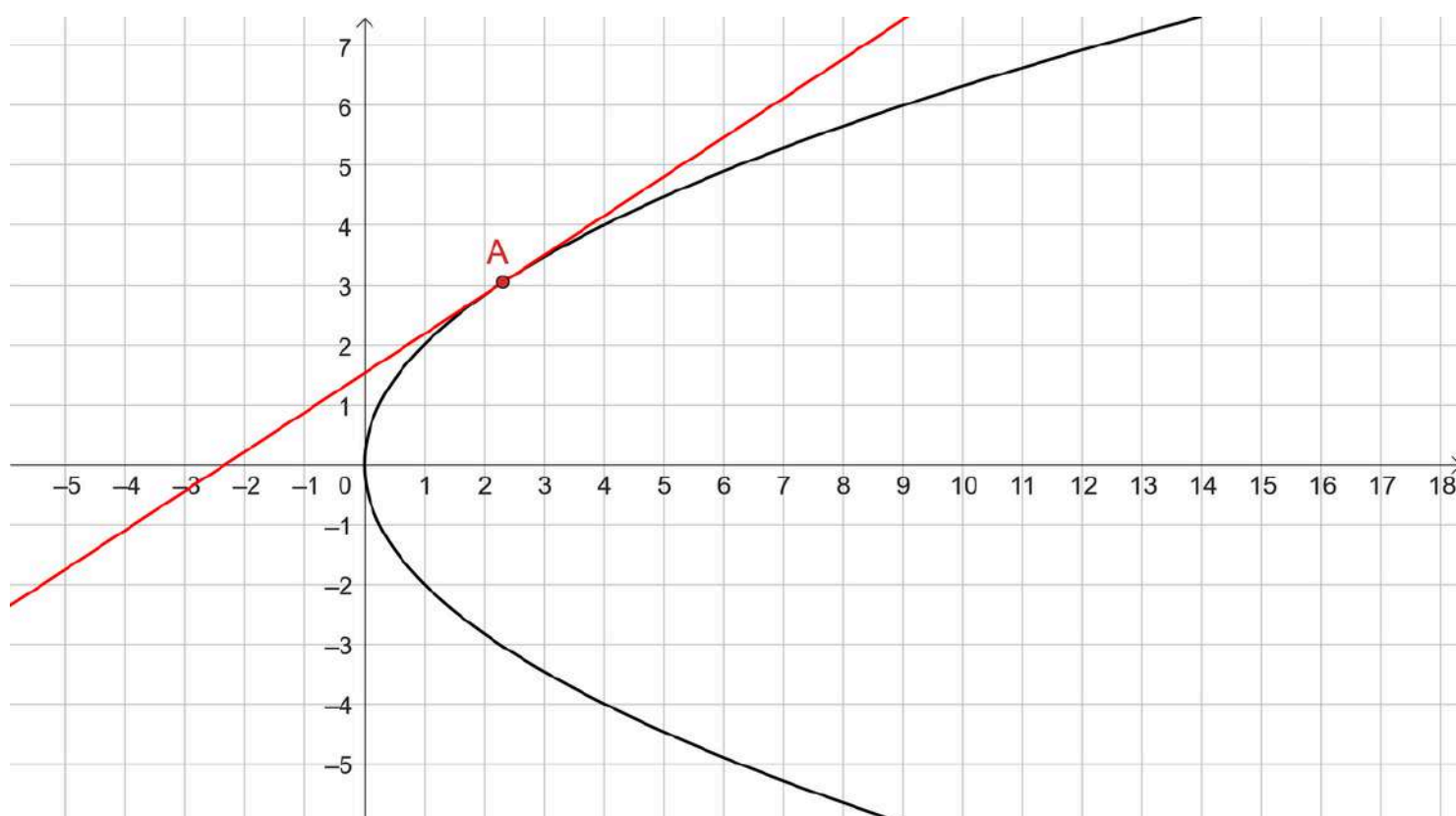
Η διευθετούσα έχει εξίσωση $y = -\frac{p}{2}$



3. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ σε ένα σημείο της $A(x_0, y_0)$;

Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ σε ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι

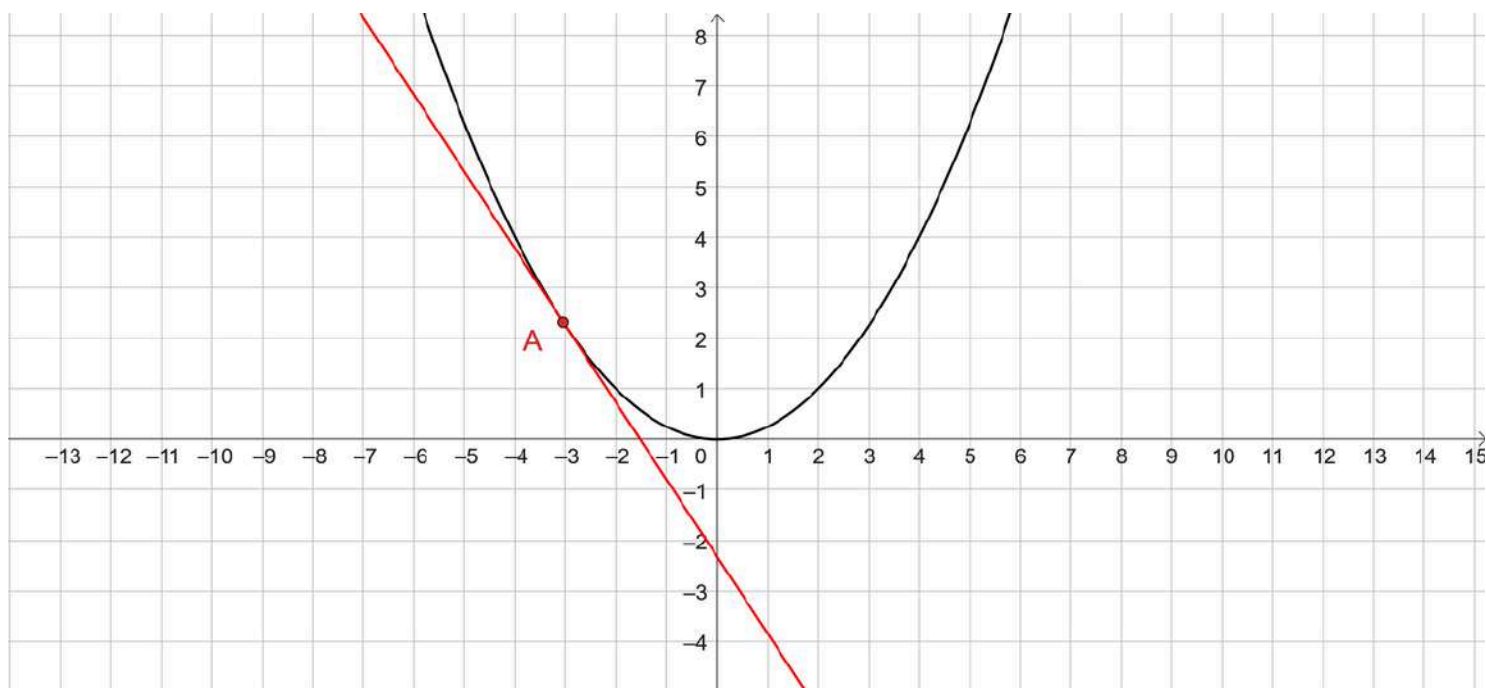
$$y \cdot y_0 = p(x + x_0)$$



4. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $x^2 = 2py$ σε ένα σημείο της $A(x_0, y_0)$;

Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2py$ σε ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι

$$x \cdot x_0 = p(y + y_0)$$



5. Τι περιγράφει η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής;

Η κάθετη ευθεία στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M_1 διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1F που είναι ομόρροπη της OE , όπου E είναι η εστία της παραβολής.



1. Να βρεις την εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων όταν:

α. έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και εστία το σημείο $E(-2,0)$.

β. έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ και διευθετούσα την ευθεία $x=3$.

γ. έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $\Sigma(4,2)$.

α. Αφού η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ θα είναι της μορφής $y^2 = 2px$. Αρκεί να προσδιορίσουμε το p . Γνωρίζουμε ότι η εστία E προκύπτει από $E(\frac{p}{2}, 0)$.

