

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

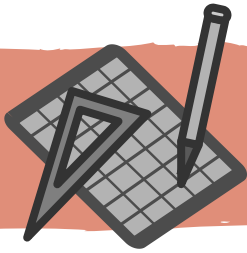


Διαδραστικό Βοήθημα

Θεωρία - VideoΜαθήματα - Ασκήσεις

1

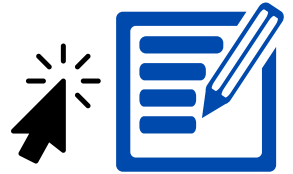
οι φυσικοί αριθμοί



1.1. Φυσικοί αριθμοί - Διάταξη φυσικών - Στρογγυλοποίηση

1. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται φυσικοί;

Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, ..., 100, 101, ..., 2022, ... ονομάζονται φυσικοί και συμβολίζονται με $\mathbb{N}$. Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και έναν προηγούμενο φυσικό αριθμό, εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο, το 1.



2. Ποιοι φυσικοί αριθμοί ονομάζονται άρτιοι και ποιοι περιττοί;

ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άρτιοι λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 2. (π.χ. 0, 2, 4, 6, 8, ...)

Περιττοί λέγονται οι αριθμοί που δεν διαιρούνται με το 2. (π.χ. 1, 3, 5, 6, 7, 9, ...)

3. Τι γνωρίζετε για το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και την αξία των ψηφίων;

- Στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης δίνεται η δυνατότητα να σχηματίζουμε το απεριόριστο πλήθος των φυσικών αριθμών χρησιμοποιώντας μόνο τα δέκα γνωστά ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Η αξία ενός ψηφίου καθορίζεται από την θέση που κατέχει.

ΜΕ	ΕΧ	ΔΧ	ΜΧ	Ε	Δ	Μ
ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΩΝ	ΕΚΑΤΟΝΤΑΔΕΣ ΧΙΛΙΑΔΩΝ	ΔΕΚΑΔΕΣ ΧΙΛΙΑΔΩΝ	ΜΟΝΑΔΕΣ ΧΙΛΙΑΔΩΝ	ΕΚΑΤΟΝΤΑΔΕΣ	ΔΕΚΑΔΕΣ	ΜΟΝΑΔΕΣ

4. Πώς συγκρίνουμε αριθμούς;

Για να συγκρίνουμε φυσικούς αριθμούς μπορούμε χρησιμοποιούμε τα εξής σύμβολα:

το = που σημαίνει ίσος με.

το < που σημαίνει μικρότερος από.

το > που σημαίνει μεγαλύτερος από.

- Αν δύο αριθμοί έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων, συγκρίνουμε τα αντίστοιχα ψηφία της μεγαλύτερης τάξης.
- Αν δύο αριθμοί δεν έχουν το ίδιο πλήθος ψηφίων τότε μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει τα περισσότερα ψηφία.

Υπενθύμιση:

Αύξουσα σειρά: Διατάσσουμε τους αριθμούς από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο χρησιμοποιώντας το σύμβολο < μεταξύ τους.

Φθίνουσα σειρά: Διατάσσουμε τους αριθμούς από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο χρησιμοποιώντας το σύμβολο > μεταξύ τους.

5. Πώς στρογγυλοποιούμε αριθμούς;

Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν φυσικό αριθμό:

- Προσδιορίζουμε την τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση και υπογραμμίζουμε το αντίστοιχο ψηφίο.
- Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης (δηλαδή το ψηφίο που βρίσκεται στα δεξιά του υπογραμμισμένου).

Αν αυτό είναι:

- Μικρότερο του 5 (δηλαδή 0, 1, 2, 3 ή 4) τότε το υπογραμμισμένο ψηφίο παραμένει ίδιο και τα ψηφία δεξιά του μηδενίζονται.
- Μεγαλύτερο ή ίσο του 5 (δηλαδή 5, 6, 7, 8 ή 9) τότε το υπογραμμισμένο ψηφίο αυξάνεται κατά μια μονάδα και τα ψηφία δεξιά του μηδενίζονται.

6. Πώς αναπαριστούμε τους φυσικούς αριθμούς σε σημεία μιας ευθείας;

Διαλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο O μιας ευθείας, που το λέμε αρχή, για να παραστήσουμε τον αριθμό 0.

Η απόσταση OA παριστάνει τον αριθμό 1.

Με μονάδα μέτρησης το OA , βρίσκουμε τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς 2, 3, 4, ... τα οποία ονομάζονται τετμημένες των σημείων $B, \Gamma, \Delta, \dots$, αντίστοιχα.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i. 28.396 και 15.731

Ο αριθμός 28.396 έχει περισσότερα ψηφία από τον αριθμό 15.731, οπότε: $28.396 > 15.731$

ii. 39.361 και 39.456

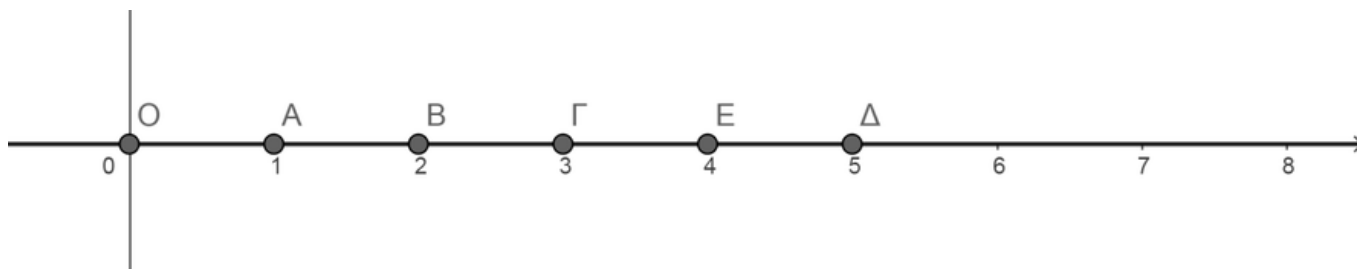
Οι αριθμοί έχουν ίδιο πλήθος ψηφίων οπότε συγκρίνουμε τα ψηφία ίδιας τάξης, $3 < 4$ οπότε: $39.361 < 39.456$



2. Κατασκευάστε μια ευθεία. Ορίστε ένα σημείο O ως αρχή και με μονάδα $OA = 1,5 \text{ cm}$

1. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων B και Γ .

2. Σε ποιο σημείο αντιστοιχεί ο αριθμός 5;



I) Το σημείο B έχει τετμημένη 2, άρα αντιστοιχεί στον αριθμό 2.
Το σημείο Γ έχει τετμημένη 3, άρα αντιστοιχεί στον αριθμό 3.

II) Ο αριθμός 5 αποτελεί τετμημένη του σημείου Δ .

3. Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 31.649 στις πλησιέστερες:

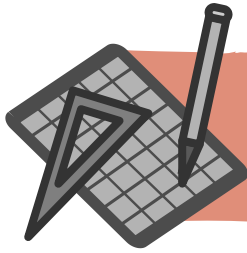
εκατοντάδες: 31.649 $\rightarrow$ 31.600

Το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης είναι το 4, $4 < 5$, άρα το υπογραμμισμένο ψηφίο παραμένει ίδιο και τα υπόλοιπα δεξιά του μηδενίζονται.

χιλιάδες: 31.649 $\rightarrow$ 32.000

Το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης είναι το 6, $6 > 5$, άρα το υπογραμμισμένο ψηφίο αυξάνεται κατά 1 και τα υπόλοιπα δεξιά του μηδενίζονται.





Α.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

1. Πώς ονομάζονται οι όροι και το αποτέλεσμα της πρόσθεσης; Να αναφέρετε τις ιδιότητες της.

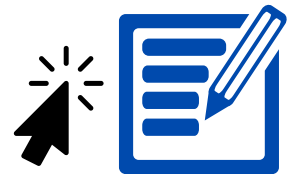
- Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης δύο ή περισσότερων αριθμών λέγεται άθροισμα και οι αριθμοί λέγονται προσθετέοι.
- Ιδιότητες πρόσθεσης:



$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \text{ (αντιμεταθετική)}$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \text{ (προσεταιριστική)}$$

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha \text{ (το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης)}$$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Πώς ονομάζονται οι όροι και το αποτέλεσμα της αφαίρεσης;

- Το αποτέλεσμα της αφαίρεσης δύο αριθμών λέγεται διαφορά (Δ) και οι αριθμοί που αφαιρούνται λέγονται: ο πρώτος Μειωτέος (M) και ο δεύτερος αφαιρετέος (A).

$$M - A = \Delta$$

- Στους φυσικούς αριθμούς ο αφαιρετέος A πρέπει να είναι πάντα μικρότερος ή ίσος του μειωτέου M , διαφορετικά δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί η πράξη της αφαίρεσης.

3. Πώς ονομάζονται οι όροι και το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού; Να αναφέρετε τις ιδιότητες του.

- Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού δύο ή περισσότερων αριθμών λέγεται γινόμενο και οι αριθμοί λέγονται παράγοντες.
- Ιδιότητες πολλαπλασιασμού:



$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha \text{ (αντιμεταθετική)}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \text{ (προσεταιριστική)}$$

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha \text{ (το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού)}$$

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \text{ (επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση)}$$

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma \text{ (επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση)}$$

4. Τι είναι αριθμητική παράσταση και με ποια είναι η προτεραιότητα των πράξεων;

- Αριθμητική παράσταση ονομάζεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.
- Σε μία αριθμητική παράσταση συμφωνούμε η προτεραιότητα των πράξεων να είναι η ακόλουθη:

1. Εκτέλεση πολλαπλασιασμών.

2. Εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.



5. Τι ιδιότητες έχει η επιμεριστική ιδιότητα;

I. Επιμεριστική ιδιότητα:

- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ (επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση)
- $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$ (επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση)

II. Αντίστροφη χρήση επιμεριστικής ιδιότητας:

- $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$
- $\alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta - \gamma)$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:



- Αν σε μια παράσταση υπάρχουν προσθετέοι που το άθροισμά τους ισούται με το 10, 100 ή 1.000 κ.ο.κ. επιλέγουμε να εκτελέσουμε πρώτα την πρόσθεση μεταξύ αυτών των όρων.
- Σε παραστάσεις που υπάρχουν μόνο προσθέσεις και αφαιρέσεις εκτελούμε τις πράξεις με την σειρά που εμφανίζονται. Γράφουμε το αποτέλεσμα που προκύπτει από την πράξη που σημειώνεται μόνο μεταξύ των δυο πρώτων όρων και έπειτα επαναλαμβάνουμε τους υπόλοιπους όρους.

i. $18 + 149 + 31 + 82 + 69 =$

$$= (18 + 69) + 149 + (31 + 69) =$$

$$= 100 + 149 + 100 =$$

$$= (100 + 100) + 149 =$$

$$= 200 + 149 = 349$$

ii. $347 - 256 + 13 - 27 =$

$$= 91 + 13 - 27 =$$

$$= 104 - 27 =$$

$$= 77$$

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

- Για να πολλαπλασιάσουμε ένα φυσικό αριθμό με το 10, 100, 1.000 γράφουμε τον αριθμό και στο τέλος προσθέτουμε τόσα μηδενικά όσα έχουν αντίστοιχα το 10, 100, 1.000.
- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο φυσικούς αριθμούς που έχουν στο τέλος μηδενικά πολλαπλασιάζουμε τους αριθμούς χωρίς τα μηδενικά και στο γινόμενο βάζουμε τόσα μηδενικά όσα είχαν οι δύο αριθμοί.

i. $25 \cdot 100 = 2.500$

ii. $23.479 \cdot 1.000 = 23.479.000$

iii. $49 \cdot 23.000 = 1.127.000$

(αρχικά πολλαπλασιάζω $49 \cdot 23 = 1.127$ και μετά προσθέτω τρία μηδενικά στο τέλος του αριθμού)

iv. $598.000 \cdot 630.000 = 376.740.000.000$

($598 \cdot 63 = 37.674$ και στο τέλος του αριθμού προσθέτω επτά μηδενικά)

3. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $17 \cdot 40 - 21 + 38 \cdot 94 =$

$= 680 - 21 + 3.572 =$

$= 659 + 3.572 =$

$= 4.231$

ii. $(137 - 61) \cdot 23 - 2 \cdot 48 =$

$= 76 \cdot 23 - 2 \cdot 48 =$

$= 1.748 - 96 =$

$= 1.652$

iii. $(57 \cdot 4 - 4) + 40 \cdot 34 - 12 =$

$= (228 - 4) + 40 \cdot 34 - 12 =$

$= 224 + 40 \cdot 34 - 12 =$

$= 224 + 1.360 - 12 =$

$= 1.584 - 12 =$

$= 1.572$

iv. $[(2 \cdot 73 + 1) - 7] + 12 \cdot 4 =$

$= [(146 + 1) - 7] + 12 \cdot 4 =$

$= (147 - 7) + 12 \cdot 4 =$

$= 140 + 12 \cdot 4 =$

$= 140 + 48 =$

$= 188$

(εκτελούμε μόνο τους πολλαπλασιασμούς)

(έχουμε μόνο προσθέσεις και αφαιρέσεις οπότε εκτελούμε την πράξη μόνο μεταξύ των δύο πρώτων όρων)

4. Να εκτελέσετε τις πράξεις με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας:

i. $2 \cdot (21 + 3) =$

$$= 2 \cdot 21 + 2 \cdot 3 =$$

$$= 42 + 6 =$$

$$= 48$$

ii. $5 \cdot (11 - 6) =$

$$= 5 \cdot 11 - 5 \cdot 6 =$$

$$= 55 - 30 =$$

$$= 25$$

iii. $28 \cdot 31 + 28 \cdot 69 =$

$$= 28 \cdot (31 + 69) =$$

$$= 28 \cdot 100 =$$

$$= 2.800$$

iv. $35 \cdot 293 - 35 \cdot 93 =$

$$= 35 \cdot (293 - 93) =$$

$$= 35 \cdot 200 =$$

$$= 7.000$$

v. $54 \cdot 1.007 =$

$$= 54 \cdot (1.000 + 7) =$$

$$= 54 \cdot 1.000 + 54 \cdot 7 =$$

$$= 54.000 + 378 =$$

$$= 54.378$$

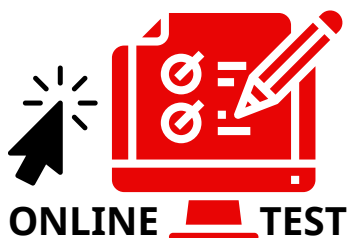
vi. $86 \cdot 9.992 =$

$$= 86 \cdot (10.000 - 8) =$$

$$= 86 \cdot 10.000 - 86 \cdot 8 =$$

$$= 860.000 - 688 =$$

$$= 859.312$$





1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

1. Τι ονομάζουμε δύναμη ενός φυσικού αριθμού;

Το γινόμενο $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ που έχει n παράγοντες ίσους με το a , λέγεται δύναμη του a στην n ή νιοστή δύναμη του a και συμβολίζεται a^n . Το a λέγεται βάση της δύναμης και το n λέγεται εκθέτης.

2. Πως ονομάζονται οι δυνάμεις;

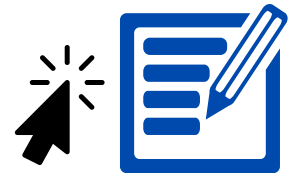
a^1 : a στην πρώτη

a^2 : a στην δεύτερα ή a στο τετράγωνο

a^3 : a στην τρίτη ή a στον κύβο

a^4 : a στην τετάρτη

a^5 : a στην πέμπτη



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

3. Να αναφέρετε τις ιδιότητες των δυνάμεων;

$$a^1 = a$$

$$0^n = 0$$

$$1^n = 1$$

$$a^0 = 1$$

4. Να αναφέρετε την σειρά με την οποία εκτελούμε τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση;

Σε μια αριθμητική παράσταση συμφωνούμε η προτεραιότητα των πράξεων να είναι η ακόλουθη:

- Υπολογισμός δυνάμεων.
- Εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων.
- Εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, εκτελούμε **πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.**

5. Ποιες είναι οι βασικές δυνάμεις;

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a^2	122	144	169	196	225	256	289	324	361	400

6. Πώς υπολογίζουμε δυνάμεις;

Για να υπολογίσουμε μια δύναμη πολλαπλασιάζουμε την βάση με τον εαυτό της όσες φορές μας υποδεικνύει ο εκθέτης.

7. Πώς υπολογίζουμε δυνάμεις του 10;

- Για να υπολογίσουμε δυνάμεις του 10, γράφουμε το 1 και δεξιά του γράφουμε τόσα μηδενικά όσα μας υποδεικνύει ο εκθέτης της δύναμης.

- Για να υπολογίσουμε μια δύναμη ενός αριθμού που έχει στο τέλος μηδενικά βρίσκουμε την δύναμη του αριθμού χωρίς τα μηδενικά και έπειτα δεξιά του βάζουμε τόσα μηδενικά, όσα είναι το πλήθος των μηδενικών του αριθμού επί τον εκθέτη της δύναμης.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

i. $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$

ii. $11^2 = 11 \cdot 11 = 121$

iii. $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

iv. $2022^1 = 2022$

v. $0^{192} = 0$

vi. $1^{896} = 1$



2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

i. $10^6 = 1.000.000$

ii. $100^3 = 1.000.000$ (2 μηδενικά $\cdot$ 3 = 6 μηδενικά)

iii. $30^2 = 900$ ($3^2 = 9$ και 1 μηδέν $\cdot$ 2 = 2 μηδενικά)

iv. $500^4 = 62.500.000.000$

3. Να γράψετε τον αριθμό 12.973 με την χρήση δυνάμεων του 10

$$\begin{aligned}12.973 &= 1 \text{ δ. χιλιάδων} + 2 \text{ μ. χιλιάδων} + 9 \text{ εκατοντάδες} + 7 \text{ δεκάδες} + 3 \text{ μονάδες} = \\&= 1 \cdot 10.000 + 2 \cdot 1.000 + 9 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = \\&= 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0\end{aligned}$$

4. Να γράψετε πιο σύντομα τις παρακάτω παραστάσεις:

Μια παράσταση όμοιων όρων, η οποία είναι:

- άθροισμα μπορεί να μετατραπεί σε γινόμενο παραγόντων. Ο ένας παράγοντας θα είναι το πλήθος των όρων και ο άλλος ο όμοιος όρος.
- γινόμενο μπορεί να μετατραπεί σε δύναμη. Η βάση της δύναμης θα είναι ο όμοιος όρος και ο εκθέτης της θα είναι το πλήθος των όρων.

i. $x + x + x + x = 4 \cdot x$

ii. $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$

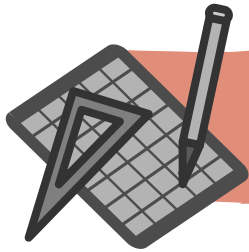
5. Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2^3 \cdot 3^2 - 4^2 =$
 $= 8 \cdot 9 - 16 =$
 $= 72 - 16 =$
 $= 56$

ii. $11^2 - (3^2 - 2^3)^{2022} + 3 \cdot 5^3 =$
 $= 121 - (9 - 8)^{2022} + 3 \cdot 125 =$
 $= 121 - 1^{2022} + 3 \cdot 125 =$
 $= 121 - 1 + 3 \cdot 125 =$
 $= 121 - 1 + 375 =$
 $= 120 + 375 =$
 $= 495$

$$\begin{aligned}
 \text{iii. } & (2^3 - 8)^{23} + 4 \cdot [2 - (3^2 - 2^3)]^{506} + 3 \cdot 12^2 = \\
 & = (8 - 8)^{23} + 4 \cdot [2 - (9 - 8)]^{506} + 3 \cdot 144 = \\
 & = 0^{23} + 4 \cdot (2 - 1)^{506} + 3 \cdot 144 = \\
 & = 0^{23} + 4 \cdot 1^{506} + 3 \cdot 144 = \\
 & = 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 144 = \\
 & = 0 + 4 + 432 = \\
 & = 4 + 432 = \\
 & = 436
 \end{aligned}$$



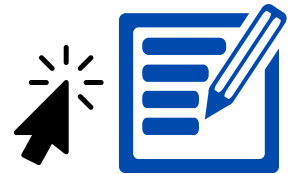


1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

1. Τι ονομάζουμε Ευκλείδεια Διαίρεση;

Όταν δοθούν δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ , τότε υπάρχουν δύο άλλοι φυσικοί π και υ τέτοιοι ώστε να ισχύει η σχέση $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < \delta$. Αυτή η σχέση ονομάζεται Ευκλείδεια Διαίρεση. Ο Δ ονομάζεται διαιρετέος, ο δ διαιρέτης, ο π πηλίκο και ο υ υπόλοιπο.

