

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



Διαδραστικό Βοήθημα

Θεωρία - VideoΜαθήματα - Ασκήσεις

7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1.1 - Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

1.2 - Εξισώσεις α βαθμού

1.4 - Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 - Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

2.2 - Άρρητοι αριθμοί - Πραγματικοί αριθμοί

2.3 - Προβλήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 - Η έννοια της συνάρτησης

3.2 - Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης

3.3 - Η συνάρτηση $y=ax$

3.4 - Η συνάρτηση $y=ax + \beta$

3.5 - Η συνάρτηση $y=a/x$ - Η υπερβολή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο - ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

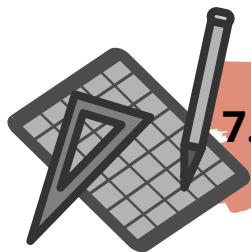
4.1 - Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός - Δείγμα

4.2 - Γραφικές Παραστάσεις

4.5 - Μέση τιμή - Διάμεσος



εξισώσεις - ανισώσεις



7.7. Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

1. Ποια δεκαδική μορφή μπορεί να έχει ένας ρητός αριθμός;

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή δεκαδικού ή περιοδικού δεκαδικού αριθμού.

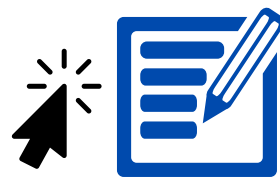
2. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται περιοδικοί δεκαδικοί;

Περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί ονομάζονται οι αριθμοί, των οποίων ένα τμήμα του δεκαδικού τους μέρους επαναλαμβάνεται με σταθερή περίοδο (σειρά).

π.χ. ο αριθμός $\frac{1}{3} = 0,3333$ είναι ένας περιοδικός δεκαδικός αριθμός και γράφεται ως $0,\bar{3}$.



Λυμένα Παραδείγματα



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να γράψετε σε μορφή κλάσματος τον αριθμό $0,\bar{6}$

Θα υποθέσουμε ότι το κλάσμα είναι x και θα πάρουμε:

$$x = 0,\overline{6}$$

$$x = 0,6666\dots$$

$$10x = 6,666$$

$$10x = 6 + 0,666$$

$$10x = 6 + x$$

$$9x = 6$$

$$x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Γράφουμε τον αριθμό με πολλά δεκαδικά ψηφία.

Πολλαπλασιάζουμε $\times 10$ για να εμφανίσουμε ακέραιο μέρος.

«Σπάμε» τον δεκαδικό αριθμό στο ακέραιο και το δεκαδικό του μέρος.

Εμφανίστηκε εκ νέου το 0,666 που γνωρίζουμε ότι είναι ίσο με x .

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

Βρίσκουμε το κλάσμα που μας δίνει τον περιοδικό δεκαδικό αριθμό.

2. Να βρείτε την δεκαδική μορφή του αριθμού $\frac{5}{3}$

Για να βρούμε την δεκαδική μορφή οποιουδήποτε κλάσματος αρκεί να κάνουμε την διαίρεση.

Έχουμε $5:3 =$

5	3
-3	1,66..
20	
-18	
20	
-18	
2	
.....	

Οπότε βρίσκουμε ότι $\frac{5}{3} = 1,6666\dots = 1,\overline{6}$



ONLINE TEST



7.8. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε δύναμη αριθμού;

Το γινόμενο $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n φορές) συμβολίζεται με a^n και ονομάζεται δύναμη του a. Το a είναι η **βάση** της δύναμης και ο αριθμός n είναι ο **εκθέτης**.

$$\text{π.χ.: } 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

2. Τι ονομάζουμε τετράγωνο και τι κύβο ενός αριθμού;

Ειδικά για τις δυνάμεις με εκθέτη 2 και εκθέτη 3 χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις τετράγωνο και κύβος.

$$\text{πχ.: } 8 \cdot 8 = 8^2 \text{ διαβάζεται 8 στο τετράγωνο}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \text{ διαβάζεται 2 στον κύβο}$$

3. Τι γνωρίζουμε για το πρόσημο δύναμης;

Αν έχουμε δύναμη με βάση θετικό αριθμό τότε το αποτέλεσμα είναι πάντα θετικός αριθμός.

$$\text{πχ.: } 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Αν έχουμε δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο τότε το αποτέλεσμα είναι θετικός αριθμός.

$$\text{π.χ.: } (-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$$

Αν έχουμε δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό τότε το αποτέλεσμα είναι αρνητικός αριθμός.

$$\text{π.χ.: } (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων;

- Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

$$a^v \cdot a^u = a^{v+u}$$

$$\text{π.χ.: } 2^3 \cdot 2^9 = 2^{12}$$

- Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$a^v : a^u = a^{v-u}$$

$$\text{π.χ.: } 3^4 : 3^2 = 3^2$$

- Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

$$(a \cdot b)^v = a^v \cdot b^v$$

$$\text{π.χ.: } (x \cdot 3)^2 = x^2 \cdot 3^2$$

- Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^v = \frac{a^v}{b^v}$$

$$\text{π.χ.: } \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$$

- Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.