Συνεπώς καταλαβαίνουμε ότι $E(\frac{p}{2}, 0) = E(-2, 0)$, δηλαδή $\frac{p}{2} = -2 \Leftrightarrow p = -4$.

Η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2 \cdot (-4) \cdot x \Leftrightarrow y^2 = -8x$.

β. Αφού η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ θα είναι της μορφής $y^2 = 2px$. Αρκεί να προσδιορίσουμε το p . Γνωρίζουμε ότι η διευθετούσα έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

Συνεπώς καταλαβαίνουμε ότι $x = -\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow -p = -6 \Leftrightarrow p = 6$.

Η εξίσωση της παραβολής είναι $y^2 = 2 \cdot 6 \cdot x \Leftrightarrow y^2 = 12x$.

γ. Αφού η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ θα είναι της μορφής $x^2 = 2py$. Αρκεί να προσδιορίσουμε το p . Αφού η παραβολή διέρχεται από το σημείο $\Sigma(4,2)$, οι συντεταγμένες του σημείου θα ικανοποιούν την εξίσωση της παραβολής.

$$\text{Δηλαδή θα έχουμε } x^2 = 2py \Leftrightarrow 4^2 = 2p \cdot 2 \Leftrightarrow 16 = 4p \Leftrightarrow p = 4.$$

$$\text{Η εξίσωση της παραβολής είναι } x^2 = 2 \cdot 4 \cdot y \Leftrightarrow x^2 = 8y.$$

2. Να βρεις την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής όταν έχει εξίσωση:

α. $y^2 = 4x$

γ. $y = \frac{1}{6}x^2$

β. $y^2 = -10x$

δ. $y = -x^2$

α. Η εξίσωση της παραβολής είναι της μορφής $y^2 = 4x$, δηλαδή αντίστοιχα $y^2 = 2px$.

Συνεπώς προκύπτει ότι $4 = 2p \Leftrightarrow p = 2$.

Η εστία E έχει συντεταγμένες $E(\frac{p}{2}, 0) \rightarrow E(\frac{2}{2}, 0) \rightarrow \boxed{E(1,0)}$

Η διευθετούσα έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2} \rightarrow x = -\frac{2}{2} \rightarrow \boxed{x = -1}$

β. Η εξίσωση της παραβολής είναι της μορφής $y^2 = -10x$, δηλαδή αντίστοιχα $y^2 = 2px$

Συνεπώς προκύπτει ότι $-10 = 2p \Leftrightarrow p = -5$.

$$\text{Η εστία } E \text{ έχει συντεταγμένες } E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \rightarrow E\left(-\frac{5}{2}, 0\right) \rightarrow \boxed{E\left(-\frac{5}{2}, 0\right)}$$

$$\text{Η διευθετούσα έχει εξίσωση } x = -\frac{p}{2} \rightarrow x = -\frac{-5}{2} \rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}$$

γ. Η εξίσωση της παραβολής είναι της μορφής $y = \frac{1}{6}x^2$, όμως η εξίσωση της παραβολής που έχει εστία πάνω στον άξονα $y'y$ είναι $x^2 = 2py$.

Οπότε αρχικά θα «μετασχηματίσουμε» την εξίσωση της παραβολής και έχουμε

$$y = \frac{1}{6}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 6y.$$

Προκύπτει εύκολα ότι $6 = 2p \Leftrightarrow p = 3$

$$\text{Η εστία } E \text{ έχει συντεταγμένες } E\left(0, \frac{p}{2}\right) \rightarrow \boxed{E\left(0, \frac{3}{2}\right)}$$

$$\text{Η διευθετούσα έχει εξίσωση } y = -\frac{p}{2} \rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}}$$

δ. Η εξίσωση της παραβολής είναι της μορφής $y = -x^2$, όμως η εξίσωση της παραβολής που έχει εστία πάνω στον άξονα $y'y$ είναι $x^2 = 2py$

Οπότε αρχικά θα «μετασχηματίσουμε» την εξίσωση της παραβολής και έχουμε $y = -x^2 \Leftrightarrow x^2 = -y$. Προκύπτει εύκολα ότι $-1 = 2p \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}$.

Η εστία Ε έχει συντεταγμένες $E(0, \frac{p}{2}) \rightarrow \boxed{E(0, -\frac{1}{4})}$

Η διευθετούσα έχει εξίσωση $y = -\frac{p}{2} \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}}$

3. Να βρεις την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής όταν: $y^2 = 4x$

α. είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

β. είναι κάθετη στην $y = -\frac{1}{2}x$.

γ. διέρχεται από το σημείο της παραβολής Α (1,-2).

δ. διέρχεται από το σημείο Σ (0,2).

Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4x$ είναι της μορφής $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$. Εύκολα βρίσκουμε ότι $p=2$ οπότε έχουμε $y \cdot y_0 = 2(x + x_0)$.

Έχουμε $y \cdot y_0 = 2(x + x_0)$ και κάνοντας πράξεις διαδοχικά παίρνουμε:

$$y \cdot y_0 = 2(x + x_0) \Leftrightarrow$$

$$y \cdot y_0 = 2x + 2x_0 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{2}{y_0} + 2 \frac{x_0}{y_0}$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της κλίσης της εφαπτομένης της παραβολής είναι $\frac{2}{y_0}$.

*Θα βρούμε σε παρακάτω ερώτημα την εφαπτομένη για $y_0 = 0$.

α. Για να είναι παράλληλη η εφαπτομένη με την ευθεία $y=x$ πρέπει να έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, άρα $\frac{2}{y_0} = 1 \Leftrightarrow y_0 = 2$.

Επειδή το σημείο είναι σημείο της παραβολής, οι συντεταγμένες του θα ικανοποιούν την εξίσωση της παραβολής, οπότε παίρνουμε: $A(x_0, y_0)$

$$y^2 = 4x \Leftrightarrow y_0^2 = 4x_0 \Leftrightarrow 2^2 = 4x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ και πλέον η εξίσωση της εφαπτομένης είναι } 2y = 2(x+1) \Leftrightarrow \boxed{x - y + 1 = 0}$$

β. Για να είναι κάθετη η εφαπτόμενη ευθεία με την ευθεία $y = -\frac{1}{2}x$ πρέπει για τους συντελεστές διεύθυνσης να ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

$$\text{Οπότε έχουμε } \frac{2}{y_0} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow y_0 = 1.$$

Επειδή το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι σημείο της παραβολής, οι συντεταγμένες του θα ικανοποιούν την εξίσωση της παραβολής, οπότε παίρνουμε:

$$y^2 = 4x \Leftrightarrow y_0^2 = 4x_0 \Leftrightarrow 1^2 = 4x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{4} \text{ και πλέον η εξίσωση της εφαπτομένης είναι } y = 2\left(x + \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \boxed{2x - y + \frac{1}{2} = 0}.$$

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$ προκύπτει άμεσα από τον τύπο $y \cdot y_0 = 2(x + x_0)$, οπότε έχουμε:

$$-2y = 2(x+1) \Leftrightarrow 2x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x + y + 1 = 0}$$

δ. Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\Sigma (0,2)$, οι συντεταγμένες του σημείου ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας, οπότε θα έχουμε

$$y \cdot y_0 = 2(x + x_0) \Leftrightarrow 2y_0 = 2(0 + x_0) \Leftrightarrow y_0 = x_0$$

Το σημείο $A(x_0, y_0)$ είναι σημείο της παραβολής, άρα θα ικανοποιεί την εξίσωσή της, οπότε έχουμε $y^2 = 4x \Leftrightarrow y_0^2 = 4x_0^2 \Leftrightarrow y_0^2 = 4y_0 \Leftrightarrow y_0 = 0$ ή $y_0 = 4$.

Αν y_0 τότε x_0 και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι ο άξονας $y'y$, δηλαδή η ευθεία $x=0$.