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \text{ με } 0 \leq \upsilon < \delta$$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

- Αν ισχύει $\Delta = \delta \cdot \pi$, δηλαδή $\upsilon=0$, η διαίρεση ονομάζεται τέλεια.
- Σε κάθε περίπτωση ο διαιρέτης (δ) θα πρέπει να είναι διάφορος του μηδενός, $\delta \neq 0$.

2. Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες της Ευκλείδειας Διαίρεσης;

i. $\delta \neq 0$ (Ο διαιρέτης δεν μπορεί να είναι 0)

ii. $\alpha : \alpha = 1$

iii. $\alpha : 1 = \alpha$

iv. $0 : \alpha = 0$

v. $0 \leq \upsilon < \delta$ (το υπόλοιπο είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός και μικρότερο του διαιρέτη)

Αν $\upsilon = 0$, τότε λέμε ότι έχουμε Τέλεια διαίρεση: $\Delta = \delta \cdot \pi$.

! Παρατήρηση:

Στους φυσικούς αριθμούς η τέλεια διαίρεση είναι πράξη αντίστροφη του πολλαπλασιασμού.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να κάνεις τη διαίρεση και την επαλήθευσή της.

Σε κάθε διαίρεση:

- Το υπόλοιπο είναι αριθμός μικρότερος του διαιρέτη.
- Ο Διαιρετέος(Δ) είναι ίσος με το γινόμενο του διαιρέτη(δ) επί το πηλίκο(π) συν το υπόλοιπο.

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon \text{ με } 0 \leq \upsilon < \delta$$

Η παραπάνω ισότητα χρησιμοποιείται για να κάνουμε επαλήθευση της διαίρεσης.

i. $345 : 5$

$$\begin{array}{r|l} 345 & 5 \\ -30 & 69 \\ \hline 45 & \\ -45 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Επαλήθευση:

$$345 = 5 \cdot 69 + 0$$

$$345 = 345 + 0$$

$$345 = 345$$

ii. $16.377 : 159$

$$\begin{array}{r|l} 16.377 & 159 \\ -159 & 103 \\ \hline 477 & \\ -477 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Επαλήθευση:

$$16.377 = 159 \cdot 103 + 0$$

$$16.377 = 16.377 + 0$$

$$16.377 = 16.377$$

2. Να εξετάσετε, ποιες από τις παρακάτω ισότητες παριστάνουν Ευκλείδειες διαιρέσεις.

- Στην ισότητα καταγράφουμε τους όρους της διαίρεσης. Αντιστοιχούμε ποιος είναι ο Διαιρετέος(Δ), ο διαιρέτης(δ), το πηλίκο(π) και το υπόλοιπο(υ).
- Ελέγχουμε την ισότητα δύο φορές αντιστρέφοντας τον διαιρέτη με το πηλίκο.

Σε κάθε περίπτωση εξετάζουμε αν το υπόλοιπο είναι μικρότερο του διαιρέτη.

$153 = 25 \cdot 6 + 3$	$\Delta = 153$ $\delta = 25$ $\pi = 6$ $\upsilon = 3$ Το $3 < 25$. Άρα $\upsilon < \delta$. Επομένως είναι Ευκλείδεια διαίρεση.	$\Delta = 153$ $\delta = 6$ $\pi = 25$ $\upsilon = 3$ Το $3 < 6$. Άρα το $\upsilon < \delta$. Επομένως είναι Ευκλείδεια διαίρεση.
$5.935 = 85 \cdot 69 + 70$	$\Delta = 5.935$ $\delta = 85$ $\pi = 69$ $\upsilon = 70$ Το $70 < 85$. Άρα $\upsilon < \delta$. Επομένως είναι Ευκλείδεια διαίρεση.	$\Delta = 5.935$ $\delta = 69$ $\pi = 85$ $\upsilon = 70$ Το $70 > 69$. Άρα $\upsilon > \delta$. Επομένως δεν είναι Ευκλείδεια διαίρεση.
$798 = 49 \cdot 15 + 63$	$\Delta = 798$ $\delta = 49$ $\pi = 15$ $\upsilon = 63$ Το $63 > 49$. Άρα $\upsilon > \delta$. Επομένως ΔΕΝ είναι Ευκλείδεια διαίρεση.	$\Delta = 798$ $\delta = 15$ $\pi = 49$ $\upsilon = 63$ Το $63 > 15$. Άρα $\upsilon > \delta$. Επομένως ΔΕΝ είναι Ευκλείδεια διαίρεση.

3. Αν ένας αριθμός διαιρεθεί με το 25 δίνει πηλίκο 29 και υπόλοιπο 24. Να βρείτε τον αριθμό.

Έχουμε $\delta = 25$, $\pi = 29$ και $\upsilon = 24$

$$\begin{aligned}\Delta &= \delta \cdot \pi + \upsilon \\ \Delta &= 25 \cdot 29 + 24 \\ \Delta &= 725 + 24 \\ \Delta &= 749\end{aligned}$$

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 749.

4. Αν ο n είναι φυσικός αριθμός, ποια μπορεί να είναι τα υπόλοιπα της διαίρεσης $n : 4$;

Γνωρίζουμε ότι στην Ευκλείδεια διαίρεση ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα: $0 \leq \upsilon < \delta$

Στην δοσμένη διαίρεση ($n : 4$), διαιρέτης είναι ο αριθμός 4. Άρα $\delta = 4$.

Οπότε θα ισχύει: $0 \leq \upsilon < \delta$

$$0 \leq \upsilon < 4$$

Επομένως οι πιθανές τιμές του υπολοίπου είναι 0 ή 1 ή 2 ή 3

5. Αν σήμερα είναι Τετάρτη, τί ημέρα θα είναι μετά από 268 ημέρες;

Επειδή η ημέρα έχει 7 ημέρες, η Τετάρτη θα επαναλαμβάνεται κάθε 7 ημέρες.

Οπότε:

$$\begin{array}{r|l} 268 & 7 \\ -21 & 38 \\ \hline 58 & \\ -56 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\text{Άρα έχουμε: } 268 = 7 \cdot 38 + 2$$

$$268 \text{ ημέρες} = 38 \text{ εβδομάδες και } 2 \text{ ημέρες}$$

Επομένως, μετά από 268 ημέρες θα είναι Παρασκευή.

6. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{aligned}\text{i. } 9 \cdot 3^2 - 27 : 3 \cdot 2^3 &= \\ &= 9 \cdot 9 - 27 : 3 \cdot 8 = \\ &= 81 - 9 \cdot 8 = \\ &= 81 - 72 = \\ &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii. } 3 \cdot [(3^3 - 5^2) - 1]^{2022} + (4^3 - 7 \cdot 8)^3 : [(2 \cdot 8 - 4^2) : 541 + 64] &= \\ &= 3 \cdot [(27 - 25) - 1]^{2022} + (64 - 7 \cdot 8)^3 : [(2 \cdot 8 - 16) : 541 + 64] = \\ &= 3 \cdot (2 - 1)^{2022} + (64 - 56)^3 : [(16 - 16) : 541 + 64] \\ &= 3 \cdot 1^{2022} + 8^3 : (0 : 541 + 64) = \\ &= 3 \cdot 1 + 512 : (0 + 64) = \\ &= 3 \cdot 1 + 512 : 64 = \\ &= 3 + 8 = \\ &= 11\end{aligned}$$



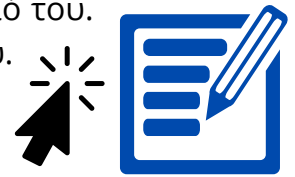


1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας – ΜΚΔ – ΕΚΠ – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

1. Τι ονομάζουμε πολλαπλάσια ενός αριθμού;

Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού a είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του με όλους τους φυσικούς αριθμούς.

- Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.
- Κάθε φυσικός αριθμός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.
- Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Τι είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών;

Το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών είναι το μικρότερο και μη μηδενικό ($\neq 0$) από τα κοινά πολλαπλάσια των αριθμών.

Το ΕΚΠ είναι μη μηδενικό ($\neq 0$) γιατί διαφορετικά για οποιουσδήποτε αριθμούς

το ΕΚΠ θα ήταν πάντοτε το 0.

3. Τι ονομάζουμε διαιρέτες ενός αριθμού;

Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού a ονομάζονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.

- Κάθε αριθμός a έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1 και a .
- Οι διαιρέτες ενός αριθμού είναι μικρότεροι ή ίσοι με αυτόν.

4. Πότε ένας αριθμός ονομάζεται πρώτος και πότε σύνθετος;

- Κάθε αριθμός, εκτός από το 1, που έχει διαιρέτες μόνο τον εαυτό του και το 1 λέγεται πρώτος αριθμός.
- Κάθε αριθμός που έχει τουλάχιστον τρεις διαιρέτες λέγεται σύνθετος.

5. Τι είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης δύο φυσικών αριθμών;

Ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης δύο αριθμών ονομάζεται Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ) των αριθμών αυτών.

6. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους;

Δύο αριθμοί α και β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους αν έχουν $\text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta) = 1$.

7. Τι είναι τα κριτήρια διαιρετότητας; Να αναφέρετε τα κριτήρια διαιρετότητας:

Κριτήρια διαιρετότητας με 2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25 λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να συμπεραίνουμε, χωρίς να κάνουμε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς αυτούς.

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **10, 100, 1.000** αν λήγει σε ένα, **δύο ή τρία μηδενικά αντίστοιχα**.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **2** αν το τελευταίο ψηφίο του είναι **0, 2, 4, 6, 8**.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **5** αν λήγει σε **0 ή 5**.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9** αν το **άθροισμα των ψηφίων** του διαιρείται με το **3** ή το **9** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **4**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το **4**.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το **25**, δηλαδή να λήγει σε **00, 25, 50 ή 75**.
- ο Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται συγχρόνως με το **4** και το **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του είναι **μηδέν**.

8. Τι είναι το Κόσκινο του Ερατοσθένη;

Το Κόσκινο του Ερατοσθένη είναι μία απλή διαδικασία που επινόησε ο Ερατοσθένης για να βρίσκει όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από έναν δοσμένο αριθμό.

9. Ποιοι είναι οι πρώτοι αριθμοί μέχρι το 100;

Οι πρώτοι αριθμοί από το 1 έως και το 100 είναι:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 και 97.

10. Πώς βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. αριθμών;

1ος τρόπος: Πολλαπλάσια αριθμών

- Βρίσκουμε τα πολλαπλάσια του κάθε αριθμού ξεχωριστά.
- Εντοπίζουμε τα κοινά τους πολλαπλάσια.
- Επιλέγουμε το μικρότερο μη μηδενικό κοινό πολλαπλάσιο.

2ος τρόπος: Πολλαπλάσια μεγαλύτερου αριθμού

- Επιλέγουμε τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς και ελέγχουμε αν είναι πολλαπλάσιο των υπολοίπων. Αν είναι, τότε ο αριθμός αυτός είναι το ΕΚΠ.
- Αν δεν είναι, τον διπλασιάζουμε και κάνουμε τον ίδιο έλεγχο.
- Αν και πάλι δεν είναι, τον τριπλασιάζουμε και επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο.
- Συνεχίζουμε έτσι, μέχρι να βρούμε ένα πολλαπλάσιο του μεγαλύτερου αριθμού που θα είναι συγχρόνως πολλαπλάσιο και των άλλων αριθμών.

3ος τρόπος: Διαδοχικές διαιρέσεις

- Γράφουμε τους αριθμούς σε μια σειρά και δεξιά τους φέρνουμε μια κατακόρυφη γραμμή.
- Βρίσκουμε τον μικρότερο πρώτο αριθμό που διαιρεί τουλάχιστον έναν από τους αριθμούς και τον γράφουμε δεξιά της γραμμής.
- Κάτω από κάθε αριθμό γράφουμε το πηλίκο της διαίρεσης με τον διαιρέτη. Αν κάποιος αριθμός δεν διαιρείται τον μεταφέρουμε όπως είναι.
- Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι την τελευταία σειρά στην αριστερά της γραμμής να σχηματιστούν όλα τα πηλικά ίσα με 1.

Το ΕΚΠ ισούται με το γινόμενο των αριθμών που υπάρχουν δεξιά της γραμμής.

11. Πώς ελέγχουμε αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος;

Για να ελέγξουμε αν ένας αριθμός είναι σύνθετος:

Βρίσκουμε τους διαιρέτες του.

Αν οι διαιρέτες του είναι:

- το 1 και ο ίδιος ο εαυτός του τότε ο αριθμός είναι πρώτος.
- τουλάχιστον τρεις διαφορετικοί αριθμοί τότε ο αριθμός είναι σύνθετος.

12. Πώς βρίσκουμε τον Μ.Κ.Δ. αριθμών;

1ος τρόπος: Διαιρέτες αριθμών

- Βρίσκουμε τους διαιρέτες κάθε αριθμού.
- Εντοπίζουμε τους κοινούς διαιρέτες των αριθμών.
- Επιλέγουμε τον μεγαλύτερο από τους κοινούς διαιρέτες.

2ος τρόπος: Διαιρέτες μικρότερου αριθμού:

- Επιλέγουμε τον μικρότερο από τους αριθμούς και εξετάζουμε αν διαιρεί ακριβώς τους υπόλοιπους. Αν τους διαιρεί, τότε αυτός ο αριθμός είναι ο ΜΚΔ.
- Αν δεν τους διαιρεί, τότε τον υποδιπλασιάζουμε (αν αυτό είναι δυνατό) και κάνουμε τον ίδιο έλεγχο.
- Αν και πάλι δεν είναι τον υποτριπλασιάζουμε (αν αυτό είναι δυνατό) και επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο.
- Συνεχίζουμε έτσι, μέχρι να βρούμε έναν αριθμό που να διαιρεί ακριβώς τους άλλους. Ο αριθμός αυτός θα είναι και ο ΜΚΔ τους.

3ος τρόπος: Κάθετος

- Τοποθετούμε τους αριθμούς σε μια σειρά.
- Εντοπίζουμε τον μικρότερο και τον ξαναγράφουμε στην επόμενη σειρά και στην ίδια στήλη.
- Διαιρούμε τους υπόλοιπους με τον μικρότερο και κάτω από τον καθένα γράφουμε το αντίστοιχο υπόλοιπο της διαίρεσης.
- Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για κάθε σειρά που δημιουργείται και σταματάμε όταν σε μια σειρά όλοι οι αριθμοί εκτός από έναν είναι 0.

Ο μη μηδενικός αυτός αριθμός είναι ο ΜΚΔ που ψάχνουμε.

13. Πώς αναλύουμε έναν αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

Ένας φυσικός σύνθετος αριθμός μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με την μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων.

- Διαιρούμε τον αριθμό με τον πρώτο μικρότερο διαιρέτη του.
- Γράφουμε το πηλίκο που προκύπτει κάτω από τον αριθμό.
- Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρι να βρούμε πηλίκο 1.

Χρησιμοποιούμε **μόνο πρώτους αριθμούς**. Οι πρώτοι αριθμοί από το 1 έως και το 100 είναι: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 και 97.

14. Πώς μπορούμε να βρούμε Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. χρησιμοποιώντας την ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

Αν έχουμε μεγάλους αριθμούς για να βρούμε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ τους εργαζόμαστε ως εξής:

- Αναλύουμε τους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- Έπειτα εφαρμόζουμε τον αντίστοιχο κανόνα για την εύρεση ΕΚΠ ή ΜΚΔ.

ΕΚΠ: Ισούται με το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους στον μεγαλύτερο εκθέτη που συναντάμε τον καθένα.

ΜΚΔ: Ισούται με το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους στον μικρότερο εκθέτη που συναντάμε τον καθένα



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε το ΕΚΠ των αριθμών 3, 6 και 9



1ος τρόπος: Πολλαπλάσια αριθμών

Π ₃	0	3	6	9	12	15	18	21	24	...
Π ₆	0	6	12	18	24	30	36	42	48	...
Π ₉	0	9	18	27	36	45	54	63	72	...

- $ΚΠ(3, 6, 9) = 18, 36, 54, 72, \dots$
- $ΕΚΠ(3, 6, 9) = 18$



2ος τρόπος: Πολλαπλάσια μεγαλύτερου αριθμού

- Ο μεγαλύτερος αριθμός είναι το 9. Είναι πολλαπλάσιο του 3 όχι όμως του 6.
- Διπλασιάζω το 9: $2 \cdot 9 = 18$

Το 18 διαιρείται από το 3 και από το 6.

$$\text{Άρα ΕΚΠ}(3, 6, 9) = 18$$



3ος τρόπος: Διαδοχικές διαιρέσεις:

3	6	9		2
3	3	9		3
1	1	3		3
1	1	1		

$$\text{ΕΚΠ}(3, 6, 9) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$$

2. Ένας ελαιοπαραγωγός συσκεύασε το ελαιόλαδο που έχει σε δοχεία των 2, 4 και 6 κιλών χωρίς να περισσέψει καθόλου. Ποια είναι η ελάχιστη ποσότητα ελαιόλαδου που διαθέτει;

Για να βρούμε την ελάχιστη ποσότητα που διαθέτει ο ελαιοπαραγωγός θα χρειαστεί να βρούμε το ΕΚΠ(2, 4, 6)

2	4	6		2
1	2	3		2
1	1	3		3
1	1	1		

$$\text{ΕΚΠ}(2, 4, 6) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Η ελάχιστη ποσότητα ελαιόλαδου διαθέτει ο παραγωγός είναι 12 λίτρα.

3. Να ελέγξετε ποιοι από τους αριθμούς 7, 9, 15 είναι πρώτοι και ποιοι σύνθετοι.

Δ_7 : $\longrightarrow$ 1, 7. Άρα το 7 είναι πρώτος αριθμός.

Δ_9 : $\longrightarrow$ 1, 3, 9. Άρα το 9 είναι σύνθετος αριθμός.

Δ_{15} : $\longrightarrow$ 1, 3, 5, 15. Άρα το 15 είναι σύνθετος αριθμός.

4. Να υπολογίσετε τον ΜΚΔ των αριθμών 12, 18, 24.



1ος τρόπος: Διαιρέτες αριθμών

- Δ_{12} : $\longrightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 12
- Δ_{18} : $\longrightarrow$ 1, 2, 3, 6, 9, 18
- Δ_{24} : $\longrightarrow$ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

$$\text{ΚΔ}(12, 18, 24) = 1, 2, 3, 6$$

$$\text{ΜΚΔ}(12, 18, 24) = 6$$



2ος τρόπος: Διαιρέτες μικρότερου αριθμού

- Ο μικρότερος αριθμός είναι το 12. Είναι διαιρέτης του 24 όχι όμως του 18.
- Υποδιπλασιάζω το 12: $12 : 2 = 6$
Το 6 είναι διαιρέτης του 18 και του 24.

$$\text{Άρα } \text{ΜΚΔ}(12, 18, 24) = 6$$



3ος τρόπος: Κάθετος

12	18	24
↓		
12	6	0
	↓	
0	6	0

Μικρότερος αριθμός το 12

Η διαίρεση: $18:12$ δίνει υπόλοιπο 6 $24:12$ δίνει υπόλοιπο 0

Μικρότερος αριθμός το 6

Η διαίρεση: $12:6$ δίνει υπόλοιπο 0

Άρα ΜΚΔ=6.

5. Ο βιβλιοπώλης διαθέτει 30 κόκκινα, 45 μαύρα και 60 μπλε στυλό. Θέλει να φτιάξει όμοια πακέτα με στυλό χωρίς να περισσέψει κάποιο.