$$(a^{\mu})^{\nu} = a^{\mu \cdot \nu}$$

π.χ.: $(4^6)^2 = 4^{6 \cdot 2} = 4^{12}$

- Ο αριθμός 1 υψωμένος σε οποιαδήποτε δύναμη είναι πάντα ίσος με 1.

$$1^{\nu} = 1$$

- Κάθε δύναμη αριθμού διάφορου του μηδενός με εκθέτη μηδέν ισούται με ένα.

$$a^0 = 1$$

- Κάθε δύναμη με εκθέτη 1 είναι ίση με την βάση του αριθμού.

$$a^1 = a$$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $\Pi = 3^2 \cdot 3 - 2^6 : 2^5 + (25^9)^0 - 3^3 : 3^3$

Θυμόμαστε την σειρά των πράξεων:

1. Δυνάμεις

2. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση

3. Πρόσθεση και αφαίρεση

Για την παράσταση Π έχουμε:

$$\begin{aligned}\Pi &= 3^2 \cdot 3 - 2^6 : 2^5 + (25^9)^0 - 3^3 : 3^3 \\ &= 3^2 \cdot 3^1 - 2^{6-5} + 25^{9 \cdot 0} - 3^{3-3} = 3^3 - 2^1 + 25^0 - 3^0 \\ &= 27 - 2 + 1 - 1 = 25\end{aligned}$$

2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $\frac{4^{20}}{(-0,25)^{20}}$

Όταν μας ζητείται να υπολογίσουμε την τιμή μιας σύνθετης παράστασης μας εξυπηρετεί να κάνουμε πράξεις αξιοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων πριν κάνουμε υπολογισμούς.

Στην παραπάνω παράσταση παρατηρούμε ότι έχουμε $(-0,25)$ στον παρονομαστή, δηλαδή $-\frac{1}{4}$.

Οπότε γράφουμε:

$$\frac{4^{20}}{(-0,25)^{20}} = \frac{4^{20}}{\left(-\frac{1}{4}\right)^{20}} = \frac{4^{20}}{\frac{1^{20}}{4^{20}}} = \frac{4^{20}}{\frac{1}{4^{20}}} = \frac{4^{20} \cdot 4^{20}}{1 \cdot 1} = 4^{20} \cdot 4^{20} = 4^{20+20} = 4^{40}$$

Τι χρειάστηκε να αξιοποιήσουμε για να απλοποιήσουμε την παραπάνω παράσταση:

1. Μπορούμε να γράψουμε κάθε δεκαδικό αριθμό σε μορφή κλάσματος.
2. Δύναμη με αρνητική βάση και άρτιο εκθέτη μας δίνει θετικό αποτέλεσμα.
3. Την ιδιότητα των κλασμάτων ώστε να κάνουμε ένα σύνθετο κλάσμα απλό.
4. Την ιδιότητα των δυνάμεων για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με ίδια βάση.





7.9. Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

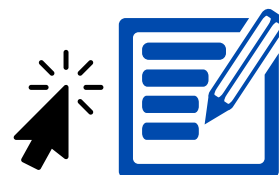
1. Τι γνωρίζουμε για δυνάμεις με εκθέτη αριθμό αρνητικό;

Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός, με **εκθέτη αρνητικό** είναι ίση με κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη.

Δηλαδή: $a^{-v} = \frac{1}{a^v}$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Επίσης ισχύει: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-v} = \left(\frac{b}{a}\right)^v$

π.χ.: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$

Οι δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο αριθμό έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τις δυνάμεις που έχουν εκθέτη φυσικό αριθμό.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$3^{x+3} - 9^{4+x} - 27^{x+5} \text{ όταν γνωρίζουμε ότι } x=-6.$$

Αρχικά θα βάλουμε στη θέση του x το -6 , οπότε θα πάρουμε:

$$3^{-6+3} - 9^{4+(-6)} - 27^{-6+5}$$

$$3^{-3} - 9^{-2} - 27^{-1}$$

$$\frac{1}{3^3} - \frac{1}{9^2} - \frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{27} - \frac{1}{81} - \frac{1}{27}$$

$$-\frac{1}{81}$$

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις του 10 παρακάτω:

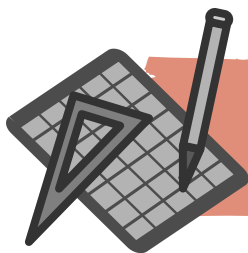
$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1.000} = 0,001$$

Αξιοποιώντας τις δυνάμεις του 10 με αρνητικό εκθέτη μπορούμε να γράψουμε τους δεκαδικούς αριθμούς σε διαφορετική μορφή:

$$\text{π.χ.: } 0,32 = 32 \cdot 0,01 = 32 \cdot 10^{-2}$$



1.1. Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις



1. Τι ονομάζουμε μεταβλητή;

ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Μεταβλητή είναι ένα γράμμα (π.χ. x , y , t , ...) που το χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου. Η μεταβλητή παριστάνει έναν οποιονδήποτε αριθμό.

π.χ. : Ένα κιλό μήλα κοστίζει 2€. Για να βρούμε πόσα χρήματα θα πληρώσουμε αρκεί να γράψουμε $2x$, όπου x είναι τα κιλά που αγοράσαμε.