Αν $y_0 = 4$ τότε $x_0 = 4$ και πλέον η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$4y = 2(x + 4) \Leftrightarrow \boxed{x - 2y + 4 = 0}$$

4. Δίνεται σημείο $M(x,y)$, σημείο $E(3,0)$ και ευθεία $\delta: x=-3$. Να βρεις την απόσταση (ME) , και την απόσταση $d(M,\delta)$, συναρτήσει των x, y . Αν ισχύει $(ME)=d(M,\delta)$, ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$;

Στη συνέχεια σχεδίασε τα σημεία, την ευθεία και τον γεωμετρικό τόπο σε ένα σύστημα συντεταγμένων.

Η απόσταση (ME) προκύπτει από τη σχέση $(ME) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$

Η απόσταση $d(M,\delta)$ προκύπτει από τη σχέση $d(M,\delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|x+3|}{\sqrt{1^2}} = |x+3|$.

Αν ισχύει $(ME)=d(M,\delta)$ παίρνουμε $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |x+3|$.

Κάνοντας τις πράξεις: $\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |x+3| \Leftrightarrow$

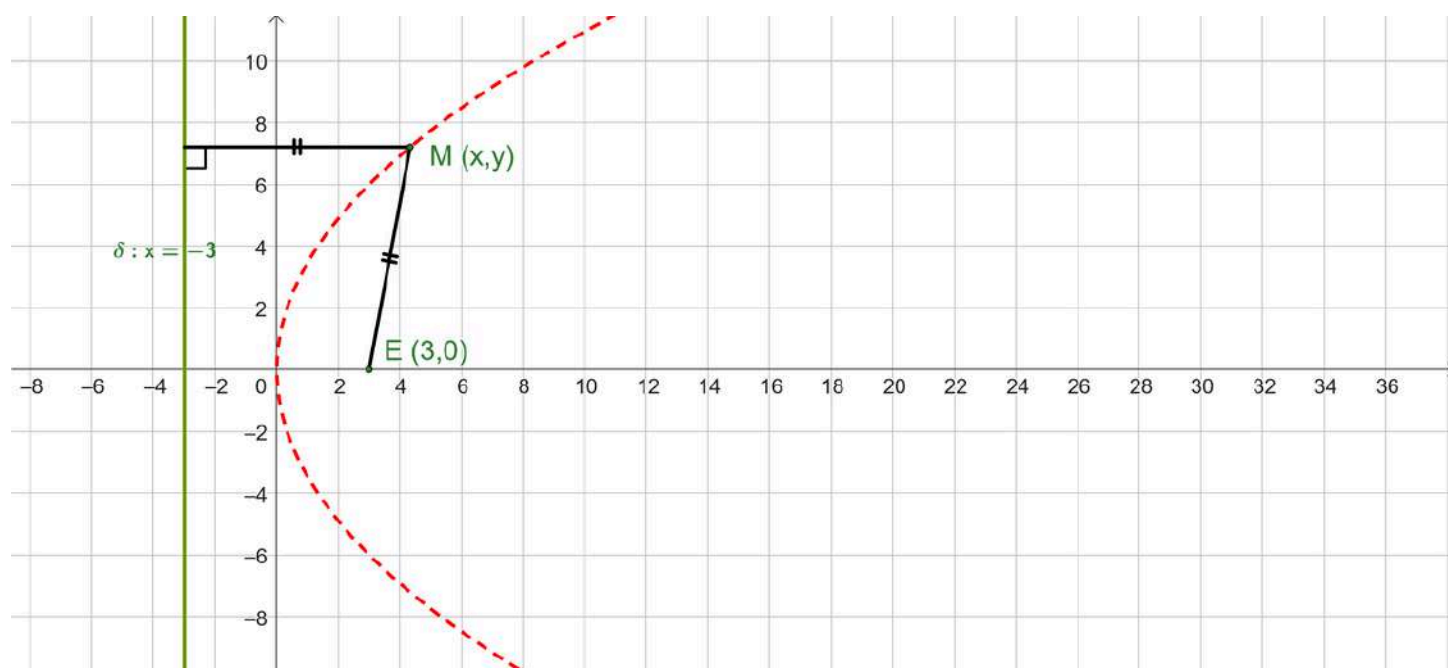
$$(x-3)^2 + y^2 = (x+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = 12x \Leftrightarrow y^2 = 2 \cdot 6 \cdot x$$

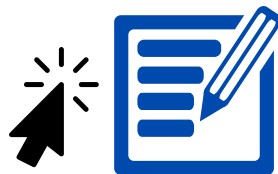
Καταλήγουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M που ικανοποιούν τη σχέση $(ME)=d(M,\delta)$ είναι μια παραβολή με εστία το σημείο $E(3,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x=-3$.

Για το σχήμα έχουμε:





3.3 Έλλειψη



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποιος είναι ο ορισμός της έλλειψης;

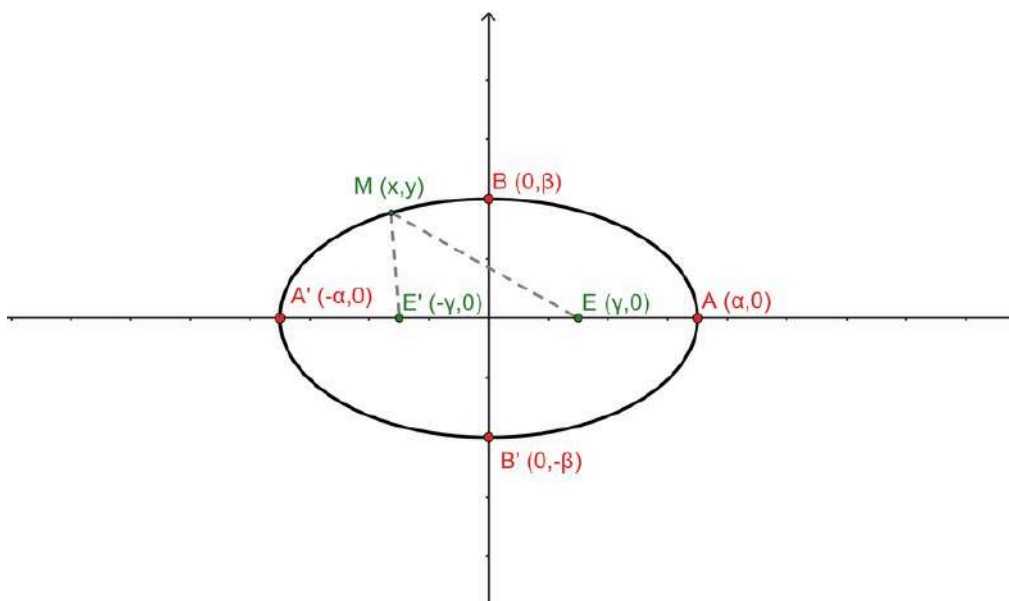
Θεωρούμε δύο σημεία του επιπέδου, E και E' . Έλλειψη με εστίες τα σημεία E και E' είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία E' και E είναι σταθερό και μεγαλύτερο της απόστασης (EE') .

Το σταθερό άθροισμα συμβολίζουμε με $2a$. Για κάθε σημείο M της έλλειψης θα ισχύει $(ME) + (ME') = 2a$.