- Πόσα όμοια πακέτα μπορεί να φτιάξει;
- Πόσα κόκκινα, μαύρα και μπλε στυλό θα έχει κάθε πακέτο;

i. Δ₃₀ : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

Δ₄₅ : 1, 3, 5, 9, 15, 45

Δ₆₀ : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

ΜΚΔ(30, 45, 60) = 15

Ο βιβλιοπώλης μπορεί να κατασκευάσει 15 όμοια πακέτα.

ii. Το κάθε πακέτο θα έχει:

Κόκκινα: $30 : 15 = 2$

Μαύρα: $45 : 15 = 3$

Μπλε: $60 : 15 = 4$

6. Να εξετάσετε αν το 153.690 διαιρείται από τους αριθμούς:

i. 2 ii. 3 iii. 4 iv. 5 v. 9 vi. 10 vii. 25 viii. 100

i. Ο αριθμός 153.690 λήγει σε 0, οπότε διαιρείται από το 2.

ii. Το άθροισμα των ψηφίων του 153.690 είναι $1+5+3+6+9+0=24$. Ο αριθμός 24 διαιρείται με το 3, άρα και ο αριθμός 153.690 διαιρείται από το 3.

iii. Τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού 153.690 σχηματίζουν τον αριθμό 90 ο οποίος δεν διαιρείται ακριβώς από το 4. Άρα και ο 153.690 δεν διαιρείται από το 4.

iv. Ο αριθμός 153.690 λήγει σε 0, οπότε διαιρείται από το 5.

v. Το άθροισμα των ψηφίων του 153.690 είναι $1 + 5 + 3 + 6 + 9 + 0 = 24$. Ο αριθμός 24 δεν διαιρείται με το 9, άρα και ο αριθμός 153.690 δεν διαιρείται από το 9.

vi. Ο αριθμός 153.690 λήγει σε 0, οπότε διαιρείται από το 10.

vii. Τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού 153.690 σχηματίζουν τον αριθμό 90 ο οποίος δεν διαιρείται ακριβώς από το 25. Άρα και ο 153.690 δεν διαιρείται από το 25.

viii. Ο αριθμός λήγει σε 90, οπότε δεν διαιρείται από το 100.

7. Να εκφράσετε τον αριθμό 180 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

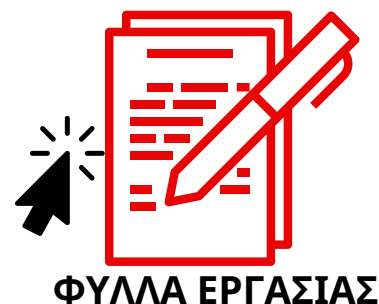
$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

1.050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$$1.050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

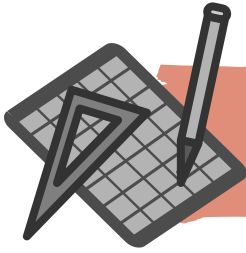
$$\text{ΕΚΠ}(180, 1.050) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 6.300$$

$$\text{ΜΚΔ}(180, 1.050) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$



2

τα κλάσματα



2.1. Η έννοια του κλάσματος

1. Τι ονομάζεται κλάσμα;

Κλάσμα ή κλασματικός αριθμός ονομάζεται κάθε αριθμός $\frac{\kappa}{\nu}$ όπου κ και ν φυσικοί αριθμοί με $\nu \neq 0$.

Το κλάσμα $\frac{\kappa}{\nu}$ εκφράζει τα κ μέρη από τα ν ίσα μέρη στα οποία έχει χωριστεί μια ποσότητα.

Ο αριθμός κ λέγεται αριθμητής και ο ν παρονομαστής. Οι δύο αριθμοί κ και ν καλούνται όροι του κλάσματος.

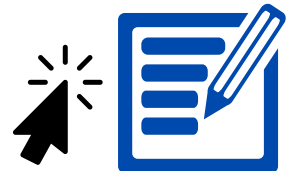


Έχουμε:

$$\frac{\kappa}{\nu}$$



αριθμητής
κλασματική γραμμή
παρονομαστής



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

2. Τι ονομάζεται κλασματική μονάδα;

Το σύμβολο $\frac{1}{\nu}$, με $\nu \neq 0$, εκφράζει το ένα από τα ν ίσα μέρη στα οποία χωρίζεται μια ποσότητα και ονομάζεται κλασματική μονάδα.

3. Ποια πράξη παριστάνει το κλάσμα;

Κάθε κλάσμα παριστάνει το πηλίκο της διαίρεσης του αριθμητή δια του παρονομαστή.

Γενικά ισχύει: $\frac{\kappa}{\nu} = \kappa : \nu$ όπου κ, ν φυσικοί αριθμοί και $\nu \neq 0$.

Κάθε φυσικός αριθμός κ μπορεί να έχει τη μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 1, γιατί $\kappa = \kappa : 1 = \frac{\kappa}{1}$

4. Ποια κλάσματα λέγονται γνήσια και ποια καταχρηστικά;

Γνήσια ονομάζονται τα κλάσματα τα οποία είναι μικρότερα της μονάδας. Ένα κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας όταν ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή του.

Καταχρηστικά ονομάζονται τα κλάσματα τα οποία είναι μεγαλύτερα της μονάδας. Ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή του.

5. Πότε ένα κλάσμα ισούται με την μονάδα;

Ένα κλάσμα ισούται με την μονάδα όταν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του είναι αριθμοί ίσοι μεταξύ τους. Δηλαδή: $\frac{v}{v} = v : v = 1, v \neq 0$

6. Να αναφέρετε τις βασικές ιδιότητες των κλασμάτων.

$$\bullet \frac{v}{v} = 1$$

με $v \neq 0$

$$\bullet \frac{\kappa}{v} = \kappa \cdot \frac{1}{v} = \kappa : v$$

με $v \neq 0$

$$\bullet \frac{v}{1} = v$$

$$\bullet \text{Αν } \kappa < v \text{ τότε } \frac{\kappa}{v} < 1,$$

με $v \neq 0$

$$\bullet \frac{0}{v} = 0$$

με $v \neq 0$

$$\text{Αν } \kappa > v \text{ τότε } \frac{\kappa}{v} > 1,$$

με $v \neq 0$

$$\bullet \frac{v}{0}$$

Δεν ορίζεται κλάσμα
με μηδενικό παρονομαστή

7. Πώς συγκρίνουμε κλάσματα;

Για να συγκρίνουμε ένα κλάσμα σε σχέση με την μονάδα, συγκρίνουμε τον αριθμητή σε σχέση με τον παρονομαστή.

- Αν ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι ίσο με την μονάδα.
- Αν ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας.
- Αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας.

8. Πώς κάνουμε αναγωγή στην μονάδα;

Ι. Αν αντιπροσωπεύει ολόκληρη την ποσότητα και ψάχνουμε να βρούμε ένα κλασματικό μέρος αυτής εργαζόμαστε ως εξής:

Το $\frac{K}{V}$ του α :

1ος τρόπος:

- Το $\frac{V}{V}$ είναι α (όπου v ο παρονομαστής του κλάσματος που εμφανίζεται και α η γνωστή ποσότητα)
- Το $\frac{1}{V}$ είναι $\alpha : v = \beta$
- Το $\frac{K}{V}$ είναι $\beta \cdot V$ (όπου $\frac{K}{V}$ το ζητούμενο κλασματικό μέρος)

2ος τρόπος:

Πολλαπλασιάζουμε το κλασματικό μέρος με την γνωστή ποσότητα. $\frac{K}{V} \cdot \alpha$



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να συγκρίνετε τα παρακάτω κλάσματα με την μονάδα:

$$\frac{341}{341} = 1, \text{ αφού } 341 = 341$$

$$\frac{98}{536} < 1, \text{ αφού } 98 < 536$$

$$\frac{710}{49} > 1, \text{ αφού } 710 > 49$$

2. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\frac{29}{29} = 1$$

$$\frac{2022}{1} = 1$$

$$\frac{0}{863} = 0$$

$$\frac{261}{0} \quad \text{\textbf{\Delta ΕΝ}} \text{ ορίζεται κλάσμα με μηδενικό παρονομαστή}$$

$$\frac{1.435}{35} = 1.435 : 35 = 41$$

3. Ποιο μέρος των μαθητών μιας τάξης 25 ατόμων εκφράζουν οι 10 μαθητές που παρακολουθούν Γαλλικά;

Θα δημιουργήσω ένα κλάσμα που ως παρονομαστή θα έχει όλους τους μαθητές της τάξης και σαν αριθμητή μόνο όσους παρακολουθούν Γαλλικά.

Άρα: $\frac{10}{25}$

4. Ένα βάζο περιέχει 6 κιλά μέλι. Ο Κώστας κατανάλωσε τα $\frac{2}{3}$ του βάζου μέλι. Ποια η ποσότητα που καταναλώθηκε;

1ος τρόπος:

Τα 6 κιλά μέλι αντιπροσωπεύουν ολόκληρη την ποσότητα άρα εκφράζονται από το κλάσμα $\frac{3}{3}$. Άρα:

- Τα $\frac{3}{3}$ είναι 6 κιλά
- Το $\frac{1}{3}$ είναι $6 : 3 = 2$ κιλά
- Τα $\frac{2}{3}$ είναι $2 \cdot 2 = 4$ κιλά

2ος τρόπος:

Τα $\frac{2}{3}$ των 6 κιλών: $\frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{12}{3} = 4$ κιλά

5. Τα $\frac{5}{6}$ του κιλού αμύγδαλα κοστίζουν 10 €. Πόσο κοστίζει το ένα κιλό από αμύγδαλα;

1ος τρόπος:

Τα 10 € δεν αντιπροσωπεύουν ολόκληρη την ποσότητα, αλλά ένα μέρος αυτής και εκφράζονται από το κλάσμα $\frac{5}{6}$.

Άρα: Τα $\frac{5}{6}$ είναι 10 €

Το $\frac{1}{6}$ είναι $10 : 5 = 2$ €

Τα $\frac{6}{6}$ είναι $2 \cdot 6 = 12$ €

2ος τρόπος:

Τα $\frac{5}{6}$ είναι 10 € $= 10 : \frac{5}{6} = 10 \cdot \frac{6}{5} = \frac{60}{5} = 12$

6. Τα $\frac{3}{5}$ του κιλού ροδάκινα κοστίζουν 3 €. Πόσο κοστίζουν τα $\frac{3}{4}$ του κιλού;

Τα 3 € δεν αντιπροσωπεύουν ολόκληρη την ποσότητα, αλλά ένα μέρος αυτής και εκφράζονται από το κλάσμα $\frac{3}{5}$. Άρα:

Τα $\frac{3}{5}$ είναι 3 €

Το $\frac{1}{5}$ είναι $3 : 3 = 1$ €

Τα $\frac{5}{5}$ είναι $1 \cdot 5 = 5$ €

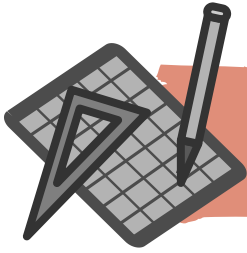
Οπότε το 1 κιλό ροδάκινα κοστίζει 5 €. Τα 5 € αντιπροσωπεύουν ολόκληρη την ποσότητα άρα εκφράζονται από το κλάσμα $\frac{4}{4}$. Άρα:

Τα $\frac{4}{4}$ είναι 5 €

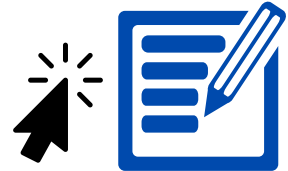
Το $\frac{1}{4}$ είναι $5 : 4 = 1,25$ €

Τα $\frac{3}{4}$ είναι $1,25 \cdot 3 = 3,75$ €





2.2. Ισοδύναμα κλάσματα



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποια κλάσματα ονομάζονται ισοδύναμα;

Δύο κλάσματα $\frac{a}{b}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ ονομάζονται ισοδύναμα ή ίσα όταν εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους ή ίσων μεγεθών. Επειδή ακριβώς εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι και ίσα και γράφουμε: $\frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta}$

Αν δύο κλάσματα $\frac{a}{b}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα χιαστί γινόμενα $a \cdot \delta$ και $b \cdot \gamma$ είναι ίσα και αντιστρόφως. Δηλαδή:

$$\text{Αν } \frac{a}{b} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ τότε: } a \cdot \delta = b \cdot \gamma \text{ και αντιστρόφως}$$

2. Πως κατασκευάζουμε ισοδύναμα κλάσματα;

Για να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα μπορούμε να:

- Πολλαπλασιάσουμε τους όρους του αρχικού κλάσματος με ένα μη μηδενικό φυσικό αριθμό ($\neq 0$).
- Διαιρέσουμε τους όρους του αρχικού κλάσματος με ένα κοινό διαιρέτη του αριθμητή και του παρονομαστή.

3. Τι ονομάζεται απλοποίηση κλάσματος;

Απλοποίηση λέγεται η διαδικασία κατά την οποία διαιρούμε τους όρους ενός κλάσματος με ένα κοινό διαιρέτη του αριθμητή και του παρονομαστή. Με αυτή την διαδικασία προκύπτει ένα ισοδύναμο κλάσμα με το αρχικό με μικρότερους όρους.

4. Ποιο κλάσμα λέγεται ανάγωγο;

Ανάγωγο κλάσμα ονομάζεται εκείνο που δεν μπορεί να απλοποιηθεί, δηλαδή εκείνο στο οποίο ο μέγιστος κοινός διαιρέτης αριθμητή και παρονομαστή είναι η μονάδα.

5. Ποια κλάσματα ονομάζονται ομώνυμα και ποια ετερόνυμα;

Ομώνυμα ονομάζονται τα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή.

Ετερόνυμα ονομάζονται τα κλάσματα που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές.

6. Πώς απλοποιούμε κλάσματα;

Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα $\frac{a}{b}$ ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Βρίσκουμε τον ΜΚΔ(a, b) = γ .
- Διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με τον ΜΚΔ(a, b), οπότε προκύπτει ένα ισοδύναμο κλάσμα με το αρχικό με μικρότερους όρους.

Το κλάσμα αυτό θα είναι ανάγωγο.

$$\text{Δηλαδή: } \frac{a}{b} = \frac{a:\gamma}{b:\gamma}$$

7. Πώς κάνουμε ομώνυμα κλάσματα;

Για να μετατρέψουμε ετερόνυμα κλάσματα σε ομώνυμα ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Ελέγχουμε αν τα κλάσματα απλοποιούνται
- Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών
- Διαιρούμε το ΕΚΠ με τον παρονομαστή του κάθε κλάσματος.
- Πολλαπλασιάζουμε τους όρους κάθε κλάσματος με το αντίστοιχο πηλίκο και τα κλάσματα μετατρέπονται σε ισοδύναμα ομώνυμα.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω κλάσματα είναι ισοδύναμα:



Για να εξετάσουμε αν δυο κλάσματα είναι ισοδύναμα, πολλαπλασιάζουμε χιαστί τους όρους και ελέγχουμε αν τα γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα μεταξύ τους

i. $\frac{3}{4}$ και $\frac{12}{16}$

Έχουμε: $3 \cdot 16 = 48$
 $4 \cdot 12 = 48$

Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα. Άρα τα κλάσματα είναι ισοδύναμα.

Γράφουμε: $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$

ii. $\frac{5}{8}$ και $\frac{10}{18}$

Έχουμε: $5 \cdot 18 = 90$
 $8 \cdot 10 = 80$

Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα που προκύπτουν δεν είναι ίσα. Άρα τα κλάσματα δεν είναι ισοδύναμα.

Γράφουμε: $\frac{5}{8} \neq \frac{10}{18}$

2. Να δημιουργήσετε ισοδύναμα κλάσματα του $\frac{36}{24}$

Για να κατασκευάσουμε ισοδύναμα κλάσματα μπορούμε να:

- Πολλαπλασιάσουμε τους όρους του αρχικού κλάσματος με ένα μη μηδενικό φυσικό αριθμό($\neq 0$). Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να δημιουργήσουμε άπειρα ισοδύναμα κλάσματα με μεγαλύτερους όρους.
- Διαιρέσουμε τους όρους του αρχικού κλάσματος με ένα κοινό διαιρέτη του αριθμητή και του παρονομαστή. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να δημιουργήσουμε περιορισμένο πλήθος ισοδύναμων κλασμάτων και αυτό εξαρτάται από τους κοινούς διαιρέτες του αριθμητή και του παρονομαστή.

i. Με πολλαπλασιασμό:

$$\frac{36 \cdot 2}{24 \cdot 2} = \frac{72}{48}$$

$$\frac{36 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{108}{72}$$

Μπορούμε να συνεχίσουμε με όμοιο τρόπο πολλαπλασιάζοντας τους όρους του κλάσματος με οποιοδήποτε μη μηδενικό φυσικό αριθμό.

ii. Με διαίρεση:

$$\frac{36 : 2}{24 : 2} = \frac{18}{12}$$

$$\frac{36 : 4}{24 : 4} = \frac{9}{6}$$

$$\frac{36 : 12}{24 : 12} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{36 : 3}{24 : 3} = \frac{12}{8}$$

$$\frac{36 : 6}{24 : 6} = \frac{6}{4}$$

3. Να μετατραπεί το $\frac{16}{36}$ σε ισοδύναμο με:

i. αριθμητή τον αριθμό 4.

$$\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

- Επιλέγουμε το χιαστί γινόμενο: $36 \cdot 4 = 144$
- Διαιρούμε το γινόμενο με τον ' ' αζευγάρωτο ' ' όρο: $144 : 16 = 9$

$$\text{Έχουμε: } \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

ii. Παρονομαστή τον αριθμό 18

$$\frac{16}{36} = \frac{?}{18}$$

$$16 \cdot 18 = 288$$

$$288 : 36 = 8$$

Έχουμε: $\frac{16}{36} = \frac{8}{18}$

4. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

i. $\frac{9}{18}$

ΜΚΔ (9, 18) = 9

$$\frac{9:9}{18:9} = \frac{1}{2}$$

ii. $\frac{225}{120}$

ΜΚΔ (225, 120) = 15

$$\frac{225:15}{120:15} = \frac{15}{8}$$

5. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

i. $\frac{5}{3}$ και $\frac{2}{7}$

Τα κλάσματα είναι ανάγωγα.

ΕΚΠ(3, 7) = 21, $21 : 3 = 7$ και $21 : 7 = 3$

$$\frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{35}{21}$$

$$\frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$$

ii. $\frac{3}{4}$ και $\frac{5}{12}$

Τα κλάσματα είναι ανάγωγα.

ΕΚΠ(4, 12) = 12, $12 : 4 = 3$ και $12 : 12 = 1$

$$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

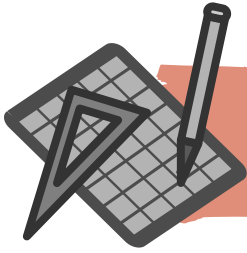
$$\frac{5 \cdot 1}{12 \cdot 1} = \frac{5}{12}$$

iii. $\frac{4}{12}$ και $\frac{5}{3}$

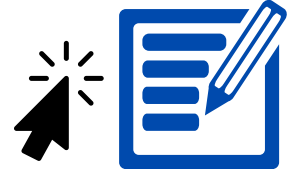
Το κλάσμα $\frac{4}{12}$ δεν είναι ανάγωγο.