2. Τι ονομάζουμε αριθμητική παράσταση;

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις μόνο με αριθμούς, λέγεται **αριθμητική παράσταση**.

$$\text{π.χ. : } 2 \cdot (-3 + 7) - \frac{2 - (-4)}{21 - 2^4}$$

Το τελικό αποτέλεσμα που βρίσκουμε μετά την εκτέλεση όλων των πράξεων σε μια αριθμητική παράσταση το λέμε **τιμή** της.

3. Τι ονομάζουμε αλγεβρική παράσταση;

Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**. Οι προσθετέοι λέγονται **όροι** της αλγεβρικής παράστασης.

π.χ. :

- $2 \cdot x + 6 - y + 7 \cdot (x - 4 \cdot y)$

- Στην αλγεβρική παράσταση $x - y + 11$ έχω 3 όρους, τα:
 x , $-y$, 11

4. Πώς κάνουμε πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση;

1. Εκτέλεση δυνάμεων.
2. Εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων.
3. Εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων.



Αν υπάρχουν **παρενθέσεις**, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις, με την ίδια σειρά που έχουμε παραπάνω.

5. Τι ονομάζουμε αναγωγή ομοίων όρων;

Η διαδικασία με την οποία γράφουμε σε απλούστερη μορφή τις αλγεβρικές παραστάσεις ονομάζεται «**αναγωγή ομοίων όρων**».


$$\text{π.χ.: } 7x + 21x + 11y - 17y - 2z + 9z = 28x - 6y + 7z$$

6. Τι είναι η επιμεριστική ιδιότητα;

Είναι μια ιδιότητα των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού σύμφωνα με την οποία: $a(b + \gamma) = ab + a\gamma$. Η επιμεριστική ιδιότητα είναι πολύ χρήσιμη όταν κάνουμε πράξεις σε αλγεβρικές παραστάσεις.

$$\text{π.χ.: } 3(a - 2\beta) = 3a - 6\beta$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να γράψετε απλούστερα τις παραστάσεις:

α. $2x + 5x - 4x + 7 - 11 = 3x - 4$

β. $11 - 7(x + y) + 3y = 11 - 7x - 7y + 3y = 11 - 7x - 4y$

γ. $3(x - 2y) - 4(-2x + 3y) = 3x - 6y + 8x - 12y = 11x - 18y$

2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x=-2, y=4$ και για $x=3, y=-1$:

$$A = x - 2y + 3(2x - 4y)$$

$$A = x - 2y + 6x - 12y$$

$$A = 7x - 14y$$

Για $x = -2$ και $y = 4$:

$$A = 7 \cdot (-2) - 14 \cdot 4 = -14 - 56 = -70$$

Για $x = 3$ και $y = -1$:

$$A = 7 \cdot 3 - 14 \cdot (-1) = 21 + 14 = 35$$

3. Να εκφράσετε τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις ως φράσεις:

$2x$: το διπλάσιο ενός αριθμού

$3y + 2$: το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2

$2(x + \alpha)$: το διπλάσιο του αθροίσματος δύο αριθμών

$3x^2 + 7$: το τριπλάσιο του τετραγώνου ενός αριθμού, αυξημένο κατά 7

$\alpha^2 + \beta^2$: το άθροισμα δύο αριθμών υψωμένο στο τετράγωνο

$\alpha^2 + \beta^2$: το άθροισμα των τετραγώνων δύο αριθμών

4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης B όταν γνωρίζεις ότι: $\alpha - \beta = 10$.

$$B = 2\alpha + 3\beta - 4(\alpha + 2\beta) + 7\beta$$

$$B = 2\alpha + 3\beta - 4\alpha - 8\beta + 7\beta$$

$$B = -2\alpha - 5\beta + 7\beta$$

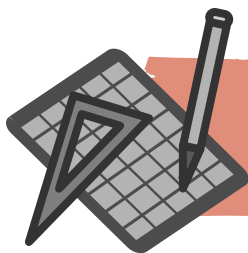
$$B = -2\alpha + 2\beta$$

$$B = -2(\alpha - \beta)$$

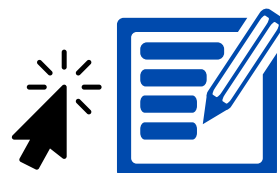
$$B = -2 \cdot 10$$

$$B = -20$$





1.2. Εξισώσεις α' βαθμού



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε εξίσωση;

Η ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό, ονομάζεται εξίσωση. Η παράσταση αριστερά από το « = » είναι το πρώτο μέλος της εξίσωσης και η παράσταση δεξιά είναι το δεύτερο μέλος.

πχ.: $3x+21=78-x$



Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι $3x+21$.

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι $78-x$.

2. Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες κάθε ισότητας;

- Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

$$α=β \text{ τότε } α+γ=β+γ$$

- Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

$$α=β \text{ τότε } α-γ=β-γ$$

- Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα.

$$α=β \text{ τότε } α \cdot γ=β \cdot γ$$

- Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Ο αριθμός που διαιρεί δεν μπορεί να είναι μηδέν.

$$α=β \text{ τότε } \frac{α}{γ} = \frac{β}{γ}, γ \neq 0$$

3. Τι ονομάζουμε λύση μιας εξίσωσης;

Λύση μιας εξίσωσης (ή ρίζα) ονομάζουμε τον αριθμό που **επαληθεύει** την εξίσωση.