2. Ποια είναι η εξίσωση της έλλειψης;

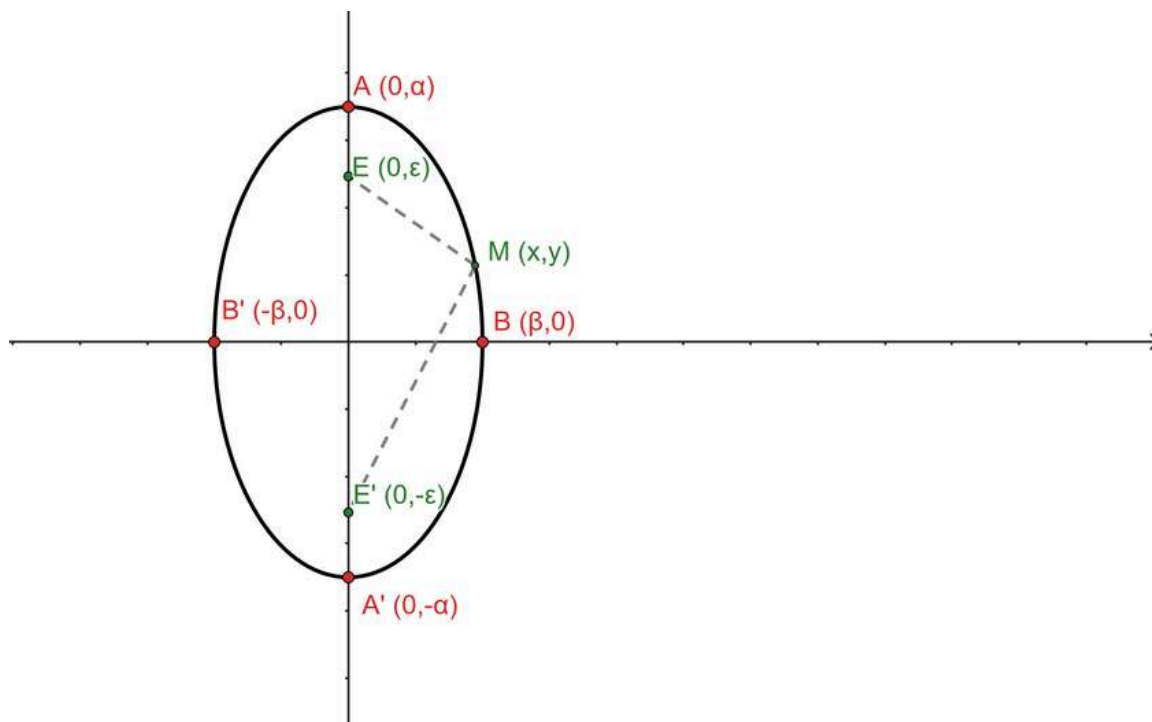
Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ είναι:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ με } \beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$$



Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E(0,\gamma)$ και $E'(0,-\gamma)$ είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ με } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$



3. Τι ιδιότητες έχουν τα σημεία της έλλειψης;

α. Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης, τότε και τα σημεία $M_2(-x_1, y_1)$, $M_3(x_1, -y_1)$ και $M_4(-x_1, -y_1)$ είναι επίσης σημεία της έλλειψης, αφού οι συντεταγμένες τους επιβεβαιώνουν την εξίσωση της έλλειψης.

β. Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $A'(-\alpha, 0)$ και τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B(0, \beta)$ και $B'(0, -\beta)$. Τα σημεία A, A', B, B' λέγονται κορυφές της έλλειψης. Το ευθύγραμμο τμήμα AA' λέγεται μεγάλος άξονας της έλλειψης, το ευθύγραμμο τμήμα BB' λέγεται μικρός άξονας της έλλειψης. Αντίστοιχα ισχύει και για την έλλειψη $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$

γ. Για κάθε σημείο M της έλλειψης και το συμμετρικό του ως προς το O, M' ισχύει ότι $2\beta \leq (MM') \leq 2\alpha$.

δ. Τα σημεία της έλλειψης περιέχονται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x=\alpha$, $x=-\alpha$, $y=\beta$, $y=-\beta$.

4. Τι ονομάζεται εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

Εκκεντρότητα e της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ονομάζουμε τον λόγο $e = \frac{c}{a} < 1$.

Για την εκκεντρότητα e παίρνουμε:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ και από τον τύπο } e = \frac{c}{a}$$

$$\text{παίρνουμε } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \Leftrightarrow e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Leftrightarrow e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}}.$$

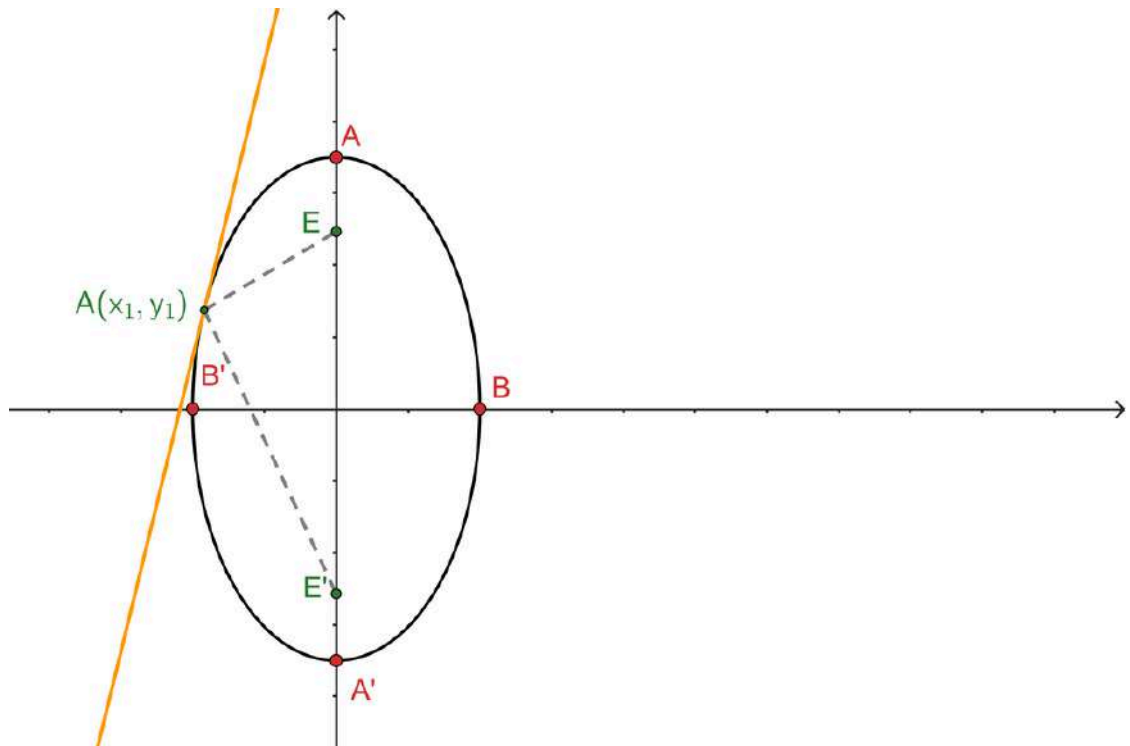
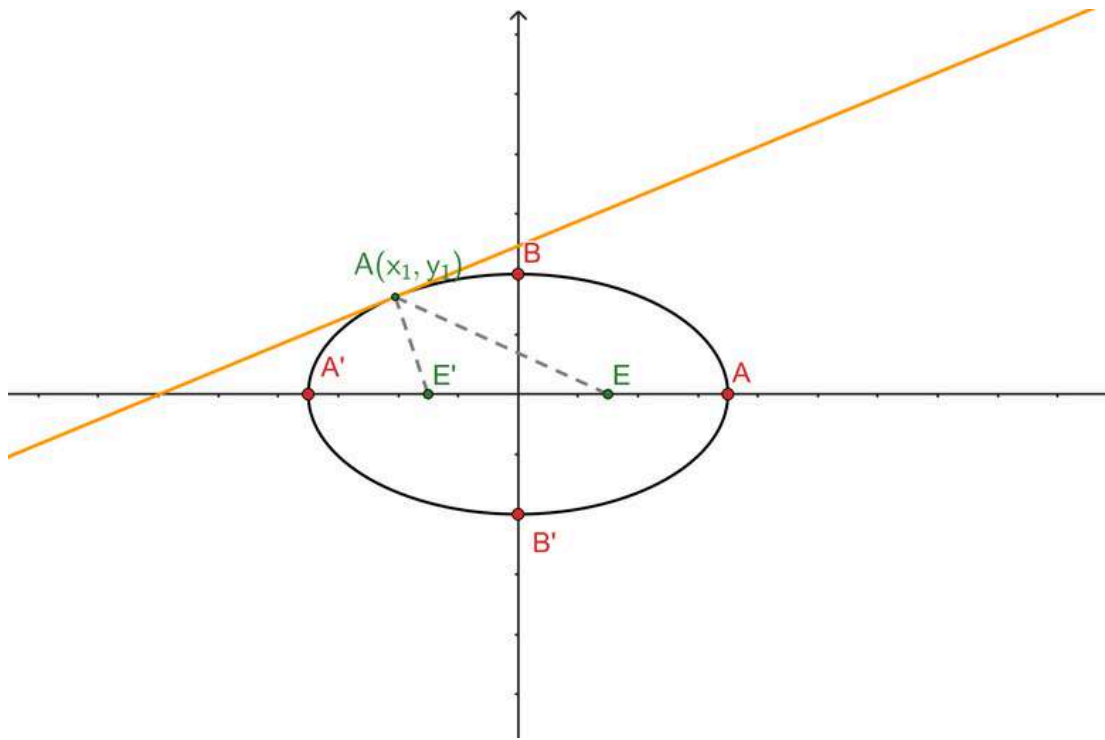
- Όταν η εκκεντρότητα e τείνει στο μηδέν, τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.
- Όταν η εκκεντρότητα e τείνει στο ένα, τότε η εκκεντρότητα τείνει να εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα.