Άρα: $\frac{4 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{1}{3}$





2.3. Σύγκριση κλασμάτων



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πως συγκρίνουμε δύο κλάσματα;

- Από δύο ομώνυμα κλάσματα εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή είναι και το μεγαλύτερο.
- Για να συγκρίνουμε ετερόνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές τους, όπως παραπάνω.
- Από δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

2. Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες της σύγκρισης κλασμάτων;

$$\frac{a}{\beta} < \frac{\gamma}{\beta} \text{ τότε } a < \gamma \text{ και αντιστρόφως}$$

$$\frac{a}{\beta} > \frac{\gamma}{\beta} \text{ τότε } a > \gamma \text{ και αντιστρόφως}$$

$$\frac{a}{\beta} > \frac{a}{\gamma} \text{ και } a \neq 0, \text{ τότε } \beta < \gamma \text{ και αντιστρόφως}$$

$$\frac{a}{\beta} < \frac{a}{\gamma} \text{ και } a \neq 0, \text{ τότε } \beta > \gamma \text{ και αντιστρόφως}$$



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να συγκρίνετε τα κλάσματα:

- Ομώνυμα, τότε μεγαλύτερο θα είναι εκείνο με τον μεγαλύτερο αριθμητή.
- Ετερώνυμα, τότε τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και έπειτα τα συγκρίνουμε.
- Ετερώνυμα με κοινό αριθμητή, τότε μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή.

i. $\frac{2}{5}, \frac{4}{5}$

Τα κλάσματα είναι ομώνυμα, οπότε συγκρίνουμε τους αριθμητές.

$$2 < 4. \text{ Άρα } \frac{2}{5} < \frac{4}{5}$$

ii. $\frac{3}{4}, \frac{2}{12}$

Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα, οπότε τα μετατρέπουμε ομώνυμα:

$$\text{ΕΚΠ}(4, 12) = 12 \quad 12 : 4 = 3 \quad 12 : 12 = 1$$

$$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{2 \cdot 1}{12 \cdot 1} = \frac{2}{12}$$

$$\frac{9}{12} > \frac{2}{12} \text{ (αφού } 9 > 2). \text{ Άρα } \frac{3}{4} > \frac{2}{12}$$

iii. $\frac{7}{23}, \frac{7}{41}$

Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα με κοινό αριθμητή, οπότε συγκρίνουμε τους παρονομαστές.

$$23 < 41. \text{ Άρα } \frac{7}{23} > \frac{7}{41}$$

2. Να γράψετε σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα:

i. $\frac{7}{4}, \frac{23}{4}, \frac{2}{4}, \frac{18}{4}, \frac{25}{4}, \frac{67}{4}$

Τα κλάσματα είναι ομώνυμα, οπότε τα διατάσσουμε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο αριθμητή:

$$\frac{2}{4} < \frac{7}{4} < \frac{18}{4} < \frac{23}{4} < \frac{25}{4} < \frac{67}{4}$$

ii. $\frac{8}{13}, \frac{8}{45}, \frac{8}{37}, \frac{8}{2}, \frac{8}{43}, \frac{8}{69}$

Τα κλάσματα είναι ετερόνυμα με κοινό αριθμητή, οπότε τα διατάσσουμε από τον μεγαλύτερο προς τον μικρότερο παρονομαστή:

$$\frac{8}{69} < \frac{8}{45} < \frac{8}{43} < \frac{8}{37} < \frac{8}{13} < \frac{8}{2}$$

3. Να συγκρίνετε τα κλάσματα με την μονάδα:

Για να συγκρίνουμε ένα κλάσμα σε σχέση με την μονάδα, συγκρίνουμε τον αριθμητή σε σχέση με τον παρονομαστή.

- Αν ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι ίσο με την μονάδα.
- Αν ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας. (γνήσιο κλάσμα)
- Αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας. (καταχρηστικό κλάσμα)

i. $\frac{139}{139} = 1$, αφού $139 = 139$.

ii. $\frac{45}{972} < 1$, αφού $45 < 972$

iii. $\frac{835}{90} > 1$, αφού $835 > 90$

4. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα: $\frac{2}{3}, \frac{9}{4}, \frac{5}{6}, 1, \frac{7}{5}$

- Αρχικά συγκρίνουμε τα κλάσματα με την μονάδα:

$$\frac{2}{3} < 1, \quad \frac{9}{4} > 1, \quad \frac{5}{6} < 1, \quad \frac{7}{5} > 1.$$

Έπειτα συγκρίνουμε μεταξύ τους όσα κλάσματα είναι μεγαλύτερα της μονάδας, και μεταξύ τους όσα κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας.

Έχουμε: $\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$ και $\frac{5}{6}$

$$\frac{4}{6} < \frac{5}{6} \quad \text{Άρα:} \quad \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$$

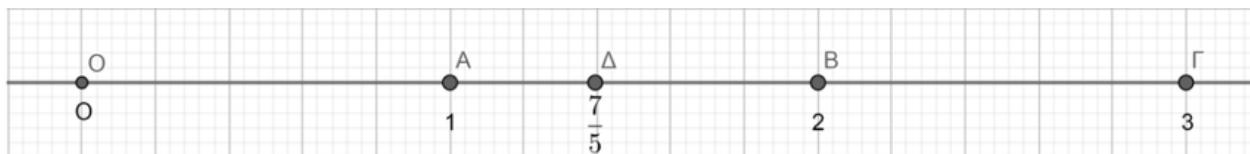
$$\frac{9 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{45}{20} \quad \text{και} \quad \frac{7 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{28}{20}$$

$$\frac{45}{20} > \frac{28}{20} \quad \text{Άρα:} \quad \frac{9}{4} > \frac{7}{5}$$

Οπότε: $\frac{2}{3} < \frac{5}{6} < 1 < \frac{7}{5} < \frac{9}{4}$

5. Να τοποθετηθεί στην ευθεία των αριθμών το κλάσμα $\frac{7}{4}$

- Κατασκευάζουμε μια ευθεία και θεωρούμε σε αυτή τα τμήματα $OA = 1\text{cm}$, $AB = 1\text{cm}$, $BF = 1\text{cm}$.
- Χωρίζουμε καθένα από τα ευθύγραμμα τμήματα σε 4 ίσα μέρη.
- Έπειτα ξεκινώντας από το σημείο O μετράμε τόσα επιμέρους τμήματα όσα μας υποδεικνύει ο αριθμητής, δηλαδή 7.
- Σε αυτό το σημείο τοποθετούμε το κλάσμα.



6. Να βρείτε ένα κλάσμα μεταξύ των:

i. $\frac{2}{5}$ και $\frac{6}{10}$

- Τα κλάσματα είναι ετερόνυμα, οπότε θα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα.
ΕΚΠ(5, 10) = 10

$$\frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} \quad \text{και} \quad \frac{6}{10}$$

- Μεταξύ των αριθμητών 4 και 6 υπάρχει ο αριθμός 5. Επομένως:

$$\frac{4}{10} < \frac{5}{10} < \frac{6}{10} \quad \text{Άρα:} \quad \frac{2}{5} < \frac{5}{10} < \frac{6}{10}$$

ii. $\frac{1}{2}$ και $\frac{2}{3}$

- Τα κλάσματα είναι ετερόνυμα, οπότε θα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα.
ΕΚΠ(2, 3) = 6

$$\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} \quad \text{και} \quad \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$$

- Παρατηρούμε ότι οι αριθμητές των κλασμάτων είναι διαδοχικοί αριθμοί. Οπότε θα μετατρέψουμε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με μεγαλύτερους όρους πολλαπλασιάζοντας τους με το 2.

$$\frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{6}{12} \quad \text{και} \quad \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{8}{12}$$

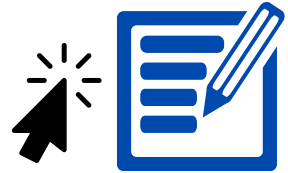
- Μεταξύ των αριθμητών 6 και 8 υπάρχει ο αριθμός 7. Επομένως:

$$\frac{6}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12} \quad \text{Άρα:} \quad \frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$$





2.4. Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πως προσθέτουμε κλάσματα;

- Προσθέτουμε δύο ή περισσότερα ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή.
- Προσθέτουμε ετερόνυμα κλάσματα αφού πρώτα τα μετατρέψουμε σε ομώνυμα.

2. Πως αφαιρούμε κλάσματα;

- Αφαιρούμε δύο ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους, αφήνοντας τον ίδιο παρονομαστή.
- Αφαιρούμε δύο ετερόνυμα κλάσματα αφού τα μετατρέψουμε πρώτα σε ομώνυμα.

3. Ποιος αριθμός ονομάζεται μεικτός;

Μεικτός ονομάζεται ο αριθμός που παριστάνει το άθροισμα ενός ακεραίου με ένα κλάσμα μικρότερο της μονάδας.

4. Πώς μπορώ να μετατρέψω έναν μεικτό αριθμό σε κλάσμα;

Για να μετατρέψουμε έναν μεικτό αριθμό σε καταχρηστικό κλάσμα εφαρμόζουμε την ακόλουθη ιδιότητα:

$$a \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a \cdot \gamma + \beta}{\gamma}$$

Για να μετατρέψουμε ένα καταχρηστικό κλάσμα σε μεικτό αριθμό:

- Εκτελούμε την διαίρεση που παριστάνει το κλάσμα.
- Το πηλίκο είναι ο ακέραιος αριθμός, το υπόλοιπο είναι ο αριθμητής του κλάσματος και ο διαιρέτης είναι ο παρονομαστής.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

- Αρχικά απλοποιούμε τα κλάσματα.
- Έπειτα, για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα, προσθέτουμε ή αφαιρούμε τους αριθμητές και ο παρονομαστής παραμένει ίδιος. Αν τα κλάσματα είναι ετερόνυμα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα.
- Τέλος, απλοποιούμε το κλάσμα.

i. $\frac{11}{4} + \frac{3}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$

ii. $\frac{5}{3} + \frac{6}{9} = \frac{5}{3} + \frac{6:3}{9:3} = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

iii. $\frac{2}{9} + \frac{7}{18} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{7}{18} = \frac{4}{18} + \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$

ΕΚΠ(9, 18) = 18

iv. $\frac{7}{5} - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$

v. $\frac{21}{8} - \frac{18}{16} = \frac{21}{8} - \frac{18:2}{16:2} = \frac{21}{8} - \frac{9}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$



$$\text{vi. } \frac{7}{12} - \frac{5}{18} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{21}{36} - \frac{10}{36} = \frac{11}{36}$$

$$\text{ΕΚΠ}(12, 18) = 36$$

2. Να μετατρέψετε τον μεικτό $7\frac{2}{3}$ σε καταχρηστικό κλάσμα.

$$7\frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{21 + 2}{3} = \frac{23}{3}$$

3. Να μετατρέψετε το καταχρηστικό κλάσμα $\frac{39}{5}$ σε μεικτό αριθμό.

$$\frac{39}{5} = 39 : 5 = 7\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 39 & 5 \\ -35 & 7 \\ \hline 4 & \end{array}$$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \text{i. } & \frac{11}{6} - (1 - \frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} + \frac{4}{5}) = \\ & = \frac{11}{6} - (\frac{3}{3} - \frac{2}{3}) + (\frac{10}{15} + \frac{12}{15}) = \\ & = \frac{11}{6} - \frac{1}{3} + \frac{22}{15} = \\ & = \frac{55}{30} - \frac{10}{30} + \frac{44}{30} = \\ & = \frac{45}{30} + \frac{44}{30} = \\ & = \frac{99}{30} = \frac{33}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } & \frac{3^2 - 2^3}{4} + \frac{(3 \cdot 2 - 2^2)}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^{2017} = \\
 & = \frac{9-8}{4} + \frac{(9-8)}{3} + \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right)^{2017} = \\
 & = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right)^{2017} = \\
 & = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \left(\frac{6}{6}\right)^{2017} = \\
 & = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1^{2017} = \\
 & = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1 = \\
 & = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{12}{12} = \\
 & = \frac{19}{12}
 \end{aligned}$$

5. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις αν $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{7}{9}$

$$\text{i. } \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$$

$$\text{ii. } \frac{\alpha - \beta}{\alpha}$$

$$\text{iii. } \frac{7\alpha - 5\beta}{5\alpha}$$

$$\text{i. } \frac{\alpha + \beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} = 1 + \frac{7}{9} = \frac{9}{9} + \frac{7}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\text{ii. } \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = 1 - \frac{7}{9} = \frac{9}{9} - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

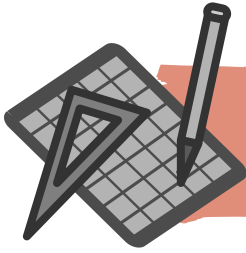
$$\text{iii. } \frac{7\alpha - 5\beta}{5\alpha} = \frac{7\alpha}{5\alpha} - \frac{5\beta}{5\alpha} = \frac{7}{5} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{7}{5} - \frac{7}{9} = \frac{63}{45} - \frac{35}{45} = \frac{28}{45}$$

6. Από ένα τόπι υφάσματος 25 μέτρων πουλήθηκαν $2\frac{3}{4}$ μέτρα, $\frac{31}{2}$ μέτρα και $6\frac{7}{10}$ μέτρα υφάσματος. Πόσα μέτρα υφάσματος έμειναν απούλητα;

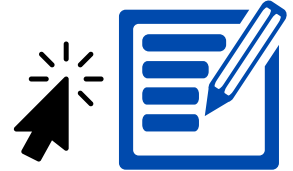
$$\begin{aligned}25 - (2\frac{3}{4} + \frac{31}{2} + 6\frac{7}{10}) &= \\25 - (\frac{11}{4} + \frac{31}{2} + \frac{67}{10}) &= \\25 - (\frac{55}{20} + \frac{310}{20} + \frac{134}{20}) &= \\25 - \frac{499}{20} &= \\\frac{500}{20} - \frac{499}{20} &= \\= \frac{1}{20}\end{aligned}$$

Άρα έμειναν απούλητα $\frac{1}{20}$ μέτρα.





2.5. Πολλαπλασιασμός κλασμάτων



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο κλάσματα;

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα δημιουργούμε ένα νέο κλάσμα που έχει ως αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \cdot \gamma}{b \cdot \delta}$$

2. Πώς πολλαπλασιάζουμε ένα φυσικό αριθμό με ένα κλάσμα;

Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί ένα κλάσμα είναι το κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή επί τον φυσικό αριθμό και με τον ίδιο παρονομαστή.

$$\lambda \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \lambda = \frac{\lambda \cdot a}{b}$$

3. Ποια κλάσματα λέγονται αντίστροφα;

Δύο κλάσματα λέγονται αντίστροφα όταν έχουν γινόμενο 1.

Επειδή $\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = 1$ τα κλάσματα $\frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\delta}{\gamma}$ είναι αντίστροφα.

4. Να αναφέρετε τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού στα κλάσματα:

Αντιμεταθετική: $\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{a}{\beta}$

Προσεταιριστική: $\frac{a}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\epsilon}{\zeta} \right) = \left(\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\epsilon}{\zeta}$

Επιμεριστική ιδιότητα: $\frac{a}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \pm \frac{\epsilon}{\zeta} \right) = \frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \pm \frac{a}{\beta} \cdot \frac{\epsilon}{\zeta}$

Ουδέτερο στοιχείο: $\frac{a}{\beta} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{\beta} = \frac{a}{\beta}$

$$\frac{a}{\beta} \cdot 0 = \frac{a}{\beta} \cdot 0 = 0$$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

i. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

ii. $4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = 6$

iii. $\frac{7}{3} \cdot 6 = \frac{7 \cdot 6}{3 \cdot 1} = \frac{42}{3} = 14$

iv. $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot 11 = \frac{1 \cdot 6 \cdot 11}{3 \cdot 7} = \frac{66}{21} = 3$



VIDEO  ΜΑΘΗΜΑ

2. Να βρείτε τους αντίστροφους των αριθμών.

i. $\frac{2}{3}$ Ο αντίστροφος αριθμός είναι το $\frac{3}{2}$

ii. $\frac{1}{11}$ Ο αντίστροφος αριθμός είναι το 1

iii. 17 Ο αντίστροφος αριθμός είναι το $\frac{1}{17}$

3. Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι να υπολογίσετε το γινόμενο $\frac{7}{\alpha} \cdot \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{3}{\beta}$

Αφού οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι θα έχουν γινόμενο 1. Οπότε: $\alpha \cdot \beta = 1$

Έχουμε: $\frac{7}{\alpha} \cdot \frac{\beta}{3} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{3}{\beta} = \frac{7 \cdot \beta \cdot \alpha \cdot 3}{\alpha \cdot 3 \cdot 2 \cdot \beta} = \frac{21 \cdot \alpha \cdot \beta}{6 \cdot \alpha \cdot \beta} = \frac{21 \cdot 1}{6 \cdot 1} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

4. Να υπολογίσετε τα γινόμενα απλοποιώντας κατάλληλα πριν πολλαπλασιάσετε.

i. $\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{7}{\cancel{2}} = \frac{7}{3}$

ii. $\cancel{3} \cdot \frac{19}{\cancel{3}} = 19$

iii. $\frac{\cancel{6}_{:2}}{\cancel{44}_{:11}} \cdot \frac{\cancel{11}_{:11}}{\cancel{2}_{:2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

5. Να βρείτε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων.

$$\begin{aligned}
 \text{i. } & \frac{4}{11} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{22} = \\
 & = \frac{4}{11} + \left(\frac{4}{6} - \frac{3}{6} \right) \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{22} = \\
 & = \frac{4}{11} + \frac{1}{\cancel{6}_{:3}} \cdot \frac{\cancel{3}_{:3}}{5} + \frac{1}{22} = \\
 & = \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{22} = \\
 & = \frac{4}{11} + \frac{1}{10} + \frac{1}{22} = \\
 & = \frac{40}{110} + \frac{11}{110} + \frac{5}{110} = \\
 & = \frac{56}{110} = \frac{28}{55}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } & 2^2 + \left(\frac{3^2 - 2^3}{4} - \frac{1}{8} \right) \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{15} = \\
 & = 4 + \left(\frac{9 - 8}{4} - \frac{1}{8} \right) \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{15} = \\
 & = 4 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{15} = \\
 & = 4 + \left(\frac{2}{8} - \frac{1}{8} \right) \cdot \frac{2}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{15} = \\
 & = 4 + \frac{1}{\cancel{8}_{:2}} \cdot \frac{\cancel{2}_{:2}}{3} - \frac{\cancel{5}_{:5}}{\cancel{4}_{:2}} \cdot \frac{\cancel{2}_{:2}}{1\cancel{5}_{:5}} = \\
 & = 4 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \\
 & = 4 + \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = \\
 & = \frac{48}{12} + \frac{1}{12} - \frac{2}{12} = \\
 & = \frac{49}{12} - \frac{2}{12} = \\
 & = \frac{47}{12}
 \end{aligned}$$

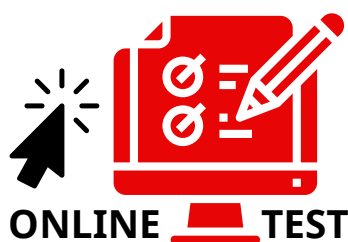
6. Στις εξετάσεις του Ιουνίου τα $\frac{5}{8}$ των μαθητών εξετάστηκαν στο μάθημα των Γαλλικών ενώ οι υπόλοιποι στο μάθημα των Γερμανικών. Το $\frac{1}{5}$ των μαθητών που εξετάστηκε στα Γαλλικά έμεινε για επανεξέταση ενώ οι υπόλοιποι προβιβάστηκαν. Αν η τάξη είχε 40 μαθητές, να βρείτε πόσοι μαθητές εξετάστηκαν στο μάθημα των Γερμανικών και πόσοι έμειναν για επανεξέταση στο μάθημα των Γαλλικών.

- Μέρος των μαθητών που εξετάστηκαν στα Γερμανικά: $1 - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

Μαθητές που εξετάστηκαν στο μάθημα των Γερμανικών: Τα $\frac{3}{8}$ του 40: $\frac{3}{\cancel{8}_{:8}} \cdot \cancel{40}_{:8} = \frac{3}{1} \cdot 5 = 15$

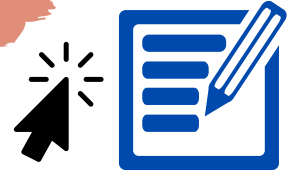
- Μαθητές που εξετάστηκαν στο μάθημα των Γαλλικών: Τα $\frac{5}{8}$ του 40: $\frac{5}{\cancel{8}_{:8}} \cdot \cancel{40}_{:8} = \frac{5}{1} \cdot 5 = 25$

Μαθητές επανεξέτασης Γαλλικών: Το $\frac{1}{5}$ του 25: $\frac{1}{\cancel{5}_{:5}} \cdot \cancel{25}_{:5} = \frac{1}{1} \cdot 5 = 5$





2.6. Διαίρεση κλασμάτων



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πως διαιρούμε δύο φυσικούς αριθμούς;

Για να διαιρέσουμε δυο φυσικούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη

$$\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

2. Πως διαιρούμε δύο κλάσματα;

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$$

3. Ποιο κλάσμα ονομάζεται σύνθετο;

Ένα κλάσμα του οποίου ένας τουλάχιστον όρος του είναι κλάσμα ονομάζεται σύνθετο κλάσμα.

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

$$\text{i. } 45 : 15 = 45 \cdot \frac{1}{15} = \frac{45}{15} = 3$$

$$\text{iii. } \frac{5}{9} : 25 = \frac{\cancel{5}^1}{9} \cdot \frac{1}{\cancel{25}^5} = \frac{1}{45}$$

$$\text{ii. } \frac{2}{7} : \frac{3}{14} = \frac{2}{7} \cdot \frac{14}{3} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

$$\text{iv. } \frac{4}{11} : \frac{7}{22} = \frac{4}{\cancel{11}^1} \cdot \frac{\cancel{22}^2}{7} = \frac{8}{7}$$

$$\text{v. } 2\frac{1}{3} : \frac{1}{9} = \frac{7}{\cancel{3}^1} \cdot \frac{\cancel{9}^3}{1} = 21$$

2. Να μετατρέψετε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά.