π.χ. : Η εξίσωση $3x=21$ έχει λύση $x=7$ γιατί $3 \cdot 7=21$

4. Πότε μια εξίσωση ονομάζεται αδύνατη;

Η εξίσωση που δεν έχει **καμία λύση** λέγεται αδύνατη.

π.χ. :

$$\begin{aligned}3(a-2)+2 &= 3a-3 \\3a-6+2 &= 3a-3 \\3a-3a &= 6-2-3 \\0 \cdot a &= 1 \\0 &= 1\end{aligned}$$

Δηλαδή καταλήξαμε σε $0=1$, δηλαδή σε μια αδύνατη δήλωση.

5. Πότε μια εξίσωση λέγεται ταυτότητα;

Αν σε μια εξίσωση **κάθε αριθμός είναι λύση** της εξίσωσης τότε η εξίσωση λέγεται ταυτότητα.

π.χ. :

$$\begin{aligned}2(\beta-3) &= 3\beta-(\beta+6) \\2\beta-6 &= 3\beta-\beta-6 \\2\beta-3\beta+\beta &= 6-6 \\0 &= 0\end{aligned}$$

Δηλαδή καταλήξαμε σε $0=0$, δηλαδή σε μια ισότητα που ισχύει για όλους τους αριθμούς.

6. Πώς λύνουμε μια εξίσωση;

• Αν η εξίσωση είναι στην πιο απλή μορφή:

1. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους. (Θυμόμαστε ότι όταν αλλάζουμε μέρος σε έναν όρο, αλλάζουμε και το πρόσημο του.)
2. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
3. Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.
4. Δεν ξεχνάμε να απλοποιήσουμε τα κλάσματα.

π.χ. :

$$\begin{aligned}2x + 7 &= -3x - 3 \\2x + 3x &= -7 - 3 \\5x &= -10 \\x &= \frac{-10}{5} \\x &= -2\end{aligned}$$

• **Αν η εξίσωση έχει παρενθέσεις:**

1. Πρώτα διώχνουμε τις παρενθέσεις χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα και συνεχίζουμε όπως στην απλή μορφή.

π.χ. :

$$\begin{aligned}3(\kappa - 4) + 2 &= 2(-\kappa - 3) + 4 \\3\kappa - 12 + 2 &= -2\kappa - 6 + 4 \\3\kappa + 2\kappa &= 12 - 2 - 6 + 4 \\5\kappa &= 8 \\\kappa &= \frac{8}{5}\end{aligned}$$

• **Αν η εξίσωση έχει παρονομαστές πραγματικούς αριθμούς:**

1. Πρώτα θα κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών. Δηλαδή θα πάρουμε μια εξίσωση χωρίς παρονομαστές, όταν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των παρονομαστών.

2. Συνεχίζουμε όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις.

π.χ. :

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{2} + \frac{2x+7}{3} &= \frac{x+1}{6} \\ 6\left(\frac{x-3}{2} + \frac{2x+7}{3}\right) &= 6\left(\frac{x+1}{6} + 1\right) \\ 6\frac{x-3}{2} + 6\frac{2x+7}{3} &= 6\frac{x+1}{6} + 6 \cdot 1 \\ 3(x-3) + 2(2x+7) &= (x+1) + 6 \\ 3x - 9 + 4x + 14 &= x + 1 + 6 \\ 3x + 4x - x &= 9 - 14 + 1 + 6 \\ 6x &= 2 \\ x &= \frac{2}{6} \\ x &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Ψάχνουμε το Ε.Κ.Π. των (2,3,6)=6

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.=6

Δεν ξεχνάμε να βάλουμε παρενθέσεις στους αριθμητές.

Διώχνουμε τις παρενθέσεις.

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους κ.λ.π.



1. Εξετάστε αν οι αριθμοί που δίνονται είναι λύσεις των εξισώσεων:

- $3\alpha + 5 = 3, \quad \alpha = -2$

Θα αντικαταστήσουμε το α με -2 .

Οπότε έχουμε:



$$3 \cdot (-2) + 5 = 3$$

$$-6 + 5 = 3$$

$$-1 = 3$$



Καταλήξαμε σε αδύνατο αποτέλεσμα, άρα δεν είναι λύση της εξίσωσης.

- $5x + 2 = 12, \quad x = 2$

Θα αντικαταστήσουμε το x με 2 .

Οπότε έχουμε:



$$5 \cdot 2 + 2 = 12$$

$$10 + 2 = 12$$

$$12 = 12$$



Καταλήξαμε σε αληθές αποτέλεσμα, άρα είναι λύση της εξίσωσης.