Δύο ελλείψεις λέγονται όμοιες αν έχουν ίδια εκκεντρότητα.

5. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης σε ένα σημείο της $A(x_1, y_1)$;

Αν η παραβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ τότε η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_1, y_1)$

$$\text{θα είναι της μορφής } \frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1.$$



Αν η παραβολή έχει εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τότε η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_1, y_1)$

θα είναι της μορφής $\frac{x \cdot x_1}{\beta^2} + \frac{y \cdot y_1}{a^2} = 1$

6. Τι περιγράφει η ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης;

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία, όπου E και E' οι εστίες της έλλειψης.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να βρεις την εξίσωση της έλλειψης στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α. έχει μεγάλο άξονα 26 και μικρό άξονα 10 και εστίες πάνω στον άξονα x'x.**
- β. έχει εστίες τα σημεία E'(0,-4) και E(0,4) και μεγάλο άξονα 10.**

α. Αφού οι εστίες της έλλειψης είναι πάνω στον άξονα x'x θα είναι της μορφής

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Αφού ο μεγάλος άξονας είναι 26 καταλαβαίνουμε ότι $2a = 26 \Leftrightarrow a = 13$ και αντίστοιχα $2b = 10 \Leftrightarrow b = 5$.

Συνεπώς η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$.

β. Αφού η έλλειψη έχει τις εστίες της πάνω στον άξονα y'y θα είναι της μορφής

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ Αφού ο μεγάλος άξονας είναι 10 καταλαβαίνουμε ότι } 2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$$

Αφού η εστία E είναι της μορφής E(0,4) συμπεραίνουμε ότι $b = 4$.

$$\text{Ισχύει ότι } b = \sqrt{a^2 - c^2} \Leftrightarrow b = \sqrt{25 - 16} \Leftrightarrow b = 3.$$

Συνεπώς η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

2. Να γράψεις τις παρακάτω εξισώσεις στην «κανονική» μορφή και να βρεις τα α,β,γ καθώς και τις εκκεντρότητές τους.

α. $x^2 + 4y^2 = 4$

β. $25x^2 + 16y^2 = 400$

γ. $144x^2 + 169y^2 = 24336$

α. $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$. Οπότε έχουμε $a=2$, $b=1$ και για να βρούμε

το γ θα αξιοποιήσουμε τον τύπο:

$$b = \sqrt{a^2 - \gamma^2} \Leftrightarrow b^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{a^2 - b^2}$$

οπότε θα έχουμε $\gamma = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Η εκκεντρότητα προκύπτει από τον τύπο

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{a}, \text{ οπότε έχουμε } \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

β. $25x^2 + 16y^2 = 400 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$. Οπότε έχουμε $a=5$, $b=4$ και για να

βρούμε το γ θα αξιοποιήσουμε τον τύπο:

$$b = \sqrt{a^2 - \gamma^2} \Leftrightarrow b^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{a^2 - b^2}$$

οπότε θα έχουμε $\gamma = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Η εκκεντρότητα προκύπτει από τον τύπο $\varepsilon = \frac{\gamma}{a}$, οπότε έχουμε $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

γ. $144x^2 + 169y^2 = 24336 \Leftrightarrow \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$. Οπότε έχουμε $a=13$, $b=12$ και για

να βρούμε το γ θα αξιοποιήσουμε τον τύπο:

$$\beta = \sqrt{a^2 - \gamma^2} \Leftrightarrow \beta^2 = a^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = a^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma = \sqrt{a^2 - \beta^2}$$

οπότε θα έχουμε $\gamma = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$

Η εκκεντρότητα προκύπτει από τον τύπο $\varepsilon = \frac{\gamma}{a}$, οπότε έχουμε $\varepsilon = \frac{5}{13}$.

3. Να βρεις τις εξισώσεις εφαπτομένης της έλλειψης $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, όταν:

α. είναι παράλληλες στην ευθεία $y = -2x + 4$

β. είναι κάθετες στην ευθεία $y = 2x + 2$

γ. διέρχονται από το σημείο $M(0,8)$.

Η γενική μορφή της εξίσωσης της εφαπτομένης θα είναι της μορφής

$$xx_1 + \frac{yy_1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4xx_1 + yy_1 = 4 \Leftrightarrow yy_1 = -4xx_1 + 4 \Leftrightarrow y = \frac{-4x_1}{y_1}x + \frac{4}{y_1}, \text{ για } y_1 \neq 0.$$

Δηλαδή η ευθεία έχει κλίση $\lambda = -4 \frac{x_1}{y_1}$.

α. Για να είναι παράλληλες οι ευθείες πρέπει να έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

Οπότε έχουμε $-2 = -4 \frac{x_1}{y_1} \Leftrightarrow y_1 = 2x_1$.

Το σημείο (x_1, y_1) είναι σημείο της έλλειψης, συνεπώς θα ικανοποιεί την εξίσωσή της.

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \xrightarrow{y=2x} x^2 + \frac{4x^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και αντίστοιχα $y = \pm \sqrt{2}$

Δηλαδή προκύπτουν δύο εφαπτόμενες ευθείες, των σημείων $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ και $A'(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$.

β. Για να είναι κάθετες οι ευθείες πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης να έχουν γινόμενο -1.

$$\text{Οπότε έχουμε } 2 \cdot \left(-4 \frac{x_1}{y_1}\right) = 1 \Leftrightarrow y_1 = -8x_1$$

Το σημείο (x_1, y_1) είναι σημείο της έλλειψης, συνεπώς θα ικανοποιεί την εξίσωσή της.

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \xrightarrow{y=-8x} x^2 + \frac{64x^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 17x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{17}}{17} \text{ και αντίστοιχα } y = \pm \frac{8\sqrt{17}}{17}$$

Δηλαδή προκύπτουν δύο εφαπτόμενες ευθείες, των σημείων $A\left(\frac{\sqrt{17}}{17}, -\frac{8\sqrt{17}}{17}\right)$ και

$$A'\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}, \frac{8\sqrt{17}}{17}\right).$$

γ. Αφού η εφαπτόμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο $M(0,8)$ θα έχουμε

$$0 \cdot x_1 + \frac{8y_1}{4} = 1 \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{2}, \text{ και αφού το } (x_1, y_1) \text{ είναι σημείο της έλλειψης θα έχουμε}$$

$$\text{αντίστοιχα } x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + \frac{\frac{1}{4}}{4} = 1 \Leftrightarrow x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

Δηλαδή προκύπτει η εφαπτομένη του σημείου $A(0, \frac{1}{2})$.

4. Να βρεις τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$, των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα σημεία $E(4,0)$ και $E'(-4,0)$ είναι σταθερό και ίσο με 10.