Για να μετατρέψουμε ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό δημιουργούμε ένα κλάσμα που έχει σαν αριθμητή το γινόμενο των άκρων όρων και σαν παρονομαστή το γινόμενο των μέσων όρων.

$$\text{i. } \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{15}} = \frac{\cancel{2}^1 \cdot \cancel{15}^3}{\cancel{5}^1 \cdot \cancel{4}^2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ii. } \frac{\frac{7}{8}}{\frac{14}{1}} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{14}{1}} = \frac{\cancel{7}^1 \cdot 1}{8 \cdot \cancel{14}^2} = \frac{1}{16}$$

$$\text{iii. } \frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{3}} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{3}{3}} = \frac{\cancel{4}^2 \cdot 3}{1 \cdot \cancel{2}^1} = 6$$

3. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

i.
$$\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) : \frac{5}{6} + \left(\frac{7}{3} - \frac{4}{3}\right) \cdot 2^2 =$$
$$= \left(\frac{8}{6} - \frac{3}{6}\right) : \frac{5}{6} + \frac{3}{3} \cdot 2^2 =$$
$$= \frac{5}{6} : \frac{5}{6} + 1 \cdot 2^2 =$$
$$= \frac{5}{6} : \frac{5}{6} + 1 \cdot 4 =$$
$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} + 4 =$$
$$= \frac{30}{30} + 4 =$$
$$= 1 + 4 = 5$$

ii.
$$\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}}{7 - \frac{9}{2}} = \frac{\frac{\cancel{6}^1}{\cancel{12}^2}}{\frac{14}{2} - \frac{9}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$



4. Σε μια τάξη μαθαίνουν Γερμανικά τα $\frac{4}{7}$ των μαθητών. Οι μαθητές που μαθαίνουν Γερμανικά είναι 12. Πόσοι είναι οι μαθητές της τάξης;

Τα $\frac{4}{7}$ είναι 12:

$$12 : \frac{4}{7} = 12 \cdot \frac{7}{4} = 3 \cdot 7 = 21$$

Οι μαθητές της τάξης είναι 21.

5. Ένας ελαιοπαραγωγός έχει 12.780 λίτρα ελαιόλαδο και θέλει να τα συσκευάσει σε φιάλες που κάθε μια χωρά $\frac{9}{10}$ του λίτρου λάδι. Πόσες φιάλες θα χρειαστεί;

$$12.780 : \frac{9}{10} = 12.780 \cdot \frac{10}{9} = \frac{127.800}{9} = 14.200$$



3

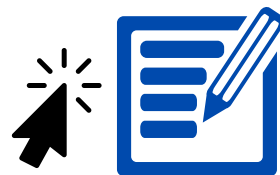
οι δεκαδικοί αριθμοί



3.1. Δεκαδικά κλάσματα - Δεκαδικοί αριθμοί - Διάταξη δεκαδικών αριθμών - Στρογγυλοποίηση

1. Ποιο κλάσμα ονομάζεται δεκαδικό;

Δεκαδικό κλάσμα λέγεται το κλάσμα που έχει παρονομαστή δύναμη του 10. Κάθε δεκαδικό κλάσμα μπορεί να γραφεί σαν δεκαδικός αριθμός με τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής του.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Ποια είναι η μορφή ενός δεκαδικού αριθμού;

Σε κάθε δεκαδικό αριθμό διακρίνουμε το ακέραιο μέρος και το δεκαδικό μέρος τα οποία χωρίζονται από την υποδιαστολή.

- Αριστερά από την υποδιαστολή βρίσκεται το ακέραιο μέρος οι τάξεις του οποίου είναι Μονάδες (Μ), Δεκάδες (Δ), Εκατοντάδες (Ε)...
- Δεξιά από την υποδιαστολή βρίσκεται το δεκαδικό μέρος οι τάξεις του οποίου είναι δέκατα (δ), εκατοστά (ε), χιλιοστά (χ), δεκάκις χιλιοστά (δχ), εκατοντάκις χιλιοστά (εχ) και εκατομμυριοστά.

Ε	Δ	Μ	,	δ	ε	χ	δχ	εχ
ΕΚΑΤΟΝΤΑΔΕΣ	ΔΕΚΑΔΕΣ	ΜΟΝΑΔΕΣ	,	δέκατα	εκατοστ ά	χιλιοαστ ά	δεκάκις χιλιοστά	εκατοντάκις χιλιοστά

3. Πως συγκρίνουμε δύο δεκαδικούς αριθμούς;

Αν δύο δεκαδικοί έχουν:

- **Διαφορετικό ακέραιο μέρος**, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το μεγαλύτερο ακέραιο μέρος.
- **Ίδιο ακέραιο μέρος**, συγκρίνουμε τα δεκαδικά τους μέρη, ένα ένα από αριστερά προς τα δεξιά και βρίσκουμε το πρώτο ψηφίο στο οποίο διαφέρουν.

Τότε ο αριθμός με το μεγαλύτερο ψηφίο είναι ο μεγαλύτερος.

4. Πως στρογγυλοποιούμε έναν δεκαδικό αριθμό;

Για να στρογγυλοποιήσουμε ένα δεκαδικό αριθμό:

- i. Προσδιορίζουμε την δεκαδική τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
- ii. Εξετάζουμε το ψηφίο μικρότερης τάξης:

- Αν είναι 0 ή 1 ή 2 ή 3 ή 4, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία μικρότερων τάξεων αντικαθίστανται από το μηδέν.
- Αν είναι 5 ή 6 ή 7 ή 8 ή 9, το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων αντικαθίστανται από το μηδέν και το ψηφίο της στρογγυλοποίησης αυξάνεται κατά 1.

5. Πώς μετατρέπουμε ένα δεκαδικό κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό;

Κάθε δεκαδικό κλάσμα γράφεται ως δεκαδικός αριθμός με τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής του.

π.χ. $\frac{23}{100} = 0,23$ (δύο μηδενικά άρα δύο δεκαδικά ψηφία)

$$\frac{2}{1.000} = 0,002 \quad (\text{τρία μηδενικά άρα τρία δεκαδικά ψηφία})$$

6. Πώς μετατρέπουμε έναν δεκαδικό αριθμό σε δεκαδικό κλάσμα;

Κάθε δεκαδικός αριθμός γράφεται ως δεκαδικός κλάσμα με αριθμητή το δεκαδικό αριθμό χωρίς την υποδιαστολή και παρονομαστή το 1 ακολουθούμενο με τόσα μηδενικά όσα είναι τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού.

π.χ. $7,321 = \frac{7.321}{1.000}$ (τρία δεκαδικά ψηφία άρα τρία μηδενικά στον παρονομαστή)

$40,29 = \frac{4.029}{100}$ (δύο δεκαδικά ψηφία άρα δύο μηδενικά στον παρονομαστή)

$0,0067 = \frac{67}{10.000}$ (τέσσερα δεκαδικά ψηφία άρα τέσσερα μηδενικά στον

7. Πώς μετατρέπουμε ένα κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό;

Κάθε κλάσμα είναι πηλίκιο της διαίρεσης που έχει διαιρετέο τον αριθμητή του κλάσματος και διαιρέτη τον παρονομαστή του κλάσματος.

$$\frac{a}{b} = a : b$$

Υπάρχει περίπτωση σε κάποιες διαιρέσεις να προκύπτουν άπειρα δεκαδικά ψηφία ή να έχουμε επανάληψη των ίδιων ψηφίων. Σε αυτές τις περιπτώσεις σταματάμε τη διαίρεση σε κάποιο δεκαδικό ψηφίο και γράφουμε το πηλίκιο με προσέγγιση εκείνου του δεκαδικού ψηφίου.

π.χ. $\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4$

20		5
-20		0,4
0		

$\frac{35}{6} = 5,833$ (με προσέγγιση χιλιοστού)

35		6
-30		5.833
50		
-48		
20		
-18		
2		

8. Πώς συγκρίνουμε δεκαδικούς αριθμούς;

Αν δύο δεκαδικοί έχουν:

- **Διαφορετικό ακέραιο μέρος**, μεγαλύτερος είναι εκείνος που έχει το μεγαλύτερο ακέραιο μέρος.
- **Ίδιο ακέραιο μέρος**, συγκρίνουμε τα δεκαδικά τους μέρη, ένα-ένα από αριστερά προς τα δεξιά και βρίσκουμε το πρώτο ψηφίο στο οποίο διαφέρουν. Τότε ο αριθμός με το μεγαλύτερο ψηφίο είναι ο μεγαλύτερος

π.χ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

67,36 και 69,56

$67,36 < 69,56$ (αφού $67 < 69$)

68,350 και 68,3478

$68,350 > 68,3478$ (αφού $68,35 > 68,34$)



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό 54,962 στο ψηφίο των:
i. μονάδων ii. δέκατων iii. εκατοστών

i. $54,962 \approx 55,000 \approx 55$

(το ψηφίο των μονάδων είναι το 4, ελέγχω το 9, οπότε το 4 αυξάνεται κατά μια μονάδα τα υπόλοιπα ψηφία δεξιά του μηδενίζονται)

ii. $54,962 \approx 55,000 \approx 55$

(το ψηφίο των δεκάτων είναι το 9, ελέγχω το 6, οπότε το 9 αυξάνεται κατά μια μονάδα γίνεται 10 άρα επηρεάζεται και το ψηφίο των μονάδων)

iii. $54,962 \approx 55,000 \approx 55$

(το ψηφίο των εκατοστών είναι το 6, ελέγχω το 2, οπότε το 6 παραμένει ίδιο)

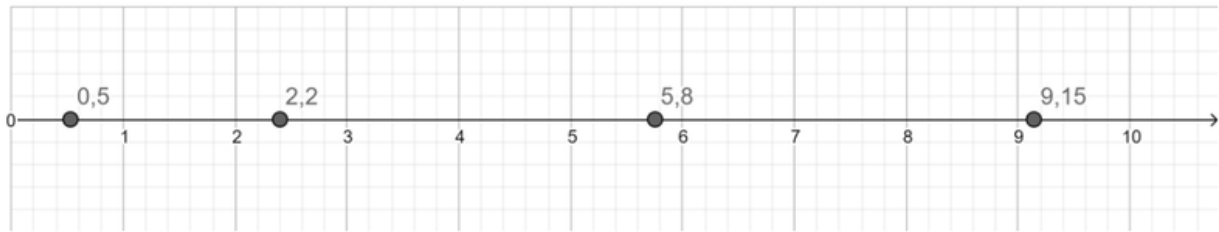
2. Να τοποθετηθούν στην ευθεία των αριθμών οι δεκαδικοί αριθμοί:
i.0,5 ii.2,2 iii.5,8 iv.9,15

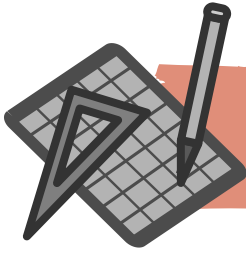
i. Ισχύει ότι: $0 < 0,5 < 1$. Άρα το τμήμα της ευθείας μεταξύ του 0 και του 1 πρέπει να χωριστεί σε 10 ίσα τμήματα.

ii. Ισχύει ότι: $2 < 2,2 < 3$

iii. Ισχύει ότι: $5 < 5,8 < 6$

iv. Ισχύει ότι: $9 < 9,15 < 10$. Άρα το τμήμα της ευθείας μεταξύ του 9 και 10 πρέπει να χωριστεί σε 100 ίσα τμήματα.





3.5. Μονάδες μέτρησης

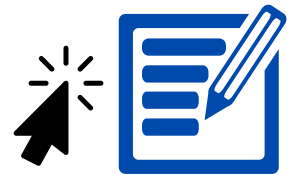
1. Τι ονομάζουμε μήκος; Να αναφέρετε την βασική μονάδα μέτρησης του μήκους, καθώς και τα πολλαπλάσια και τις υποδιαιρέσεις.

- Μήκος είναι το φυσικό μέγεθος που εκφράζει την απόσταση μεταξύ δύο σημείων.
- Βασική μονάδα μέτρησης: 1 μέτρο ή 1μ. ή 1m
- Πολλαπλάσια του μέτρου:

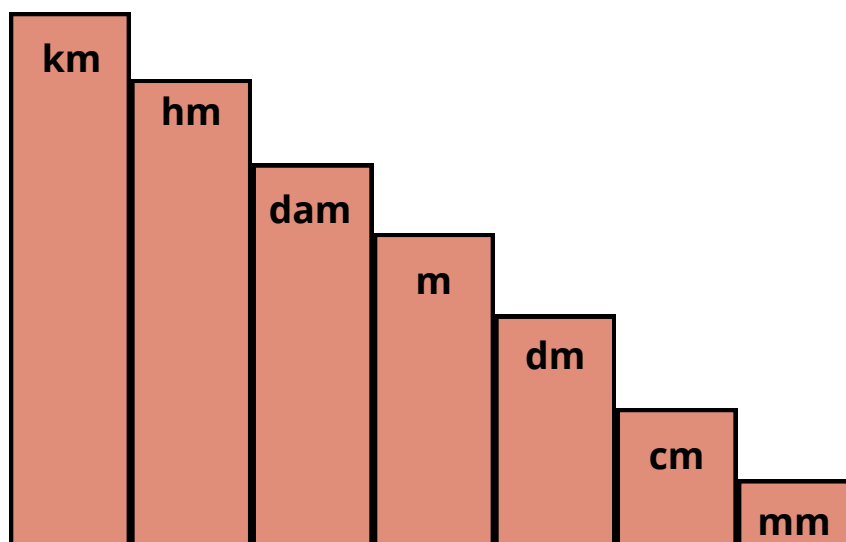
1 χιλιόμετρο ή 1km
1 εκατόμετρο ή 1hm
1 δεκάμετρο ή dam
1 ναυτικό μίλι: 1852m

- Υποδιαιρέσεις του μέτρου:

1 δεκατόμετρο ή παλάμη ή 1dm
1 εκατοστόμετρο ή πόντος ή 1cm
1 χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό ή 1 mm



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Κατά τις μετατροπές όταν ανεβαίνουμε κλίμακα διαιρούμε ενώ όταν κατεβαίνουμε πολλαπλασιάζουμε με τους κατάλληλους αριθμούς.

1 σκαλί: 10

4 σκαλιά: 10.000

2 σκαλιά: 100

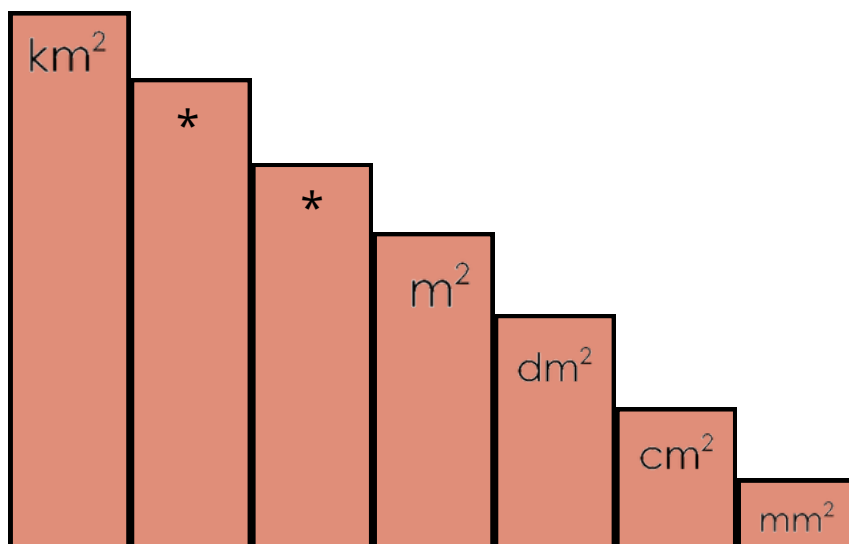
5 σκαλιά: 100.000

3 σκαλιά: 1.000

6 σκαλιά: 1.000.000

2. Τι ονομάζουμε εμβαδόν; Να αναφέρετε την βασική μονάδα μέτρησης του εμβαδού καθώς και τα πολλαπλάσια και τις υποδιαιρέσεις.

- Το εμβαδόν μιας επιφάνειας είναι το φυσικό μέγεθος που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο.
- Βασική μονάδα μέτρησης: 1 τετραγωνικό μέτρο ή 1 τ.μ. ή 1m^2
- Πολλαπλάσια του τετραγωνικού μέτρου:
 - 1 τετραγωνικό χιλιόμετρο ή 1 km^2
 - 1 στρέμμα: 1.000 m^2
- Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου:
 - 1 τετραγωνικό δεκατόμετρο ή 1 τ.δεκ. ή 1 dm^2
 - 1 τετραγωνικό εκατοστόμετρο ή 1 τ.εκ. ή 1 cm^2
 - 1 τετραγωνικό χιλιοστόμετρο ή 1 τ.χιλ. ή 1 mm^2



Κατά τις μετατροπές όταν ανεβαίνουμε κλίμακα διαιρούμε ενώ όταν κατεβαίνουμε πολλαπλασιάζουμε με τους κατάλληλους αριθμούς.

1 σκαλί: 100

4 σκαλιά: 100.000.000

2 σκαλιά: 10.000

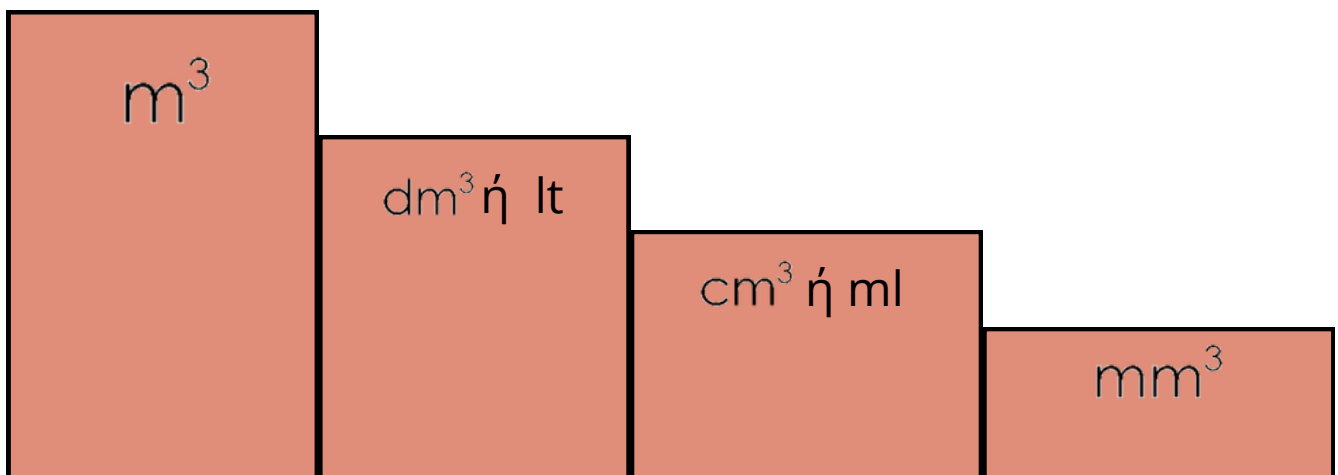
5 σκαλιά: 10.000.000.000

3 σκαλιά: 1.000.000

6 σκαλιά: 1.000.000.000.000

3. Τι ονομάζουμε όγκο; Να αναφέρετε την βασική μονάδα μέτρησης του όγκου καθώς και τις υποδιαιρέσεις.

- Όγκος είναι το φυσικό μέγεθος που εκφράζει την ποσότητα του χώρου που καταλαμβάνει ένα σώμα.
- Βασική μονάδα μέτρησης: 1 κυβικό μέτρο ή 1 κ.μ. ή 1 m^3
- Υποδιαιρέσεις κυβικού μέτρου:
 - 1 κυβικό δεκατόμετρο ή 1 κ.δεκ. ή 1 dm^3 ή 1 λίτρο ή 1 lt
 - 1 κυβικό εκατοστόμετρο ή 1 κ.εκ. ή 1 cm^3 ή 1 χιλιοστόλιτρο ή 1 ml
 - 1 κυβικό χιλιοστόμετρο ή 1 κ.χιλ. ή 1 mm^3



Κατά τις μετατροπές όταν ανεβαίνουμε κλίμακα διαιρούμε ενώ όταν κατεβαίνουμε πολλαπλασιάζουμε με τους κατάλληλους αριθμούς.