2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3(\alpha - 4) + 3 = 2(4 - \alpha) + 8$$

$$3\alpha - 12 + 3 = 8 - 2\alpha + 8$$

$$3\alpha + 2\alpha = 12 - 3 + 8 + 8$$

$$5\alpha = 25$$

$$\alpha = \frac{25}{5}$$

$$\alpha = 5$$

3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3-x}{2} = -\frac{6+2x}{3}$$

$$6\frac{3-x}{2} = 6\left(-\frac{6+2x}{3}\right)$$

$$3(3-x) = 2(-(6+2x))$$

$$9-3x = -12-4x$$

$$-3x+4x = -12-9$$

$$x = -21$$

4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3+y}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1-y}{6} + 4$$

$$12\left(\frac{3+y}{3} - \frac{2}{4}\right) = 12\left(\frac{1-y}{6} + 4\right)$$

$$4(3+y) - 3 \cdot 2 = 2(1-y) + 12 \cdot 4$$

$$12+4y-6 = 2-2y+48$$

$$4y+2y = -12+6+2-48$$

$$6y = -52$$

$$y = \frac{-52}{6}$$

$$y = -\frac{26}{3}$$

5. Να λύσετε την εξίσωση:



$$\frac{\frac{1}{2} + \mu}{\frac{3}{4} - \frac{2}{8}} = \frac{\frac{\mu}{2} - \frac{2}{3}}{4}$$

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{2\mu}{2}}{\frac{6}{8} - \frac{2}{8}} = \frac{\frac{3\mu}{6} - \frac{4}{6}}{4}$$

← Κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα που είναι όροι του σύνθετου κλάσματος.

$$\frac{\frac{1+2\mu}{2}}{\frac{4}{8}} = \frac{\frac{3\mu-4}{6}}{4}$$

← Κάνουμε πράξεις στα κλάσματα σε αριθμητή και παρονομαστή.

$$\frac{\frac{1+2\mu}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3\mu-4}{6}}{\frac{1}{4}}$$

← Απλοποιούμε όπου μπορούμε.

$$\frac{2(1+2\mu)}{2 \cdot 1} = \frac{3\mu-4}{24}$$

← Κάνουμε το σύνθετο κλάσμα απλό.

$$\frac{1+2\mu}{1} = \frac{3\mu-4}{24}$$

Θυμόμαστε ότι

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a\delta}{b\gamma}$$

$$24\left(\frac{1+2\mu}{1}\right) = 24\left(\frac{3\mu-4}{24}\right)$$

$$24(1+2\mu) = 3\mu - 4$$

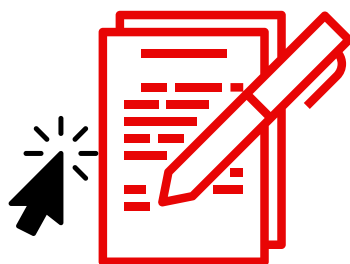
← Λύνουμε όπως στις υπόλοιπες εξισώσεις.

$$24 + 48\mu = 3\mu - 4$$

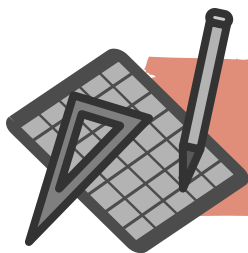
$$48\mu - 3\mu = -48 - 4$$

$$45\mu = -52$$

$$\mu = -\frac{52}{45}$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ



1.4. Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πώς λύνουμε ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας εξίσωση;

- Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα.
- Ξεχωρίζουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα.
- Χρησιμοποιούμε μια μεταβλητή για να προσδιορίσουμε την άγνωστη ποσότητα που ψάχνουμε.
- Εκφράζουμε όλες τις υπόλοιπες ποσότητες του προβλήματος σε σχέση με τη μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε.
- Δημιουργούμε μια εξίσωση χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος.
- Λύνουμε την εξίσωση.
- Ελέγχουμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε και κάνουμε επαλήθευση.

Μπορούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα με διάφορους τρόπους (χρησιμοποιώντας εξισώσεις, με πρακτική αριθμητική, με δοκιμές, κλπ.).

Κάθε φορά ελέγχουμε το αποτέλεσμα που έχουμε βρει και επιβεβαιώνουμε ότι έχει λογική συνέπεια, δηλαδή ταιριάζει με τα ερωτήματα του προβλήματος.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Ο κύριος Αποστόλης έχει τα διπλάσια λεφτά από τον Γιώργο. Μαζί έχουν 90€. Πόσα χρήματα έχει ο καθένας;

Θα χρησιμοποιήσουμε την μεταβλητή x για να εκφράσουμε τα χρήματα του Γιώργου.

Αφού ο κύριος Αποστόλης έχει τα διπλάσια λεφτά, θα έχει $2x$.

Το πρόβλημα μας δίνει σαν δεδομένο ότι μαζί έχουν 90€.

Οπότε φτιάχνουμε την εξίσωση: $x + 2x = 90$

Λύνουμε την εξίσωση: $x + 2x = 90$

$$3x = 90$$

$$x = \frac{90}{3}$$

$$x = 30$$

Βρήκαμε $x=30$, άρα ο Γιώργος έχει 30€. Αντίστοιχα ο κύριος Αποστόλης έχει $2x=60$ €.

Για να επιβεβαιώσουμε ότι βρήκαμε σωστά τη λύση επαληθεύουμε $30+60=90$.