Η απόσταση (ME) είναι ίση με $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ και αντίστοιχα η απόσταση (ME') είναι ίση με $\sqrt{(x+4)^2 + y^2}$

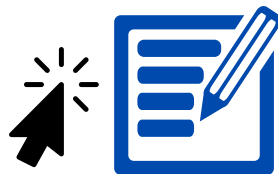
Θα είναι:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} &= 10 \\
\sqrt{(x+4)^2 + y^2} &= 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\
(x+4)^2 + y^2 &= \left(10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2}\right)^2 \\
(x+4)^2 + y^2 &= 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + (x-4)^2 + y^2 \\
x^2 + 8x + 16 &= 100 - 20 \cdot \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + x^2 - 8x + 16 \\
8x + 8x - 100 &= -20 \cdot \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\
16x - 100 &= -20 \cdot \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\
4x - 25 &= -5 \cdot \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\
(4x - 25)^2 &= (-5 \cdot \sqrt{(x-4)^2 + y^2})^2 \\
16x^2 - 200x + 625 &= 25((x-4)^2 + y^2) \\
16x^2 - 200x + 625 &= 25(x^2 - 8x + 16 + y^2) \\
16x^2 - 200x + 625 &= 25x^2 - 200x + 400 + 25y^2 \\
25x^2 - 16x^2 + 25y^2 &= 625 - 400 \\
9x^2 + 25y^2 &= 225 \\
\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} &= 1
\end{aligned}$$





3.4 Υπερβολή



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποιος είναι ο ορισμός της υπερβολής;

Υπερβολή με εστίες E και E' είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα σημεία E και E' είναι σταθερή και μικρότερη από την απόσταση (EE') .

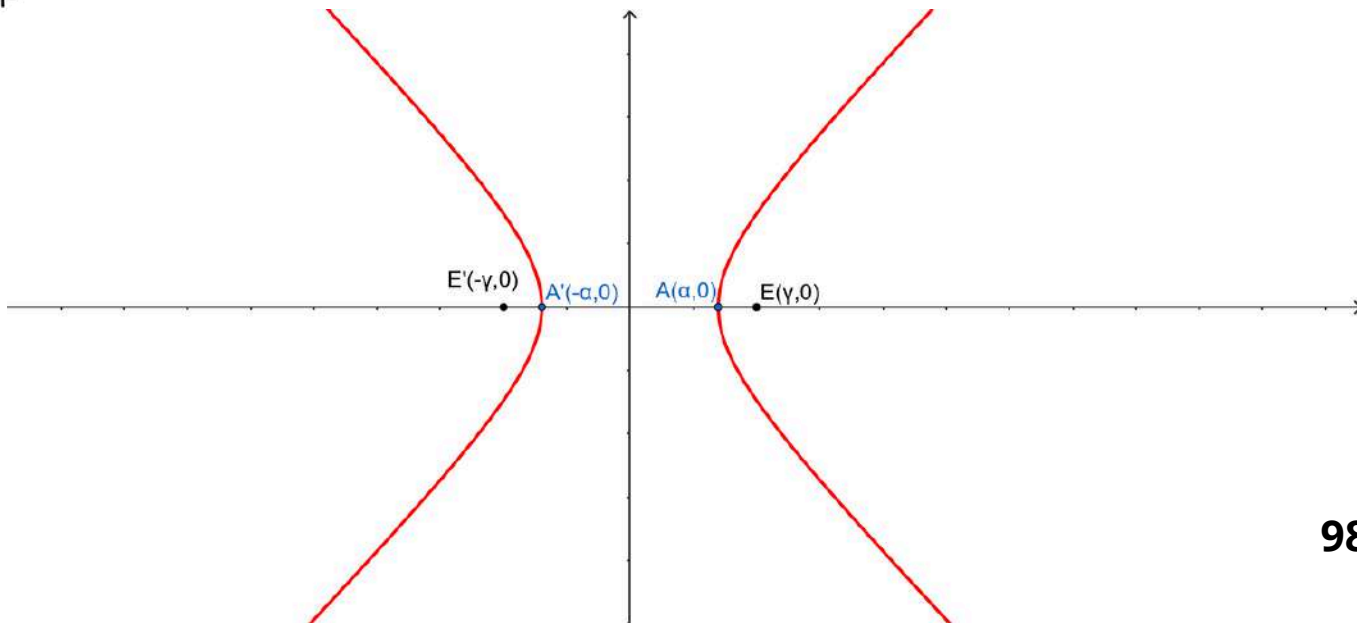
Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων συμβολίζεται με $2a$ και η απόσταση των ευθειών με 2γ . Η απόσταση (EE') ονομάζεται εστιακή απόσταση της υπερβολής.

0

2. Ποια είναι η εξίσωση της υπερβολής;

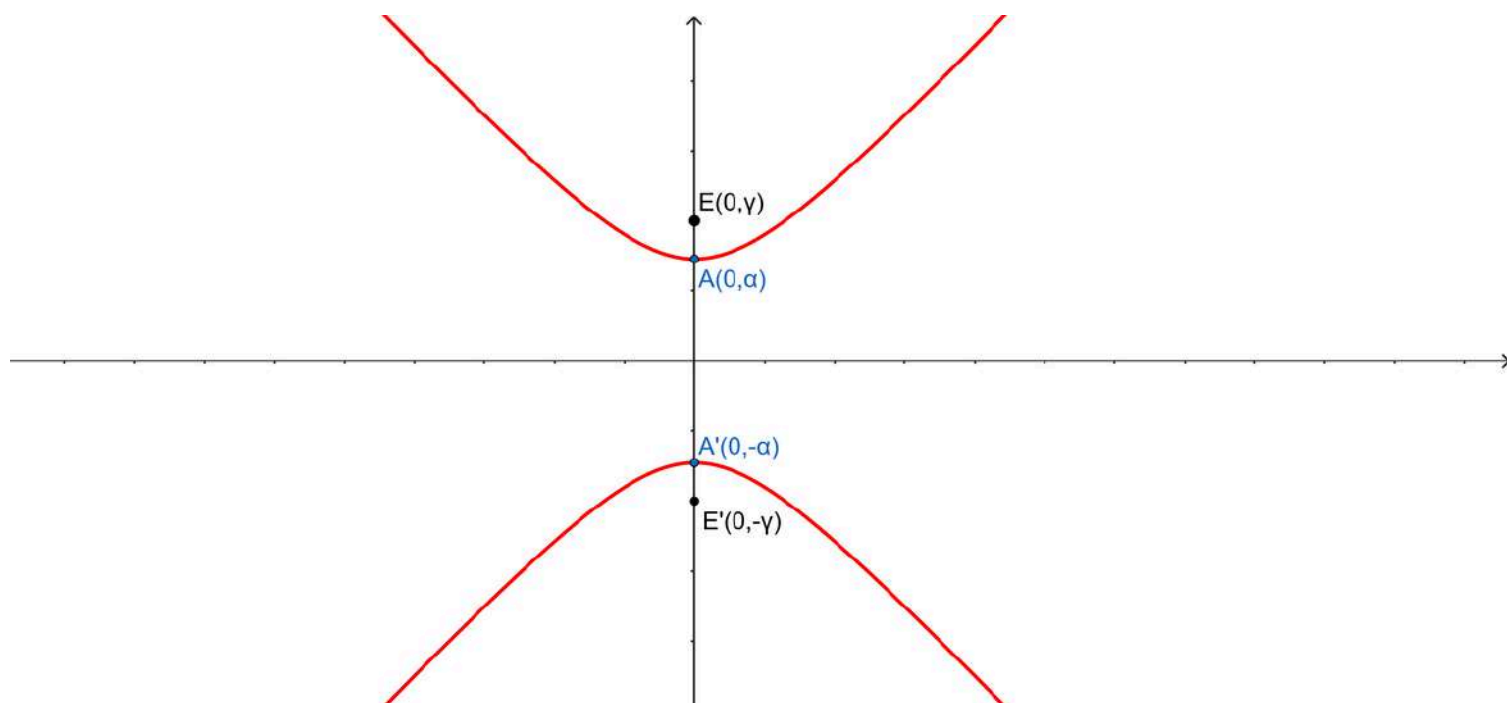
Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ και διαφορά $2a$ είναι:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ με } \beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$$