1 σκαλί: 1.000

2 σκαλιά: 1.000.000

3 σκαλιά: 1.000.000.000

4. Τι ονομάζουμε μάζα; Να αναφέρετε την βασική μονάδα μέτρησης της μάζας καθώς και τα πολλαπλάσια και τις υποδιαιρέσεις.

Μάζα είναι το φυσικό μέγεθος που εκφράζει την ποσότητα της ύλης που περιέχεται σε ένα σώμα.

- Βασική μονάδα μέτρησης: 1 χιλιόγραμμα ή 1 κιλό ή 1 kg

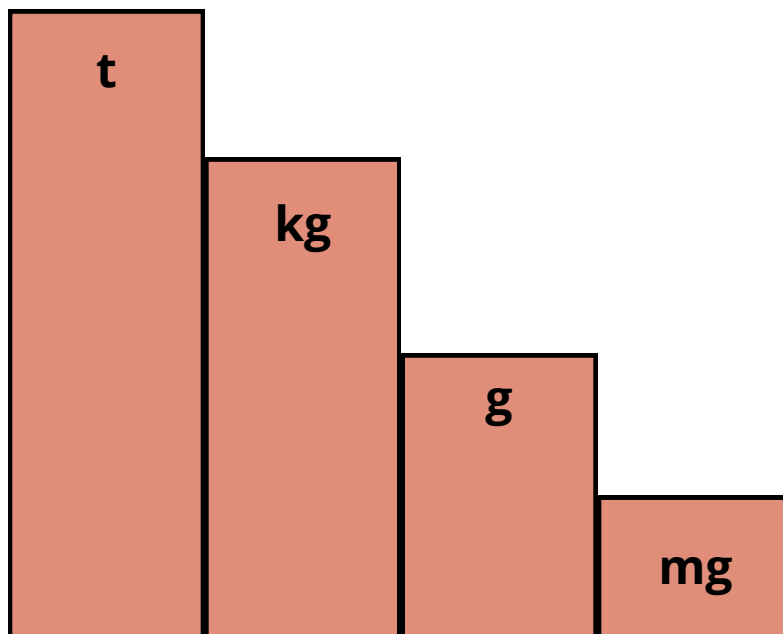
- Πολλαπλάσια του κιλού:

1 τόνος ή 1 t

- Υποδιαιρέσεις του κιλού:

1 γραμμάριο ή 1 g

1 χιλιοστογραμμάριο ή 1 mg



Κατά τις μετατροπές όταν ανεβαίνουμε κλίμακα διαιρούμε ενώ όταν κατεβαίνουμε πολλαπλασιάζουμε με τους κατάλληλους αριθμούς.

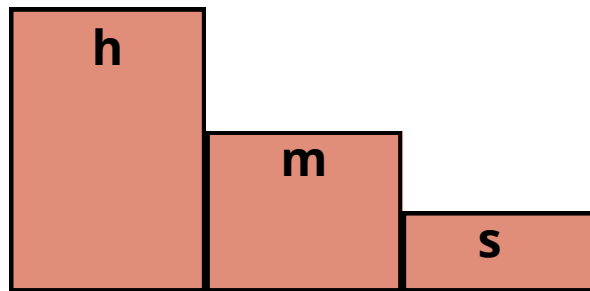
1 σκαλί: 1.000

2 σκαλιά: 1.000.000

3 σκαλιά: 1.000.000.000

5. Τι ονομάζουμε χρόνο; Να αναφέρετε την βασική μονάδα μέτρησης του χρόνου καθώς και τα πολλαπλάσια και τις υποδιαιρέσεις.

- Χρόνος είναι το φυσικό μέγεθος που εκφράζει την χρονική διάρκεια μεταξύ δύο γεγονότων.
- Βασική μονάδα μέτρησης: 1 δευτερόλεπτο ή 1s
- Πολλαπλάσια του δευτερόλεπτου:
 - 1 ημέρα ή 1d: $24h = 1.440 \text{ min} = 86.400 \text{ s}$
 - 1 ώρα ή 1h: $60 \text{ min} = 3.600 \text{ s}$
 - 1 λεπτό ή 1min: 60s



Κατά τις μετατροπές όταν ανεβαίνουμε κλίμακα διαιρούμε ενώ όταν κατεβαίνουμε πολλαπλασιάζουμε με τους κατάλληλους αριθμούς.

1 σκαλί: 60

2 σκαλιά: 3.600



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να γίνουν οι μετατροπές:

i. $29\text{mm} = 29 : 1.000 = 0,029\text{m}$

ii. $1.640\text{mm} = 1.640 : 1.000 = 1,64\text{m}$

iii. $35\text{cm} = 35 : 10 = 3,5\text{dm}$

iv. $26\text{m} = 26 \cdot 100 = 2.600\text{cm}$



2. Να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο της ανισότητας (< ή >) ανάμεσα στους αριθμούς

- i. $34,5\text{km} \dots 3.450\text{m}$ (αφού $34,5\text{km}=34.500\text{m}$)
- ii. $0,7\text{mm} \dots 7\text{cm}$ (αφού $0,7\text{mm}=0,07\text{cm}$)
- iii. $0,643\text{hm} \dots 6,43\text{cm}$ (αφού $0,643\text{hm} = 6430\text{cm}$)

3. Ο ιδιοκτήτης ενός οικοπέδου σχήματος τετράπλευρου θέλει να το περιφράξει με σύρμα. Μέτρησε τις πλευρές του και το μήκος κάθε μιας είναι $23,5\text{m}$, $1296,89\text{cm}$, $0,0097\text{km}$ και $182,3\text{dm}$. Ποιο είναι το μήκος του σύρματος που θα χρειαστεί;

Θα μετατρέψουμε όλα τα μήκη των πλευρών σε m.

$$1296\text{cm} = 12\text{m}$$

$$0,0097\text{km} = 9,7\text{m}$$

$$182,3\text{dm} = 18,23\text{m}$$

$$\text{Περίμετρος} = 23,5 + 12 + 9,7 + 18,23 = 63,43\text{m}$$

Θα χρειαστεί $64,43\text{m}$ σύρμα.

4. Να γίνουν οι μετατροπές:

- i. $4,75\text{m}^2 = 4,75:1.000 = 0,00475$ στρέμματα
- ii. $18.000\text{mm}^2 = 18.000:10.000 = 1,8\text{dm}^2$
- iii. $0,006\text{m}^2 = 0,006 \cdot 1.000.000 = 6.000\text{mm}^2$
- iv. $0,0000124\text{km}^2 = 0,0000124 \cdot 100.000.000 = 1.240\text{dm}^2$

5. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τα παρακάτω μεγέθη 0,231 στρέμματα,

$$7.052.286\text{mm}^2$$

$$46.092\text{dm}^2$$

$$7\text{m}^2$$

Μετατρέπουμε σε: m^2

$$0,231 \text{ στρέμματα} = 0,231 \cdot 1.000 = 231\text{m}^2$$

$$7.052.286\text{mm}^2 = 7.052.286 : 1.000.000 = 7,052286\text{m}^2$$

$$46.092\text{dm}^2 = 46.092 : 1.000 = 46,092\text{m}^2$$

$$\text{Άρα: } 7\text{m}^2 < 7,052286\text{m}^2 < 46,092\text{m}^2 < 231\text{m}^2$$

6. Μια πλατεία σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκος 70m και πλάτος 30m θα πλακοστρωθεί με πλάκες σχήματος τετραγώνου πλευράς 5dm. Πόσες πλάκες θα χρησιμοποιήσουμε;

$$Ε \text{ πλατείας} = 70 \cdot 30 = 2.100\text{m}^2$$

$$Ε \text{ πλάκας} = 5 \cdot 5 = 25\text{dm}^2 = 0,25\text{m}^2$$

$$\text{Πλάκες} = 2.100 : 0,25 = 8.400$$

Θα χρησιμοποιήσουμε 8.400 πλάκες.

7. Να γίνουν οι μετατροπές:

$$\text{i. } 3.700\text{mm}^3 = 3.700 : 1.000 = 3,7\text{ml}$$

$$\text{ii. } 0,02\text{m}^3 = 0,02 \cdot 1.000 = 20\text{lt}$$

$$\text{iii. } 7.000.000\text{cm}^3 = 7.000.000 : 1.000.000 = 7\text{m}^3$$

8. Μια δεξαμενή σχήματος κύβου έχει ακμή 8m. Αν η παροχή του νερού που πέφτει στην δεξαμενή είναι 400lt νερό την ώρα, σε πόσες ώρες γεμίζει η δεξαμενή;

$$V_{\text{δεξαμενής}} = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 \text{ m}^3$$

$$400 \text{ lt} = 400 : 1.000 = 0,4 \text{ m}^3$$

$$\text{Ώρες: } 512 : 0,4 = 1.280$$

Η δεξαμενή θα γεμίσει σε 1.280 ώρες.

9. Να γίνουν οι μετατροπές:

i. $0,019 \text{ t} = 0,019 \cdot 1.000.000 = 19.000 \text{ g}$

ii. $10,5 \text{ g} = 10,5 \cdot 1.000 = 10.500 \text{ mg}$

iii. $12.082 \text{ kg} = 12.082 : 1.000 = 12,082 \text{ t}$

10. Να τοποθετήσετε σε φθίνουσα σειρά τα παρακάτω μεγέθη 4.230g, 0,008t, 6kg, 12.387mg.

Μετατρέπουμε σε kg:

$$4.230 \text{ g} = 4.230 : 1.000 = 4,23 \text{ kg}$$

$$0,008 \text{ t} = 0,008 \cdot 1.000 = 8 \text{ kg}$$

$$12.387 \text{ mg} = 12.387 : 1.000.000 = 0,012387 \text{ kg}$$

$$8 \text{ kg} > 6 \text{ kg} > 4,23 \text{ kg} > 0,012387 \text{ kg}$$

11. Να γίνουν οι μετατροπές:

- i. 7 ημέρες 8 ώρες = $7 \cdot 24 \text{ ώρες} + 8 \text{ ώρες} = 176 \text{ ώρες}$
- ii. $7\text{h } 1.200\text{min} = 7\text{h} + 1.200:60\text{h} = 27\text{h}$
- iii. $5 \text{ έτη} = 5 \cdot 365 \text{ ημέρες} = 1.825 \text{ ημέρες}$

12. Ο Γιώργος εργάζεται καθημερινά από τις 8:45 π.μ. μέχρι τις 8:00 μ.μ. Πόσο χρόνο αφιερώνει καθημερινά στην εργασία του;

Μετατρέπουμε αρχικά την ώρα αποχώρησης του από την εργασία του:

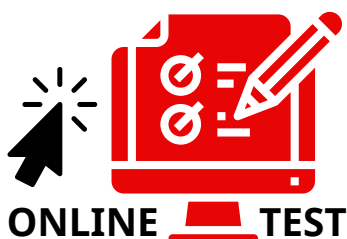
$$8:00 \text{ μ.μ.} = 8:00 + 12:00 = 20:00$$

20 ώρες 00 λεπτά
- 8 ώρες 45 λεπτά



19 ώρες 60 λεπτά
- 8 ώρες 45 λεπτά

11 ώρες 15 λεπτά



4

*εξισώσεις και
προβλήματα*



4.1. Η έννοια της εξίσωσης

Οι εξισώσεις: $a + x = \beta$, $x - a = \beta$, $a - x = \beta$,
 $ax = \beta$, $a : x = \beta$ και $x : a = \beta$

1. Τι ονομάζουμε εξίσωση;

Εξίσωση με έναν άγνωστο είναι μια ισότητα, που περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα (άγνωστος).

2. Τι ονομάζουμε λύση ή ρίζα μιας εξίσωσης;

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός που όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

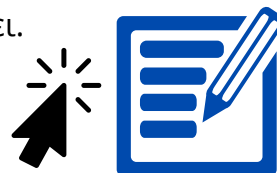
3. Πότε μια εξίσωση λέγεται ταυτότητα ή αόριστη και πότε αδύνατη;

- Μια εξίσωση λέγεται ταυτότητα ή αόριστη, όταν όλοι οι αριθμοί είναι λύσεις της.

π.χ. $0 \cdot x = 0$

- Μια εξίσωση λέγεται αδύνατη, όταν κανένας αριθμός δεν την επαληθεύει.

π.χ. $0 \cdot x = 7$



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

4. Τι ονομάζουμε επίλυση εξίσωσης;

Η διαδικασία μέσω της οποίας βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης λέγεται επίλυση της εξίσωσης.

Βάσει των ορισμών των πράξεων έχουμε:

$$a + x = \beta \quad \text{τότε} \quad x = \beta - a \quad (\text{όμοια για } x + a = \beta)$$

$$x - a = \beta \quad \text{τότε} \quad x = \beta + a$$

$$a - x = \beta \quad \text{τότε} \quad x = a - \beta$$

$$a \cdot x = \beta \quad \text{τότε} \quad x = \beta : a \quad (\text{όμοια για } x \cdot a = \beta)$$

$$x : a = \beta \quad \text{τότε} \quad x = \beta \cdot a$$

$$a : x = \beta \quad \text{τότε} \quad x = a : \beta$$



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να γράψετε τις παρακάτω εκφράσεις με τη βοήθεια μιας μεταβλητής:

i. Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 9.

Έστω x ο αριθμός. Τότε έχουμε: $5 \cdot x + 9$ ή $5x + 9$

ii. Το μισό ενός αριθμού ισούται με 32.

Έστω x ο αριθμός. Τότε έχουμε: $\frac{1}{2}x = 32$

iii. Το γινόμενο δύο αριθμών είναι μεγαλύτερο του 23.

Έστω x, y οι αριθμοί. Τότε έχουμε: $xy > 23$

2. Να διατυπώσετε με λόγια τις ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις:

i. $6x = 12 = 72$

Το εξαπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 12 ισούται με 72.

ii. $x - 4y = 12$

Ένας αριθμός ελαττώνεται κατά το τετραπλάσιο ενός άλλου αριθμού και ισούται με 12.

3. Να γράψετε με απλούστερο τρόπο τις μαθηματικές εκφράσεις:

i. $x + x + x = 1x + 1x + 1x = 3x$

ii. $7 \cdot x + x = 7x + 1x = 8x$

iii. $9 \cdot x + 2 \cdot y - y + x = 9x + 1x + 2y - 1y = 10x + y$

4. Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς 3 ή 5 είναι λύση της εξίσωσης $3x + 7 = 22$.

- Για $x = 3$:

$$3x + 7 = 22$$

$$3 \cdot 3 + 7 = 22$$

$$9 + 7 = 22$$

$$16 = 22$$

Δεν ισχύει, άρα το 3
δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.

- Για $x = 5$:

$$3x + 7 = 22$$

$$3 \cdot 5 + 7 = 22$$

$$15 + 7 = 22$$

$$22 = 22$$

Ισχύει, άρα το 5
είναι ρίζα της εξίσωσης.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $x + 4 = 27$

$$x = 27 - 4$$

$$x = 23$$

ii. $72 + x = 891$

$$x = 891 - 72$$

$$x = 819$$

iii. $x - 95 = 13$

$$x = 13 + 95$$

$$x = 108$$

iv. $144 - x = 12$

$$x = 144 - 12$$

$$x = 132$$

v. $11x = 198$

$$x = 198 : 11$$

$$x = 18$$

vi. $x \cdot 3 = 21$

$$x = \frac{21}{3}$$

$$x = 7$$

vii. $\frac{x}{4} = 5$

$$x = 4 \cdot 5$$

$$x = 20$$

viii. $\frac{6}{x} = 36$

$$x = 36 : 6$$

$$x = 6$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\frac{x}{3} = \frac{12}{6}$

$$6x = 12 \cdot 3$$

$$6x = 36$$

$$x = 36 : 6$$

$$x = 6$$

ii. $\frac{x+3}{2} = 7$

$$x+3 = 7 \cdot 2$$

$$x+3 = 14$$

$$x = 14 - 3$$

$$x = 11$$

iii. $4 \cdot (x+2) + 1 = 21$

$$4 \cdot x + 4 \cdot 2 + 1 = 21$$

$$4x + 8 + 1 = 21$$

$$4x + 9 = 21$$

$$4x = 21 - 9$$

$$4x = 12$$

$$x = 12 : 4$$

$$x = 3$$

iv. $x + 3 + 2x = 15$

$$1x + 2x + 3 = 15$$

$$3x + 3 = 15$$

$$3x = 15 - 3$$

$$3x = 12$$

$$x = 12 : 3$$

$$x = 4$$

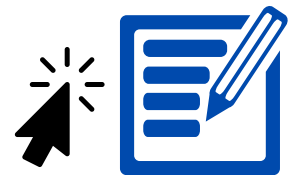




Α.4.2. Επίλυση προβλημάτων - Α.4.3. Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

1. Τι ονομάζουμε πρόβλημα, λύση και επίλυση προβλήματος;

- Πρόβλημα ονομάζουμε την κατάσταση, που δημιουργείται, όταν αντιμετωπίζουμε εμπόδια και δυσκολίες στην προσπάθεια μας να φτάσουμε σε ένα συγκεκριμένο στόχο.
- Λύση ενός προβλήματος είναι η επίτευξη του στόχου.
- Επίλυση ενός προβλήματος ονομάζεται η διαδικασία, με την οποία επιτυγχάνεται η λύση του.

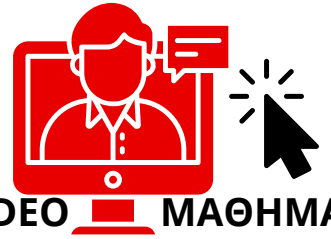


**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

2. Ποια είναι τα βήματα επίλυσης προβλημάτων με την χρήση εξισώσεων;

Για την λύση των προβλημάτων, με τη βοήθεια εξισώσεων, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Προσδιορίζουμε το άγνωστο στοιχείο του προβλήματος και το εκφράζουμε με ένα γράμμα (x ή y ή z ή ω ...), που είναι ο άγνωστος του προβλήματος.
- Εκφράζουμε τα στοιχεία του προβλήματος με την βοήθεια του αγνώστου.
- Περιγράφουμε με μια εξίσωση το πρόβλημα.
- Επιλύουμε την εξίσωση του προβλήματος.
- Επαληθεύουμε την λύση που βρήκαμε.



1. Το τετραπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 3 ισούται με 61. Να βρείτε τον αριθμό.

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Οπότε:

$$4x - 3 = 61$$

$$4x = 61 + 3$$

$$4x = 64$$

$$x = 64 : 4$$

$$x = 16$$

Επαλήθευση:

$$4 \cdot 16 - 3 = 61$$

$$64 - 3 = 61$$

$$61 = 61, \text{ ισχύει}$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι το 16.

2. Το άθροισμα τριών διαδοχικών άρτιων αριθμών ισούται με 312. Ποιοι είναι οι αριθμοί;

Έστω $2x$ ο 1ος άρτιος αριθμός.

$$\text{1ος: } 2x$$

$$\text{2ος: } 2x+2$$

$$\text{3ος: } 2x+4$$

$$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 312$$

$$6x + 6 = 312$$

$$6x = 312 - 6$$

$$6x = 306$$

$$x = 306 : 6$$

$$x = 51$$

$$\text{Άρα: } \text{1ος: } 2x = 2 \cdot 51 = 102$$

$$\text{2ος: } 2x+2 = 2 \cdot 51 + 2 = 102 + 2 = 104$$

$$\text{3ος: } 2x+4 = 2 \cdot 51 + 4 = 102 + 4 = 106$$

$$\text{Επαλήθευση: } 102 + 104 + 106 = 312$$

Άρα οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 102, 104 και 106.

3. Το άθροισμα των ηλικιών μιας μητέρας και της κόρης της είναι 35 έτη. Αν η ηλικία της μητέρας είναι εξαπλάσια από την ηλικία της κόρης να βρείτε πόσο ετών είναι η κάθε μια.

Έστω x η ηλικία της κόρης.

Κόρη: x

Μητέρα: $6x$

$$x + 6x = 35$$

$$7x = 35$$

$$x = 35 : 7$$

$$x = 5$$

$$\text{Κόρη: } x = 5$$

$$\text{Μητέρα: } 6 \cdot 5 = 30$$

$$\text{Επαλήθευση: } 5 + 30 = 35$$

Άρα η μητέρα είναι 30 ετών ενώ η κόρη 5 ετών.

4. Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι 24 cm^2 . Η βάση του είναι 8 cm . Να υπολογίσετε το ύψος του τριγώνου.

Έστω x το ύψος του τριγώνου.

Ύψος: x

Βάση: 8 cm

$$E_{\text{τριγώνου}} = 24 \text{ cm}^2$$

$$E_{\text{τριγώνου}} = 24$$

$$\frac{\text{βάση} \cdot \text{ύψος}}{2} = 24$$

$$\frac{8x}{2} = 24$$

$$8x = 24 \cdot 2$$

$$8x = 48$$

$$x = 48 : 8$$

$$x = 6$$

Ύψος: $x = 6 \text{ cm}$

Επαλήθευση: $E_{\text{τριγώνου}} = \frac{\text{βάση} \cdot \text{ύψος}}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{48}{2} = 24 \text{cm}^2$

Άρα το ύψος του τριγώνου ισούται με 6 cm.

5. Τα $\frac{3}{8}$ των μαθητών ενός σχολείου παρακολουθούν το μάθημα των Γαλλικών. Αν οι μαθητές που παρακολουθούν Γαλλικά είναι 108, πόσους μαθητές έχει το σχολείο;

Έστω x οι μαθητές του σχολείου.

$$\begin{aligned} \text{Τα } \frac{3}{8} \text{ του } x \text{ είναι } 108: \quad & \frac{3}{8} \cdot x = 108 \\ & x = 108 : \frac{3}{8} \\ & x = 108 \cdot \frac{8}{3} \\ & x = \frac{864}{3} \\ & x = 288 \end{aligned}$$

Μαθητές: 288

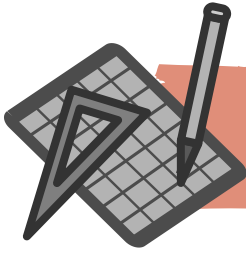
Επαλήθευση: Τα $\frac{3}{8}$ του 288 = $\frac{3}{8} \cdot 288 = \frac{864}{8} = 108$

Άρα οι μαθητές του σχολείου είναι 288.



5

ποσοστά



5.1. Η έννοια του ποσοστού

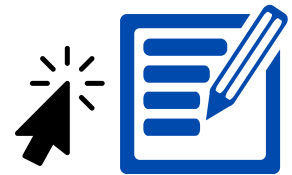
1. Τι είναι το ποσοστό α%;

Το ποσοστό συμβολίζεται α% και ισούται με το πηλίκιο $\frac{α}{100}$

Το σύμβολο % διαβάζεται ποσοστό επί τις εκατό.

- Το α% του β: $\frac{α}{100} \cdot β$

- Το α% είναι β: $β : \frac{α}{100}$



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

2. Τι είναι το ποσοστό α‰;

Το ποσοστό α‰ διαβάζεται ποσοστό επί τοις χιλίοις και είναι ίσο με $\frac{α}{1000}$

3. Πώς μετατρέπουμε δεκαδικό αριθμό σε ποσοστό %;

Αρχικά μετατρέπουμε τον δεκαδικό αριθμό σε δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή το 100, δηλαδή στην μορφή $\frac{α}{100}$ και έπειτα, γράφουμε α%.

π.χ. i. $0,62 = \frac{62}{100} = 62\%$

iii. $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$

ii. $7,32 = \frac{732}{100} = 732\%$

iv. $0,003 = \frac{0,3}{100} = 0,3\%$

4. Πώς μετατρέπουμε κλάσμα σε ποσοστό;

1ος τρόπος:

- Μετατρέπουμε το κλάσμα σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 100, δηλαδή στην μορφή $\frac{a}{100}$
- Έπειτα, γράφουμε α%.

2ος τρόπος:

- Εκτελούμε την διαίρεση που εκφράζει το κλάσμα, δηλαδή $\frac{a}{b} = a : b$
- Μετατρέπουμε τον δεκαδικό αριθμό που έχει προκύψει από την διαίρεση σε δεκαδικό κλάσμα με παρονομαστή το 100, δηλαδή $\frac{a}{100}$ και έπειτα γράφουμε στην μορφή α%

π.χ. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{2}{5}$ σε ποσοστό %.

1ος τρόπος:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{40}{100} = 40\%$$

2ος τρόπος:

$$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\%$$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να μετατρέψετε τα ποσοστά σε ανάγωγα κλάσματα:

i. 2%:

$$2\% = \frac{2}{100} = \frac{2 : 2}{100 : 2} = \frac{1}{50}$$

ii. 260‰:

$$260\text{‰} = \frac{260}{1.000} = \frac{260 : 20}{1.000 : 20} = \frac{13}{50}$$

2. Να μετατρέψετε τα ποσοστά σε ανάγωγα κλάσματα:

i. 67%:

$$67\% = \frac{67}{100} = 0,67$$

ii. 34‰:

$$34\text{‰} = \frac{34}{1.000} = 0,034$$

iii. 0,39%

$$0,39\% = \frac{0,39}{100} = 0,0039$$

3. Να υπολογίσετε:

i. Το 15% των 250 €:

$$\frac{15}{100} \cdot 250 = \frac{3.750}{100} = 3.750 : 100 = 37,5\text{€}$$

ii. Το 37‰ των 3 κιλών:

$$\frac{37}{1.000} \cdot 3.000 = \frac{111.000}{1.000} = 111\text{g}$$

4. Να βρείτε ποιου αριθμού:

i. Το 50% είναι 46:

$$46 : \frac{50}{100} = 46 \cdot \frac{100}{50} = \frac{4.600}{50} = 4.600 : 50 = 92$$

ii. Το 789% είναι 20.514:

$$20.514 : \frac{789}{1.000} = 20.514 \cdot \frac{1.000}{789} = \frac{20.514.000}{789} = 26.000$$

5. Να βρείτε τι ποσοστό είναι:

i. Τα 30 € για τα 120 €:

$$\text{Ποσοστό} = \frac{30}{120} = 30 : 120 = 0,25 = 25\%$$

ii. Τα 75 g για τα 200 g:

$$\text{Ποσοστό} = \frac{75}{200} = 75 : 200 = 0,375 = 37,5\%$$





5.2. Προβλήματα με ποσοστά

1. Πώς εργαζομαι για να βρω την τελική τιμή σε ένα πρόβλημα με ποσοστά;

- **Προβλήματα αύξησης**

Αρχική Τιμή: α

Ποσοστό αύξησης: $\beta\%$

Τελική τιμή: ; (ζητούμενο)

- Αύξηση: Το $\beta\%$ του α : $\alpha \cdot \frac{\beta}{100}$

- Τελική Τιμή: Αρχική τιμή + Αύξηση

→ Με τον ίδιο τρόπο εργαζομαι σε προβλήματα κέρδους, Φ.Π.Α., επιτοκίου.

- **Προβλήματα μείωσης:**

Αρχική Τιμή: α

Ποσοστό μείωσης: $\beta\%$

Τελική τιμή: ; (ζητούμενο)

- Μείωση: Το $\beta\%$ του α : $\alpha \cdot \frac{\beta}{100}$

- Τελική Τιμή: Αρχική τιμή - Μείωση

→ Με τον ίδιο τρόπο εργαζομαι σε προβλήματα έκπτωσης, ζημίας, φθοράς.



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

Παράδειγμα:

Σε ένα προϊόν αξίας 300 € προστίθεται ο Φ.Π.Α. με συντελεστή 24%.

i. Ποιο είναι το ποσό στο οποίο αντιστοιχεί ο φόρος που πρέπει να αποδοθεί στο κράτος;

ii. Ποια είναι η τελική τιμή του προϊόντος;

Αρχική Τιμή: 300 €

Φ.Π.Α. : 24%

Τελική Τιμή: ; (ζητούμενο)

i. Φόρος: Το 24% των 300 €

$$\frac{24}{100} \cdot 300 = 72$$

Ο φόρος που πρέπει να αποδοθεί είναι 72 €.

ii. Τελική Τιμή: $300 + 72 = 372$ €

Η τελική τιμή του προϊόντος έχει διαμορφωθεί στα 372 €.

Παράδειγμα:

Ένα κατάστημα κάνει έκπτωση 35% σε όλα τα είδη του. Αν ένα προϊόν κοστίζει 170 € σε πόσα χρήματα θα αντιστοιχεί η έκπτωση και πόσο τελικά θα το αγοράσει ο πελάτης;

Αρχική Τιμή: 170 €

Ποσοστό Έκπτωσης: 35%

Τελική Τιμή: ; (ζητούμενο)

• Έκπτωση: Το 35% του 177

$$\frac{35}{100} \cdot 170 = 59,50$$

Η έκπτωση αντιστοιχεί σε 59,50 €

- Τελική Τιμή: $177 + 59,50 = 236,50 \text{ €}$

Η τελική τιμή του προϊόντος έχει διαμορφωθεί στα 236,50 €.

Παράδειγμα:

Ποσό 1.200 € κατατέθηκε σε λογαριασμό ταμειευτηρίου, με επιτόκιο 3%. Πόσος θα είναι ο τόκος που θα αποδώσει το κεφάλαιο αυτό έπειτα από ένα έτος;

Ποιο θα είναι το κεφάλαιο στο τέλος του έτους;

Αρχικό Κεφάλαιο: 1.200 €

Επιτόκιο: 3%

Τελικό Κεφάλαιο: (ζητούμενο)

- Τόκος: Το 3% των 1.200 €: $\frac{3}{100} \cdot 1.200 = \frac{3.600}{100} = 36$
- Τελικό Κεφάλαιο: $1.200 + 36 = 1.236 \text{ €}$

2. Πώς βρίσκω το ποσοστό σε ένα πρόβλημα;

Βρίσκω το ποσοστό όταν μου δίνεται η μεταβολή της τιμής:

Αρχική Τιμή: α

Αύξηση ή Μείωση: β

Τελική Τιμή: -

$$\text{Ποσοστό} = \frac{\text{Αύξηση ή Μείωση}}{\text{Αρχ.Τιμή}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Βρίσκω το ποσοστό όταν μου δίνεται η τελική τιμή:

Αρχική Τιμή: α

Ποσοστό Αύξησης ή Μείωσης ; (ζητούμενο)

Τελική Τιμή: β

Μεταβολή: α - β ή β - α (ανάλογα ποια τιμή είναι μεγαλύτερη)

$$\text{Ποσοστό} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$$

Έπειτα σε κάθε περίπτωση μετατρέπουμε το κλάσμα σε ποσοστό.

Παράδειγμα:

Σε ένα προϊόν αρχικής αξίας 1.200 € πραγματοποιείται έκπτωση της τάξης των 180 €. Ποιο είναι το ποσοστό της έκπτωσης;

Αρχική Τιμή: 1.200 €

Έκπτωση: 180 €

Τελική Τιμή: -

$$\text{Ποσοστό} = \frac{\text{Έκπτωση}}{\text{Αρχ.Τιμή}} = \frac{180}{1.200} = 180 : 1.200 = 0,15 = 15\%$$

Παράδειγμα:

Κατά τους θερινούς μήνες παρατηρήθηκε αύξηση στην αγορά ηλεκτρικών ειδών. Ένα κλιματιστικό που αρχικά κόστιζε 980 € τελικά αγοράστηκε 1.127 €.

Να βρείτε το ποσοστό της αύξησης.

Αρχική Τιμή: 980 €

Ποσοστό Αύξησης: (ζητούμενο)

Τελική Τιμή: 1.127 €

$$\text{Μεταβολή} = 1.127 - 980 = 147 \text{ €}$$

$$\text{Ποσοστό} = \frac{\text{Μεταβολή}}{\text{Αρχ.Τιμή}} = \frac{147}{980} = 0,15 = 15\%$$

Παράδειγμα:

Ένα προϊόν που κόστιζε αρχικά 780 € επιβαρύνεται με συντελεστή Φ.Π.Α. 24%. Την περίοδο των εκπτώσεων το κατάστημα εφαρμόζει έκπτωση 30% σε όλα του τα είδη.

i. Ποια είναι η τελική αξία του προϊόντος .

ii. Ποιο είναι το ποσοστό μεταβολής της τιμής του προϊόντος;

i. Αρχική Τιμή: 780 €

Φ.Π.Α.: 24%

Τελική Τιμή: (ζητούμενο)

$$\text{Φόρος: Το 24\% του 780: } \frac{24}{100} \cdot 780 = \frac{18.720}{100} = 187,2$$

$$\text{Τελική Τιμή: } 780 + 187,2 = 967,2 \text{ €}$$

Αρχική Τιμή: 967,2 € (θεωρούμε την προηγούμενη τελική τιμή)

Ποσοστό Έκπτωσης: 30%

Τελική Τιμή: (ζητούμενο)

$$\text{Έκπτωση: Το 30\% του 967,2: } \frac{30}{100} \cdot 967,2 = \frac{29.016}{100} = 290,16 \text{ €}$$

$$\text{Τελική Τιμή: } 967,2 - 290,16 = 677,04 \text{ €}$$

Η τελική τιμή του προϊόντος διαμορφώθηκε στα 677,04€.

ii. Αρχική Τιμή: 780 €

Ποσοστό Έκπτωσης: (ζητούμενο)

Τελική Τιμή: 677,04 €

$$\text{Μεταβολή: } 780 - 677,04 = 102,96 \text{ €}$$

$$\text{Ποσοστό Έκπτωσης: } \frac{\text{Μεταβολή}}{\text{Αρχ.Τιμή}} = \frac{102,96}{780} = 0,132 = 13,2\%$$

Το ποσοστό έκπτωσης είναι 13,2%.

3. Πώς βρίσκω την αρχική τιμή;

Βρίσκω την αρχική τιμή όταν γνωρίζω το ποσοστό και την τιμή που αντιπροσωπεύει.

Αρχική Τιμή: (ζητούμενο)

Ποσοστό Αύξησης: $\alpha\% \rightarrow \beta$

Τελική Τιμή: -

Θεωρούμε x την ζητούμενη αρχική τιμή και δημιουργούμε ένα πίνακα ποσών τιμών.

Αρχική Τιμή	100	x
Αύξηση	α	β

Παίρνουμε τις τιμές των ποσών « χιαστί » και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Με αντίστοιχο τρόπο εργαζόμαστε σε προβλήματα μείωσης.

Βρίσκω την αρχική τιμή, όταν γνωρίζω το ποσοστό και την τελική τιμή.

i. Αρχική Τιμή: (ζητούμενο)

Ποσοστό Αύξησης: $\alpha\%$ (ενδιάμεση πράξη: $100 + \alpha$)

Τελική Τιμή: β

Θεωρούμε x την ζητούμενη αρχική τιμή και δημιουργούμε ένα πίνακα ποσών τιμών.

Αρχική Τιμή	100	x
Τελική Τιμή	$100+\alpha$	β

Παίρνουμε τις τιμές των ποσών « χιαστί » και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

ii Αρχική Τιμή: (ζητούμενο)

Ποσοστό Μείωσης: $\alpha\%$ (ενδιάμεση πράξη: $100 - \alpha$)

Τελική Τιμή: β

Θεωρούμε x την ζητούμενη αρχική τιμή και δημιουργούμε ένα πίνακα ποσών τιμών.

Αρχική Τιμή	100	x
Τελική Τιμή	$100-\alpha$	β

Παίρνουμε τις τιμές των ποσών « χιαστί » και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Παράδειγμα:

Ένα προϊόν πωλείται με κέρδος 60% σε σχέση με την τιμή κόστους του. Αν η εταιρεία κερδίζει 150 € ποια είναι η τιμή κόστους του προϊόντος;

Αρχική Τιμή: x (ζητούμενο)

Κέρδος: 60% $\rightarrow$ 150 €

Τελική Τιμή: -

Αρχική Τιμή	100	x
Κέρδος	60	150

$$60 \cdot x = 100 \cdot 150$$

$$60 \cdot x = 15.000$$

$$x = 15.000 : 60$$

$$x = 250$$

Η τιμή κόστους του προϊόντος ανέρχεται στα 250 €.

Παράδειγμα:

Κατά την απογραφή του 2021 ο πληθυσμός μιας πόλης αυξήθηκε κατά 9% και ανέρχεται στους 10.028 κατοίκους. Πόσοι ήταν οι κάτοικοι της πόλης στην που καταγράφηκαν στην προηγούμενη απογραφή;

Αρχικός Πληθυσμός: x (ζητούμενο)

Ποσοστό Αύξησης: 9% $\rightarrow$ Ενδιάμεση πράξη: $100 + 9 = 109$

Τελικός Πληθυσμός: 10.028

Αρχικός Πληθυσμός	100	x
Τελικός Πληθυσμός	109	10.028

$$109 \cdot x = 100 \cdot 10.028$$

$$109 \cdot x = 1.002.800$$

$$x = 1.002.800 : 109$$

$$x = 9.200$$

Οι κάτοικοι κατά την προηγούμενη απογραφή ανέρχονται στους 9.200.

Παράδειγμα:

Σε ένα προϊόν έγινε έκπτωση 10% και τελικά ο καταναλωτής το αγόρασε στην τιμή των 18 €. Ποια ήταν η αρχική του αξία;

Αρχική Τιμή: x (ζητούμενο)

Ποσοστό έκπτωσης: 10% → Ενδιάμεση πράξη: $100 - 10 = 90$

Τελική Τιμή: 18 €

Αρχική Τιμή	100	x
Τελική Τιμή	90	18

$$90 \cdot x = 100 \cdot 18$$

$$90 \cdot x = 1.800$$

$$x = 1.800 : 90$$

$$x = 20$$

Η αρχική αξία του προϊόντος ανέρχεται στα 20 €.

Παράδειγμα:

Ένας ελεύθερος επαγγελματίας έχει έσοδα 17.000 € το χρόνο. Πόσα χρήματα πρέπει να αποδώσει στο κράτος, αν ο Φ.Π.Α. που παρακρατά από τους πελάτες του είναι 24%;

Έσοδα: 17.000 €

Φ.Π.Α. : 24%

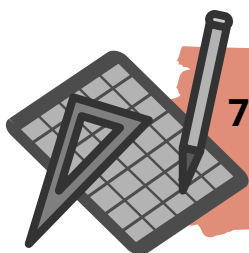
$$\text{Οφειλόμενος Φ.Π.Α.} = 17.000 \cdot \frac{24}{100 + 24} = 17.000 \cdot \frac{24}{124} = 3.290,32$$

Στο τέλος του έτους θα πρέπει να αποδώσει 3.290,32 € στο κράτος.





*θετικοί και αρνητικοί
αριθμοί*



7.1. Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου

1. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται θετικοί και ποιοι αρνητικοί;

- Θετικός λέγεται ο αριθμός που έχει πρόσημο « + ». Αν ένας αριθμός δεν έχει πρόσημο θεωρούμε πως είναι θετικός.
- Αρνητικός λέγεται ο αριθμός που έχει πρόσημο « - ».
- Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός.



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

2. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται ομόσημοι και ποιοι ετερόσημοι;

- Ομόσημοι ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο.
- Ετερόσημοι ονομάζονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

3. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται ακέραιοι και ποιοι ρητοί;

- Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς αριθμούς.
- Ρητοί αριθμοί είναι οι γνωστοί μας έως τώρα αριθμοί: φυσικοί, κλάσματα και δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αριθμούς.

4. Ποια η θέση των αρνητικών και θετικών αριθμών στην ευθεία των αριθμών;

- Οι αρνητικοί αριθμοί παριστάνονται στον ημιάξονα Ox' , ο οποίος βρίσκεται αριστερά της αρχής O (δηλαδή του μηδενός).
- Οι θετικοί αριθμοί παριστάνονται στον ημιάξονα Ox , ο οποίος βρίσκεται δεξιά της αρχής O .



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να κατατάξετε τους αριθμούς σε θετικούς και αρνητικούς:

$-7,2$, $+37$, 0 , $-\frac{7}{3}$, $\frac{9}{2}$, 25 , -32

• **Θετικοί:** $+37$, $\frac{9}{2}$, 25

• **Αρνητικοί:** $-7,2$, $-\frac{7}{3}$, -32

• **Τίποτα:** 0

2. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί είναι ομόσημοι ή ετερόσημοι:

i. $+7,8$ και $\frac{3}{2}$

Ομόσημοι αφού έχουν το ίδιο πρόσημο

ii. -3 και -9

Ομόσημοι αφού έχουν το ίδιο πρόσημο

iii. -39 και $+57$

Ετερόσημοι αφού έχουν διαφορετικά πρόσημα.

iv. 296 και -89

Ετερόσημοι αφού έχουν διαφορετικά πρόσημα.

v. 0 και -21

Επειδή το 0 δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός δεν είναι ομόσημοι ούτε ετερόσημοι.