2. Η Μαρία είναι 20 χρονών και η μαμά της έχει τα διπλάσια της χρόνια. Σε πόσα χρόνια οι ηλικίες τους θα συμπληρώνουν έναν αιώνα;

Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι η ηλικία της μαμάς της Μαρίας είναι 40.

Το πρόβλημα μας ζητάει να βρούμε πόσα χρόνια θα έχουν περάσει μέχρι να συμβεί κάτι, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε την μεταβλητή x για να εκφράσουμε τα χρόνια.

Η ηλικία της Μαρίας μετά από x χρόνια είναι $20+x$.

Η ηλικία της μαμάς της Μαρίας μετά από x χρόνια είναι $40+x$.

Το πρόβλημα θέλει να βρούμε σε πόσα χρόνια οι δύο ηλικίες θα συμπληρώνουν έναν αιώνα.

Οπότε φτιάχνουμε την εξίσωση: $20 + x + 40 + x = 100$

Λύνουμε την εξίσωση: $20 + x + 40 + x = 100$

$$x + x = 100 - 20 - 40$$

$$2x = 40$$

$$x = 20$$

Βρήκαμε $x=2$, άρα θα περάσουν 20 χρόνια. Δηλαδή η Μαρία θα είναι 40 χρονών και η μαμά της θα είναι 60 χρονών.

Για να επιβεβαιώσουμε ότι βρήκαμε σωστά τη λύση θα κάνουμε επαλήθευση, δηλαδή θα υπολογίσουμε $40+60=100$, που είναι όσο και το ζητούμενο.

3. Στην φάρμα μένουν 10 άλογα και 5 πόνυ. Ξέρουμε ότι κάθε άλογο τρώει τα $\frac{3}{2}$ της ποσότητας της τροφής που καταναλώνουν τα πόνυ. Αν δίνουμε 75 κιλά τροφής κάθε μέρα, πόσα κιλά φαγητό αντιστοιχούν σε κάθε ζώο;

Θα ορίσουμε σαν μεταβλητή x την ποσότητα φαγητού που καταναλώνει ένα πόνυ.

Το άλογο καταναλώνει $\frac{3}{2}x$ ποσότητας φαγητού.

Συνολικά τα πόνυ καταναλώνουν $5 \cdot x$ και τα άλογα $10 \cdot \frac{3}{2} \cdot x = \frac{30}{2}x = 15x$

Αφού ξέρουμε την ποσότητα που καταναλώνουν τα ζώα συνολικά θα φτιάξουμε την εξίσωση:

$$5x + 15x = 75$$

Λύνουμε την εξίσωση:

$$5x + 15x = 75$$

$$20x = 75$$

$$x = \frac{75}{20}$$

$$x = \frac{15}{4} = 3,75$$

Βρήκαμε $x=3,75$, άρα κάθε πόνυ καταναλώνει 3,75 κιλά φαγητού.

Κάθε άλογο θα καταναλώνει $\frac{3}{2} \cdot 3,75 = 5,625$ κιλά φαγητού.

4. Μια ομάδα μπάσκετ μπαίνει στην κατηγορία «Big Team» όταν έχει μέσο όρο στα ύψη των αθλητών 1,95 μέτρα. Παρακάτω βλέπουμε τον πίνακα με τους παίκτες της ομάδας μας:

Παίκτης 1	1,81 μέτρα
Παίκτης 2	1,78 μέτρα
Παίκτης 3	1,80 μέτρα
Παίκτης 4	1,81 μέτρα
Παίκτης 5	;;; μέτρα

Τί ύψος πρέπει να έχει ο πέμπτος παίκτης ώστε να μπορούμε να βάλουμε την ομάδα μας στην κατηγορία «Big Team»;

Θα ορίσουμε ως άγνωστο x το ύψος του 5ου παίκτη.

Θέλουμε το μέσο ύψος της ομάδας να είναι 1,95.

Οπότε φτιάχνουμε την εξίσωση: $\frac{1,81+1,78+1,8+1,81+x}{5} = 1,95$

Λύνουμε την εξίσωση: $\frac{1,81+1,78+1,8+1,81+x}{5} = 1,95$

$$1,81+1,78+1,8+1,81+x = 9,75$$

$$6,49 + x = 9,75$$

$$x = 9,75 - 6,49$$

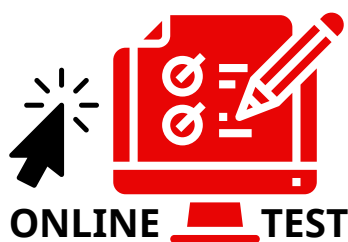
$$x = 3,26$$

Βρήκαμε $x=3,26$.

Δηλαδή ο 5ος παίκτης πρέπει να έχει ύψος 3,26 μέτρα!

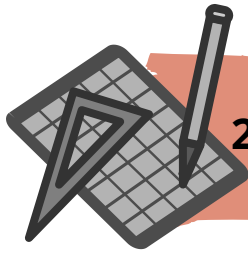
Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ενώ η εξίσωση δεν είναι αδύνατη, βρήκαμε ένα αποτέλεσμα που δεν έχει λογική.

Συνεπώς παρόλο που η εξίσωση λύθηκε, **η λύση** του προβλήματος **απορρίπτεται**.