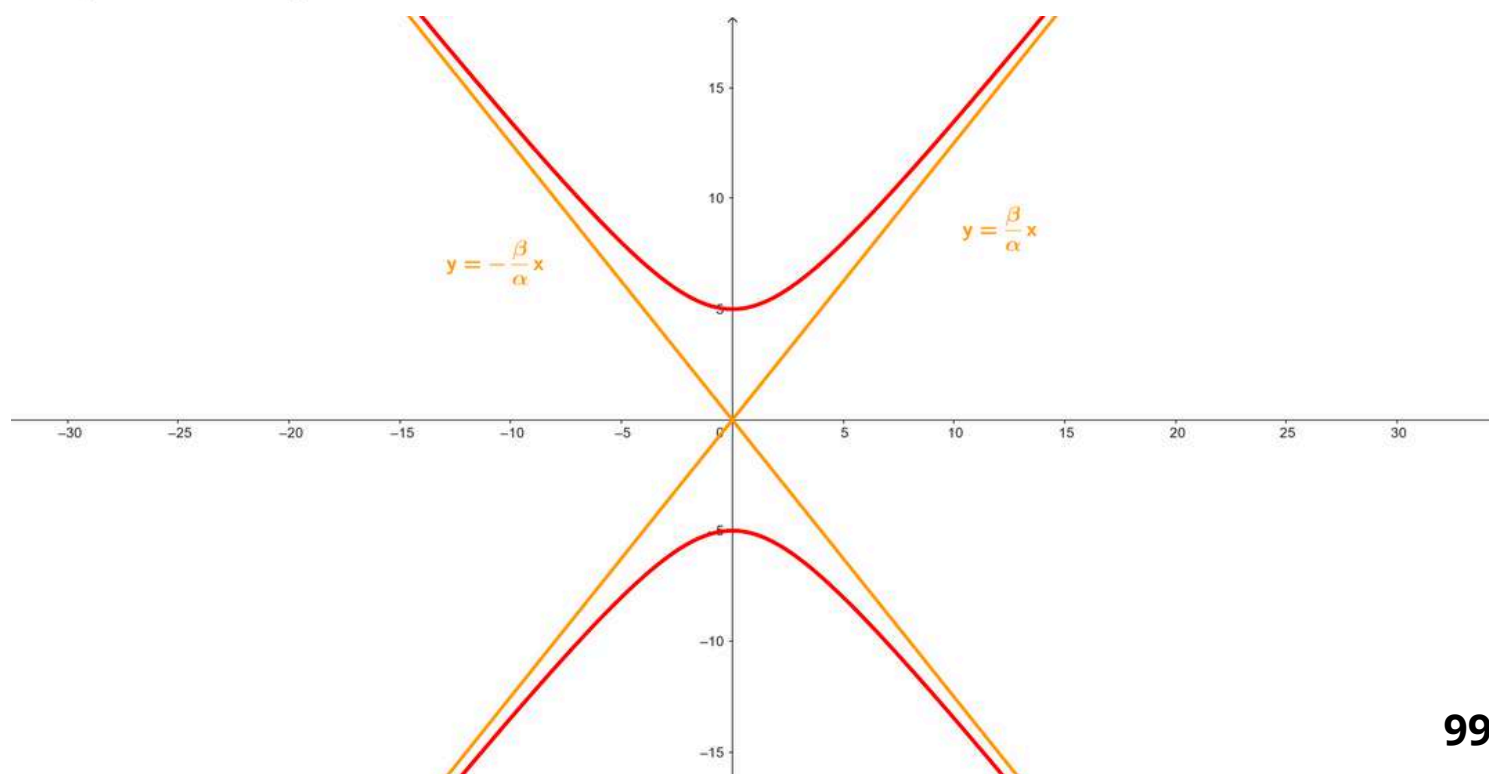
Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες τα σημεία $E(0,\gamma)$ και $E'(0,-\gamma)$ και διαφορά $2a$ είναι:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \text{ με } \beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$$

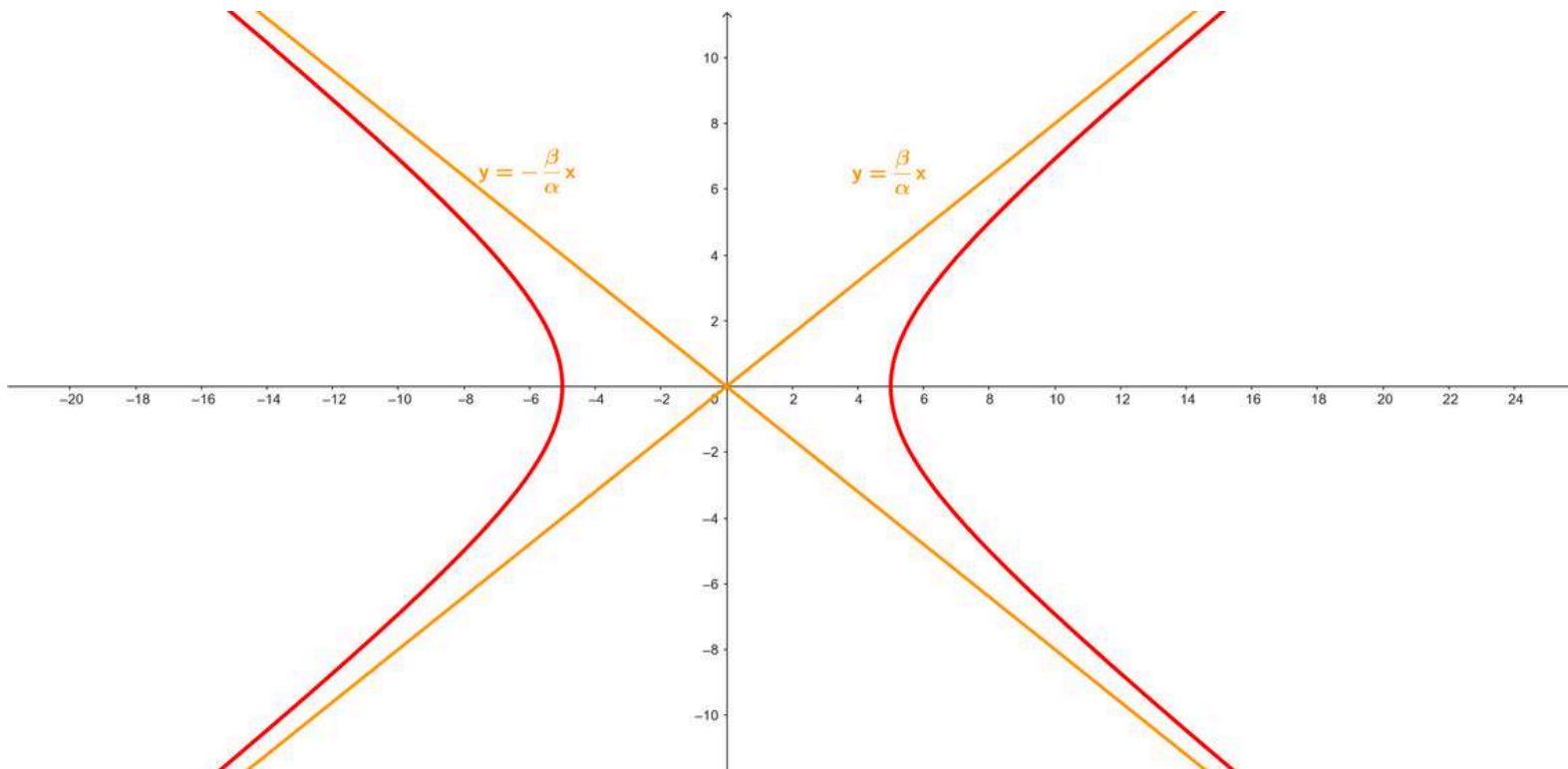


3. Τι ονομάζουμε ασύμπτωτες της υπερβολής;

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, με $\beta = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$ είναι οι ευθείες $y = \frac{\beta}{a}x$ και $y = -\frac{\beta}{a}x$.



Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, με $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$ είναι οι ευθείες $y = \frac{\alpha}{\beta}x$ και $y = -\frac{\alpha}{\beta}x$.



4. Ποιες είναι οι ιδιότητες της υπερβολής;

- α.** Η υπερβολή έχει άξονες συμμετρίας τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.
- β.** Τα σημεία $A(\alpha,0)$ και $A'(-\alpha,0)$ λέγονται κορυφές της υπερβολής (αντίστοιχα τα $(0,\alpha)$ και $(0,-\alpha)$).
- γ.** Η γραφική παράσταση της υπερβολής αποτελείται από δύο ξεχωριστούς κλάδους.

5. Ποια είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής;

Εκκεντρότητα e της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, με $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ονομάζουμε τον λόγο $e = \frac{c}{a} > 1$. Όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα, τόσο πιο «κλειστή» είναι η υπερβολή.

6. Ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της υπερβολής;

Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, με $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ σε ένα σημείο $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, με $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ σε ένα σημείο $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$.

7. Τι περιγράφει η ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής;

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο $M(x_1, y_1)$ διχοτομεί την γωνία $\widehat{EME'}$, όπου E και E' είναι οι εστίες της υπερβολής.

**1. Να βρεις την εξίσωση της υπερβολής όταν:****α. έχει εστίες τα σημεία E (12,0) και E' (-12,0) και κορυφές τα A(4,0) και A'(-4,0).****β. έχει εστίες τα σημεία E (0,5) και E' (0,-5) και εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{5}{4}$.****γ. έχει εστίες E (13,0) και E' (-13,0) και απόσταση κορυφών ίση με 24 μονάδες.****α.** Η υπερβολή θα έχει $\gamma=12$ και $\alpha=4$. Βρίσκουμε ότι $\beta = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128}$ και για την υπερβολή έχουμε $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{128} = 1$.**β.** Η υπερβολή θα έχει $\gamma=5$ και από την εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{4}$ βρίσκουμε ότι $\alpha=4$ Για το β έχουμε ότι $\beta = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ και για την υπερβολή έχουμε $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.**γ.** Η υπερβολή θα έχει $\gamma=13$ και επειδή η απόσταση των κορυφών είναι 24, παίρνουμε $2\alpha=24$, δηλαδή $\alpha=12$.Βρίσκουμε ότι $\beta = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ και για την υπερβολή έχουμε

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

2. Να βρεις τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής:

α. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

β. $4y^2 - 3x^2 = 12$

α. Έχουμε $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, δηλαδή $a=4$ και $b=3$.

Για το γ παίρνουμε $b^2 = \gamma^2 - a^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 25 \Rightarrow \gamma = 5$

Οι εστίες της υπερβολής είναι $E(5,0)$ και $E'(-5,0)$.

Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{5}{4}$.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \frac{b}{a}x$ και $y = -\frac{b}{a}x$ δηλαδή

$$y = \frac{3}{4}x \text{ και } y = -\frac{3}{4}x.$$

β. Αρχικά πρέπει να γράψουμε την εξίσωση της υπερβολής στην «κανονική» της μορφή.

Έχουμε $4y^2 - 3x^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{\sqrt{3}^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$ συνεπώς έχουμε $a = \sqrt{3}, b=2$ και για το

γ παίρνουμε $b^2 = \gamma^2 - a^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 7 \Rightarrow \gamma = \sqrt{7}$.

Οι εστίες της υπερβολής είναι $E(0, \sqrt{7})$ και $E'(0, -\sqrt{7})$.

Η εκκεντρότητα της υπερβολής είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \frac{a}{b}x$ και $y = -\frac{a}{b}x$ δηλαδή

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x \text{ και } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, για την οποία γνωρίζουμε ότι η ασύμπτωτη ευθεία $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$. Ποια είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής;

Αφού η ασύμπτωτη ευθεία $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ καταλαβαίνουμε ότι η κλίση της θα είναι ίση με $\tan 45^\circ = 1$.

Οπότε έχουμε $\frac{\beta}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \beta = \alpha = 4$ Πλέον μπορούμε να βρούμε το γ ,

$$\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 32 \Rightarrow \gamma = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Η εκκεντρότητα της υπερβολής θα είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$.

4. Να βρεις της εφαπτόμενη της υπερβολής $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ όταν:

α. διέρχεται από το σημείο $\Sigma(\sqrt{32}, 9)$ της υπερβολής.

β. διέρχεται από το σημείο $K(2, 0)$.

α. Αφού διέρχεται από το σημείο $\Sigma(\sqrt{32}, 9)$ της υπερβολής παίρνουμε κατευθείαν τον τύπο $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$ και προκύπτει $\frac{\sqrt{32}x}{16} - \frac{9y}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}x - y - 1 = 0$.

β. Αφού διέρχεται από το σημείο $K(2,0)$ πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ οπότε θα πάρουμε $\frac{2x_1}{16} - \frac{0y_1}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{8} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 8$, και επειδή το σημείο $M(x_1, y_1)$ ανήκει στην υπερβολή, θα ικανοποιεί και την εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ οπότε έχουμε $\frac{8^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{64}{16} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{9} = 3 \Leftrightarrow y^2 = 27 \Leftrightarrow y = \pm 3\sqrt{3}$.

Δηλαδή παίρνουμε τις δύο εφαπτόμενες:

$$\frac{8x}{16} - \frac{3\sqrt{3}y}{9} = 1 \text{ ή } \frac{8x}{16} + \frac{3\sqrt{3}y}{9} = 1$$

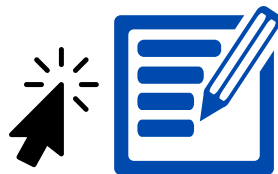
$$\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}y}{3} = 1 \text{ ή } \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{3} = 1$$

$$3x - 2\sqrt{3}y - 6 = 0 \text{ ή } 3x + 2\sqrt{3}y - 6 = 0$$





3.5 Η εξίσωση $Ax^2 + By^2 + Γx + Δy + E$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις ευθείας και κωνικής τομής;

Η κωνική τομή έχει μορφή $Ax^2 + By^2 + Γx + Δy + E$ και η ευθεία έχει μορφή $y = λx + β$.

Αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση $Ax^2 + By^2 + Γx + Δy + E$ αντί για y , $λx + β$ θα εμφανιστεί μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς x .

- Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες ή μια ρίζα (αν η εξίσωση αναγάγεται σε εξίσωση πρώτου βαθμού) τότε η ευθεία και η κωνική τομή τέμνονται.
- Αν η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα τότε η ευθεία εφάπτεται της κωνικής τομής.
- Αν η εξίσωση δεν έχει ρίζες, τότε η ευθεία και η κωνική τομή δεν έχουν κοινά σημεία.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Τι παριστάνει στο επίπεδο καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις;

α. $y^2 - 8x + 8 = 0$

β. $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 25 = 0$

$$\alpha. y^2 - 8x + 8 = 0$$

$$y^2 = 8x - 8$$

$$y^2 = 8(x - 1)$$

και αν θέσουμε $x-1=X$, παίρνουμε $y^2 = 8X$, επομένως η εξίσωση εκφράζει μια παραβολή με κορυφή το σημείο $K(-1,0)$ και άξονα την ευθεία $y=0$.

$$\beta. x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 - 25 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$$

Οπότε προκύπτει κύκλος με κέντρο το σημείο $K(2,-1)$ και ακτίνα $\rho=5$.

2. Σε ποια περίπτωση ο κύκλος $x^2 + y^2 = 16$ εφάπτεται στην ευθεία $x=y-k$;

Για να εφάπτεται ο κύκλος της ευθείας πρέπει λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει να πάρουμε Διακρίνουσα $\Delta=0$, δηλαδή μια διπλή ρίζα.

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 16 \\ x = y - k \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (y - k)^2 + y^2 = 16 \\ x = y - k \end{array} \right\} \begin{array}{l} y^2 - 2ky + k^2 + y^2 = 16 \\ x = y - k \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2y^2 - 2ky + k^2 - 16 = 0 \\ x = y - k \end{array} \right\} \Delta = (-2k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 16)$$

Και για την διακρίνουσα έχουμε

$$\Delta = 4k^2 - 8 \cdot (k^2 - 16) = 4k^2 - 8k^2 + 128 = 0$$

$$-4k^2 = -128$$

$$k^2 = 32$$

$$k = \pm \sqrt{32}$$

Συνεπώς η ευθεία εφάπτεται του κύκλου αν $k = \pm \sqrt{32}$, δηλαδή σε δύο σημεία του κύκλου.



ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΚΔΟΣΗΣ:
Πρόδρομος Μιχαλάκης

© ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΛΥΣΑΡΙ | LISARI.GR
& Πρόδρομος Μιχαλάκης



Πανόρμου 14 & Σμύρνης,
12242, Αιγάλεω
τηλ.: 210 5982 614
e-mail: info@lisari.gr
www.lisari.gr

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται από τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και από τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η χωρίς γραπτή άδεια του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή οποιοδήποτε μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