3. Να κατατάξετε τους αριθμούς σε φυσικούς, ακραίους και ρητούς:

$$-37, \quad +\frac{7}{5}, \quad 0, \quad +3, \quad -2\frac{3}{4}, \quad -301, \quad \frac{15}{7}, \quad -0,12$$

- **Φυσικοί:** $0, +3$
- **Ακέραιοι:** $0, +3, -37, -301$
- **Ρητοί:** $0, +3, -37, -301, +\frac{7}{5}, -2\frac{3}{4}, \frac{15}{7}, -0,12$

4. Να εκφράσετε με ρητούς αριθμούς τις παρακάτω εκφράσεις:

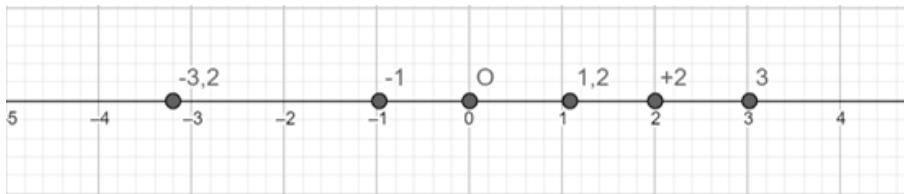
i. 23m αριστερά: -23 m

ii. Έξοδα 9.057 €: -9.057 €

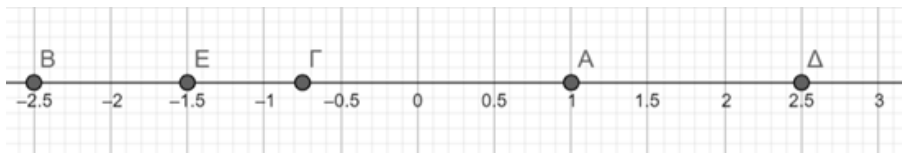
iii. Μείωση θερμοκρασίας 5°C : -5°C

5. Να τοποθετήσετε τους αριθμούς στον άξονα των αριθμών:

$-3,2, 0, +2, -1,2, 3, -1$



6. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ και Ε.



$$A = +1$$

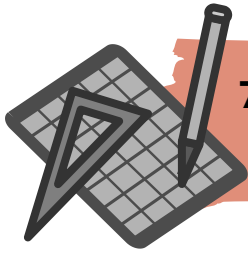
$$\Delta = +2,5$$

$$B = -2,5$$

$$E = -1,5$$

$$\Gamma = -0,7$$



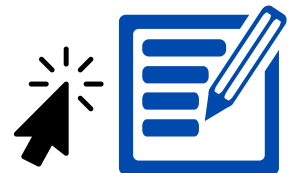


7.2. Απόλυτη τιμή - Αντίθετοι αριθμοί - Σύγκριση ρητών

1. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού; Τι γνωρίζετε για την απόλυτη τιμή;

- Η **απόλυτη τιμή** ενός ρητού αριθμού a εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.

- Η **απόλυτη τιμή**:
 - ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος αριθμός.
 - ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετος του.
 - του μηδενός είναι το μηδέν.



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

2. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται αντίθετοι;

Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή. Ο αντίθετος του x είναι ο $-x$.

Δύο σημεία που βρίσκονται σε ίση απόσταση, δεξιά και αριστερά από την αρχή των αξόνων, έχουν τετμημένες, αντίθετους αριθμούς.

3. Πως συγκρίνουμε δύο ρητούς αριθμούς;

Ο μεγαλύτερος από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα. Πιο συγκεκριμένα:

- Κάθε θετικός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.
- Το μηδέν είναι μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό και μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό αριθμό.
- Ο μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.
- Ο μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή, δηλαδή αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή:

i. $|-8| = 8$

iii. $|+\frac{4}{9}| = \frac{4}{9}$

ii. $|0| = 0$

iv. $|3,16| = 3,16$

2. Να βρείτε τους αριθμούς που έχουν απόλυτη τιμή:

i. 3 → Απόλυτη τιμή 3 έχουν οι αριθμοί: - 3 και +3

ii. $\frac{2}{9}$ → Απόλυτη τιμή $\frac{2}{9}$ έχουν οι αριθμοί: $-\frac{2}{9}$ και $+\frac{2}{9}$

iii. 0 → Μόνο το 0 έχει απόλυτη τιμή ίση με 0.

3. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} & |-4| + |2,5| - \left| -\frac{1}{2} \right| = \\ & = 4 + 2,5 - \frac{1}{2} = \\ & = 6,5 - 0,5 = \\ & = 6 \end{aligned}$$

4. Να βρείτε τους αντίθετους των αριθμών:

i. **- 9** → Ο αντίθετος του - 9 είναι ο αριθμός που έχει πρόσημο + και απόλυτη τιμή $|-9| = 9$. Άρα +9.

ii. **+ 15** → Ομοίως, ο αντίθετος του +15 είναι ο - 15.

iii. $-\frac{8}{9}$ → Ομοίως, ο αντίθετος του $-\frac{8}{9}$ είναι ο $+\frac{8}{9}$

iv. $\frac{5}{4}$ → Ομοίως, ο αντίθετος του $\frac{5}{4}$ είναι ο $-\frac{5}{4}$

5. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i. $+\frac{4}{9}$ και $-\frac{24}{7}$ → $+\frac{4}{9} > -\frac{24}{7}$ (Ο θετικός είναι μεγαλύτερος από τον αρνητικό)

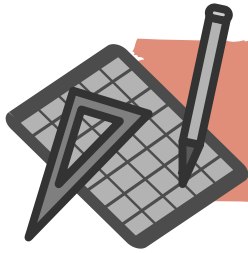
ii. **0 και +921** → $0 < 921$ (Το μηδέν είναι μικρότερο από τον θετικό)

iii. **0 και - 793** → $0 > - 793$ (Το μηδέν είναι μεγαλύτερο από τον αρνητικό)

iv. +29 και 384 → $+29 < 384$ (Το 384 έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή από το +29, άρα είναι και ο μεγαλύτερος αριθμός. Ο μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.)

v. - 38 και - 293 → $- 38 > - 293$ (Το - 38 έχει μικρότερη απόλυτη τιμή από το - 293, άρα είναι και ο μεγαλύτερος αριθμός. Ο μεγαλύτερος από δύο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή.)



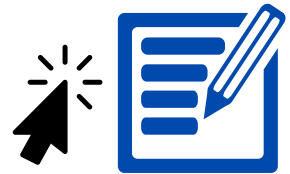


7.3. Πρόσθεση ρητών αριθμών

1. Πώς προσθέτουμε ομόσημους ρητούς αριθμούς;

Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.

$$\begin{aligned} & 3 + 9 = 12 \\ \text{π.χ. } & (-7) + (-5) = -(7 + 5) = -12 \end{aligned}$$



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

2. Πώς προσθέτουμε ετερόσημους ρητούς αριθμούς;

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

$$\begin{aligned} & 6 + (-2) = +(6 - 2) = +4 \\ \text{π.χ. } & (-3) + 7 = +(7 - 3) = +4 \\ & 2 + (-10) = -(10 - 2) = -8 \end{aligned}$$

3. Τι ιδιότητες έχει η πρόσθεση των ρητών;

• Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\text{π.χ. } (-2) + 3 = 3 + (-2) = 1$$

• Προσεταιριστική ιδιότητα

$$a+(b+c) = (a+b)+c$$

π.χ. $(6,987 + 1,369) + (-1,369) = 6,987 + (1,369 + (-1,369)) = 6,987$

• Το άθροισμα ενός ρητού με το μηδέν ισούται με τον ίδιο τον ρητό.

$$a+0 = 0+a = a$$

• Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι μηδέν.

$$a+(-a) = (-a)+a = 0$$

π.χ. $\frac{1}{5} + (-\frac{1}{5}) = 0$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να βρείτε την τελική θέση ενός γλάρου αν:

- i. Ήταν 2 μέτρα πάνω από την θάλασσα και κατέβηκε 3 μέτρα προς το νερό.
- ii. Ήταν 0,5 μέτρα κάτω από το νερό και ανέβηκε 4 μέτρα προς την επιφάνεια.
- iii. Ήταν 0,5 μέτρα κάτω από το νερό και κατέβηκε ακόμη 0,5 μέτρα.
- iv. Ήταν 1 μέτρο πάνω από το νερό και ανέβηκε ακόμη 2 μέτρα.

i. Η αρχική θέση του γλάρου είναι +2 και η μετακίνηση είναι -3. Για να βρούμε την τελική θέση θα πάρουμε $+2+(-3)=-1$.

ii. Η αρχική θέση του γλάρου είναι -0,5 και η μετακίνηση είναι +4. Για να βρούμε την τελική θέση θα πάρουμε $-0,5+(+4)=+3,5$.

iii. Η αρχική θέση του γλάρου είναι -0,5 και η μετακίνηση είναι -0,5. Για να βρούμε την τελική θέση θα πάρουμε $-0,5+(-0,5)=-1$.

iv. Η αρχική θέση του γλάρου είναι +1 και η μετακίνηση είναι +2. Για να βρούμε την τελική θέση θα πάρουμε $+1+(+2)=+3$.

2. Να υπολογίσετε το παρακάτω άθροισμα: $+(+5) + (-2) + 7 + (-2) + (4) + (-4)$

Για να βρούμε το άθροισμα σε μια αριθμητική παράσταση με πρόσθεση ανάμεσα σε ρητούς αριθμούς μας εξυπηρετεί να χωρίσουμε πρώτα τους θετικούς από τους αρνητικούς αριθμούς, έπειτα να κάνουμε πράξεις στους ομόσημους και τελικά να βρούμε το αποτέλεσμα.

Οπότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &+(+5) + (-2) + 7 + (-2) + (4) + (-4) = \\ &+(+5) + 7 + (4) + (-2) + (-2) + (-4) = \\ &\quad +16 + (-8) = \\ &\quad + (16 - 8) = \\ &\quad +8 \end{aligned}$$





7.4. Αφαίρεση ρητών αριθμών

1. Πώς κάνουμε αφαίρεση τους ρητούς αριθμούς;

Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β.

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

π.χ. $9 - 11 = 9 + (-11) = -2$

Στους ρητούς αριθμούς δεν απαιτείται να είναι ο μειωτέος πάντα μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο όπως γνωρίζαμε μέχρι τώρα.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Πώς κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων (διώχνουμε παρενθέσεις) σε αριθμητικές παραστάσεις ρητών;

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το + (ή δεν έχει πρόσημο), μπορούμε να την απαλείψουμε και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους.

π.χ.

$$\begin{aligned} +(-9 + 6 + 3) &= -9 + 6 + 3 = -9 + 9 = 0 \\ 8 + (3) &= 8 + 3 = 11 \\ 3 + (-4) &= 3 - 4 = -1 \\ -3 + (+6) &= -3 + 6 = 6 \end{aligned}$$

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το -, μπορούμε να την απαλείψουμε μαζί με το - και να γράψουμε τους όρους που περιέχει με αντίθετα πρόσημα.

π.χ.

$$-(-3 + 6) = +3 - 6 = -3$$

$$-(+7) - (-2) = -7 + 2 = -5$$

$$-(-1) + 1 - (-1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$-(2\alpha + \beta) = -2\alpha - \beta$$

$$-(\omega - 2) = -\omega + 2$$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Το drone βρίσκεται σε υψόμετρο 10 μέτρα πάνω από τη θάλασσα. Ο δύτες βρίσκεται σε βάθος 11 μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας. Τι διαφορά έχουν οι μεταξύ τους θέσεις;

Για βρούμε την απόσταση μεταξύ τους αρκεί να πάρουμε:

$$+10 - (-11) = 10 + 11 = 21$$

Δηλαδή ο δύτες είναι 21 μέτρα μακριά από το drone.

2. Ο φίλος μου ο Δημήτρης μου έχει δανείσει 7,5€ και ο Σάββας μου έχει δανείσει 4,5€. Αν έχω 11,5€ μου φτάνουν για να τους αποπληρώσω;

Θα φτιάξουμε μια αριθμητική παράσταση με τα δεδομένα του ερωτήματος:

$$11,5 - 7,5 - 4,5 = 11,5 - 12 = -0,5$$

Βρήκα αποτέλεσμα με αρνητικό πρόσημο άρα ακόμη κι αν δώσω όλα τα χρήματα δεν θα έχω αποπληρώσει το χρέος.

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = +(\frac{1}{2} - 7) - 12 - (\frac{1}{2} + 7 - 14)$

$$A = +(\frac{1}{2} - 7) - 12 - (\frac{1}{2} + 7 - 14)$$

$$A = \frac{1}{2} - 7 - 12 - \frac{1}{2} - 7 + 14$$

$$A = -26 + 14$$

$$A = -12$$

4. Να λύσετε την εξίσωση: $13 - x = 9$

Θα πάρουμε διαδοχικά:

$$13 - x = 9$$

$$-x = 9 - 13$$

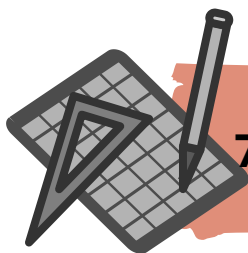
$$-x = 9 + (-13)$$

$$-x = -4$$

$$x = 4$$

Η εξίσωση έχει λύση $x=4$.





7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

1. Τι πρόσημο έχει το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών;

Το γινόμενο δύο θετικών ρητών είναι θετικός ρητός.

Το γινόμενο δύο αρνητικών ρητών είναι θετικός ρητός.



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

2. Τι πρόσημο έχει το γινόμενο δυο ετερόσημων αριθμών;

Το γινόμενο ενός θετικού και ενός αρνητικού ρητού είναι αρνητικός ρητός.

3. Πώς πολλαπλασιάζουμε ρητούς αριθμούς;

- Αν είναι ομόσημοι: Πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+».

$$\begin{aligned}\text{π.χ} \quad & 3 \cdot (+6) = +18 \\ & -3 \cdot (-4) = +12\end{aligned}$$

- Αν είναι ετερόσημοι: Πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «-».

$$\begin{aligned}\text{π.χ} \quad & +3 \cdot (-6) = -18 \\ & -2 \cdot 4 = -8\end{aligned}$$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητες του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών

- Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

π.χ. $(-3) \cdot 4 = 4 \cdot (-3) = -12$

- Προσεταιριστική ιδιότητα

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

π.χ. $3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 8\right) = \left(3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right) \cdot 8 = (-1 \cdot 8) = -8$

- Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού με τη μονάδα ισούται με τον ίδιο τον αριθμό.

$$1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

- Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \text{ και } \alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

π.χ. $2 \cdot (-\alpha + \beta) = -2\alpha + 2\beta$

- Οι ρητοί αριθμοί α και β λέγονται αντίστροφοι, όταν είναι διάφοροι του μηδενός και το γινόμενό τους είναι ίσο με τη μονάδα. Ο καθένας από τους α και β είναι αντίστροφος του άλλου.

$$\alpha \cdot \beta = 1$$

π.χ. $-4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{4} = 1$

- Το γινόμενο ενός ρητού αριθμού επί το μηδέν ισούται με το μηδέν

$$0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$$

5. Πώς υπολογίζουμε γινόμενο πολλών παραγόντων;

- Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:

Το πρόσημο +, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο.

Το πρόσημο -, αν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό.

- Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν, τότε το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τα γινόμενα παρακάτω:

$$-1,5 \cdot 4 = -6$$

$$\frac{1}{2}(-4) = -\frac{4}{2} = -2$$

$$-7\left(-\frac{1}{7}\right) = +\frac{7}{7} = 1$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{1}{5} \cdot 10 - 2 \cdot (-3) - \frac{1}{2}(-3 + 12 - 7)$

Παίρνουμε:

$$A = \frac{1}{5} \cdot 10 - 2 \cdot (-3) - \frac{1}{2}(-3 + 12 - 7)$$

$$A = \frac{10}{5} + 6 - \frac{1}{2} \cdot (12 - 10)$$

$$A = 2 + 6 - \frac{2}{2}$$

$$A = 8 - 1$$

$$A = 7$$

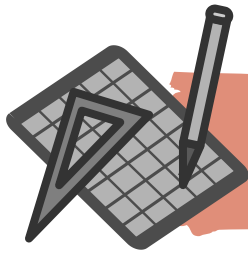
3. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \dots 100$ φορές $= 1$ αφού έχουμε άρτιο πλήθος αρνητικών παραγόντων.

$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \dots 101$ φορές $= -1$ αφού έχουμε περιττό πλήθος αρνητικών παραγόντων.

$\frac{12}{781} \cdot (-96,345) \cdot 12,33 \cdot (-2,90) \cdot 0 = 0$ αφού ο ένας παράγοντας του γινομένου είναι μηδέν.





7.6. Διαίρεση ρητών αριθμών

1. Πώς διαιρούμε ρητούς αριθμούς;

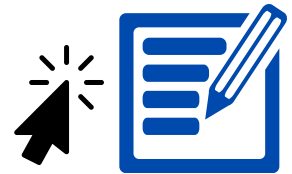
Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές και στο πηλίκο βάζουμε:

- το πρόσημο + , αν είναι ομόσημοι.

$$\text{π.χ. } \frac{-27}{-9} = (-27) : (-9) = +3$$

- το πρόσημο - , αν είναι ετερόσημοι.

$$\text{π.χ. } \frac{-15}{5} = (-15) : 5 = -3$$



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

2. Πώς αξιοποιούμε το πηλίκο στη λύση μιας εξίσωσης;

Το πηλίκο της διαίρεσης $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha : \beta$ λέγεται λόγος του α προς το β και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης $\beta \cdot x = \alpha$

3. Τι ιδιότητες έχει η διαίρεση;

- Για να διαιρέσουμε δύο ρητούς αριθμούς αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\text{π.χ. } 3 : \frac{5}{6} = 3 \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{5}$$

- Διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$-2,8 : (-0,7) = +4$$

$$-\frac{1}{9} : \frac{3}{81} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{81}{3} = -\frac{81}{27} = -3$$

$$-\frac{8}{2} : 2 = -4 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$1. -5\alpha = -25$$

$$\alpha = \frac{-25}{-5}$$

$$\alpha = 5$$

$$2. 3\beta = 21$$

$$\beta = \frac{21}{3}$$

$$\beta = 7$$

$$3. -6\gamma = 18$$

$$\gamma = \frac{18}{-6}$$

$$\gamma = -3$$

$$4. 2\delta = -14$$

$$\delta = \frac{-14}{2}$$

$$\delta = -7$$

$$5. \kappa : (-7) = 11$$

$$\kappa = -7 \cdot 11$$

$$\kappa = -77$$

$$6. \frac{\lambda}{3} = 10$$

$$\lambda = 3 \cdot 10$$

$$\lambda = 30$$

$$7. \mu : (-2) = -4$$

$$\mu = -2 \cdot (-4)$$

$$\mu = 8$$

3. Υπολόγισε την τιμή της παράστασης: $A = \left[3 \cdot \frac{4}{9} - (-2) : (-3) \right] : \left[-1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \right]$

$$A = \left[3 \cdot \frac{4}{9} - (-2) : (-3) \right] : \left[-1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \right]$$

$$A = \left(\frac{12}{9} - \frac{2}{3} \right) : \left(-1 - \frac{3}{3} \right)$$

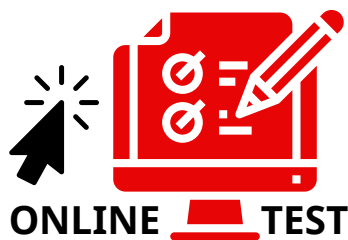
$$A = \left(\frac{12}{9} - \frac{6}{9} \right) : (-1 - 1)$$

$$A = \frac{6}{9} : (-2)$$

$$A = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$A = -\frac{2}{6}$$

$$A = -\frac{1}{3}$$



ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΚΔΟΣΗΣ:
Πρόδρομος Μιχαλάκης

© ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΛΥΣΑΡΙ | LISARI.GR
& Πρόδρομος Μιχαλάκης



Πανόρμου 14 & Σμύρνης,
12242, Αιγάλεω
τηλ.: 210 5982 614
e-mail: info@lisari.gr
www.lisari.gr

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται από τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και από τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η χωρίς γραπτή άδεια του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή οποιοδήποτε μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