2

οι πραγματικοί αριθμοί



2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού;

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a , λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό a . Η τετραγωνική ρίζα του a συμβολίζεται με $\sqrt{a}$

$$\text{π.χ.: } \sqrt{25} = 5, \quad \text{γιατί } 5^2 = 25$$

2. Πώς ορίζουμε τη ρίζα του 0;

Επειδή $0^2 = 0$ θεωρούμε ότι $\sqrt{0} = 0$

3. Μπορούμε να ορίσουμε ρίζα αρνητικού αριθμού;

Δεν ορίζουμε ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός.

4. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της ρίζας;

• Αν $\sqrt{a} = x$, $a \geq 0$ τότε $x \geq 0$ και $x^2 = a$

• Αν $a \geq 0$ τότε $(\sqrt{a})^2 = a$

- Έχουμε ριζικό $\rightarrow \sqrt{a} \leftarrow$ υπόριζο

5. Ποιες είναι οι ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας;

Για $a, \beta > 0$ παίρνουμε:

$$\sqrt{a \cdot \beta} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta}$$

$$\sqrt{\frac{a}{\beta}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\beta}}$$

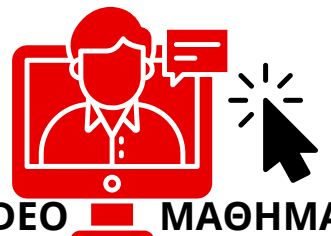
π.χ.: $\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$

Προσέχουμε ότι δεν ισχύει: $\sqrt{a} + \sqrt{\beta} = \sqrt{a + \beta}$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να βρείτε τους αριθμούς: $\sqrt{16}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{64}$



Για να βρούμε τον αριθμό $\sqrt{16}$ αρκεί να σκεφτούμε **έναν θετικό αριθμό x** για τον οποίο ισχύει $x^2 = 16$. Αξιοποιώντας της προπαίδεια βρίσκουμε ότι $x=4$.

Αντίστοιχα βρίσκουμε ότι: $\sqrt{36} = 6$ και $\sqrt{64} = 8$

2. Να βρείτε τους αριθμούς για τους οποίους ισχύει : $x^2 = 16$, $x^2 = 36$, $x^2 = 64$

Προσέχουμε ότι δεν ψάχνουμε την τετραγωνική ρίζα (δηλαδή έναν θετικό αριθμό) αλλά **κάθε αριθμό για τον οποίο ισχύει η ισότητα.**

Συνεπώς έχουμε: $x^2 = 16$, άρα $x = \pm 4$ αφού τόσο $4^2 = 16$ όσο και $(-4)^2 = 16$

Αντίστοιχα βρίσκουμε: $x^2 = 36$ άρα $x = \pm 6$ και $x^2 = 64$ άρα $x = \pm 8$

3. Να βρείτε τους αριθμούς: $\sqrt{121}$ $\sqrt{1,21}$ $\sqrt{12.100}$

Για την πρώτη ρίζα αρκεί να βρούμε έναν θετικό αριθμό a τέτοιο ώστε $a^2 = 121$.

Εύκολα βρίσκουμε από την προπαίδεια ότι αυτός ο αριθμός είναι το 11.

Για να βρούμε τις άλλες ρίζες, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι έχουν σχέση με το 11. Συγκεκριμένα στο $\sqrt{1,21}$ έχουμε το 121 γραμμένο έχοντας μετακινήσει την υποδιαστολή δύο φορές. Άρα καταλαβαίνουμε ότι προέκυψε από τον δεκαδικό αριθμό 1,1.

Αντίστοιχα στο $\sqrt{12.100}$ έχουμε το 121 γραμμένο με δύο έξτρα μηδενικά. Άρα καταλαβαίνουμε ότι προέκυψε από τον αριθμό 110.

Προσέχουμε ότι:

$$\sqrt{0,4} \neq 0,2$$

$$\sqrt{0,04} = 0,2$$

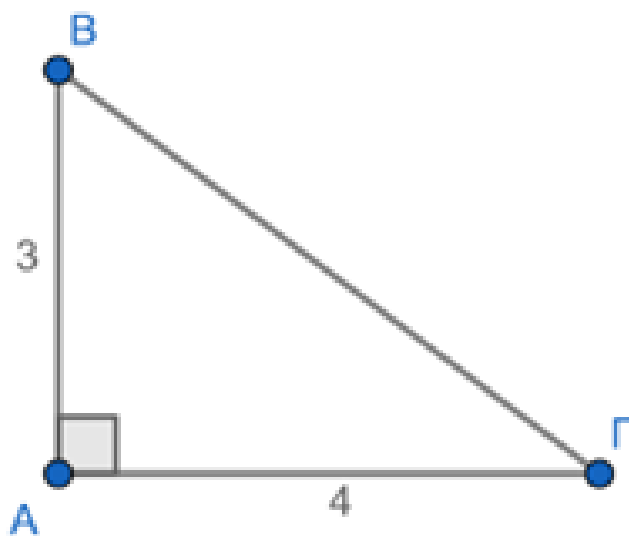
$$\sqrt{160} \neq 40$$

$$\sqrt{1.600} = 40$$

4. Να βρείτε την πλευρά που λείπει στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο:

Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας μας είναι πολύ χρήσιμη όταν ψάχνουμε πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αξιοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Θυμόμαστε με βάση το **Πυθαγόρειο Θεώρημα**: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.



Στο παραπάνω τρίγωνο ισχύει:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$$

$$3^2 + 4^2 = B\Gamma^2$$

$$9 + 16 = B\Gamma^2$$

$$25 = B\Gamma^2$$

$$B\Gamma = \sqrt{25}$$

$$B\Gamma = 5$$

5. Να υπολογίσετε τους αριθμούς: $\sqrt{0,01}$ και $0,01^2$.

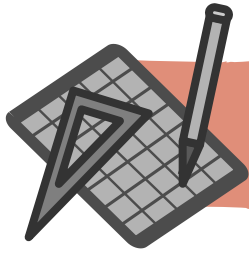
Έχουμε ότι: $\sqrt{0,01} = 0,1$
 $0,01^2 = 0,0001$

Στους θετικούς αριθμούς παρατηρούμε:

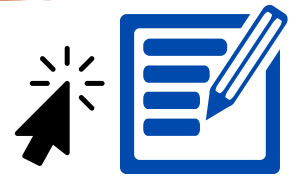
Αν για τον αριθμό a έχω $a > 1$, τότε: $\sqrt{a} < a < a^2$

Αν για τον αριθμό a έχω $0 < a < 1$, τότε: $a^2 < a < \sqrt{a}$





2.2. Άρρητοι αριθμοί- Πραγματικοί αριθμοί



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποιους αριθμούς ονομάζουμε άρρητους;

Κάθε αριθμός που δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0$, ονομάζεται **άρρητος αριθμός**.

2. Ποιους αριθμούς ονομάζουμε πραγματικούς αριθμούς;

Οι πραγματικοί αριθμοί ($\mathbb{R}$) αποτελούνται από όλους τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία των αριθμών, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό. Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών**.

3. Ποια είναι τα υπόλοιπα σύνολα των αριθμών;

Οι φυσικοί αριθμοί ($\mathbb{N}$): 0, 1, 2, 3, ...

Οι ακέραιοι αριθμοί ($\mathbb{Z}$): ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...

Οι ρητοί αριθμοί ($\mathbb{Q}$) δηλαδή οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να βρείτε την ρητή προσέγγιση του $\sqrt{15}$ ως και 2 δεκαδικά ψηφία.

Γενικά για να κάνουμε μια εκτίμηση για κάποια άρρητη ρίζα, βοηθάει να σκεφτόμαστε τους αριθμούς στους οποίους είναι κοντά το τετράγωνο της άρρητης ρίζας και έχουν ρητή ρίζα.

Στη δική μας περίπτωση έχουμε $\sqrt{15}$, οπότε θα σκεφτούμε τους αριθμούς που είναι κοντά στο 15 και έχουν ρητή ρίζα, δηλαδή θα διαλέξουμε τους αριθμούς 9 και 16.



Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{9} = 3$ και $\sqrt{16} = 4$ οπότε η δεκαδική προσέγγιση της $\sqrt{15}$ θα είναι ανάμεσα στους αριθμούς 3 και 4.

$$3,5^2 = 12,25$$

$$3,6^2 = 12,96$$

$$3,7^2 = 13,69$$

$$3,8^2 = 14,44$$

$$3,9^2 = 15,21$$

Βλέπουμε ότι $3,8^2 < 15 < 3,9^2$, οπότε πλέον θα δοκιμάσουμε να βρούμε έναν αριθμό ανάμεσα στα 3,8 και 3,9 του οποίου το τετράγωνο είναι κοντά στο 15.

$$3,85^2 = 14,82$$

$$3,86^2 = 14,89$$

$$3,87^2 = 14,97$$

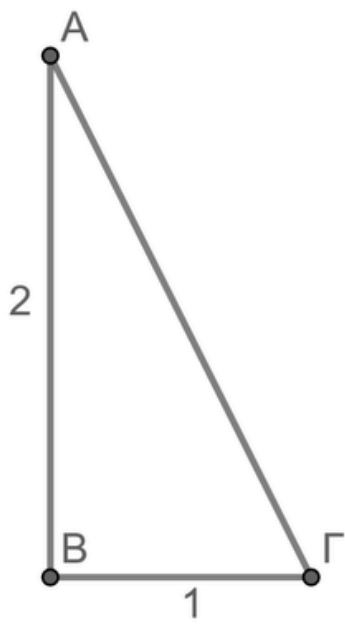
$$3,88^2 = 15,05$$

Καταλαβαίνουμε ότι ο αριθμός με 2 δεκαδικά ψηφία που προσεγγίζει καλύτερα το $\sqrt{15}$ είναι ο αριθμός 3,87. Μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{15} \approx 3,87$.

2. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{5}$.

Γενικά για να κατασκευάσουμε οποιονδήποτε άρρητο αριθμό της μορφής $\sqrt{a}$, αρκεί να φτιάξουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές AB και ΑΓ τέτοιες ώστε $ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = α$.

Στην περίπτωση που θέλω να φτιάξω το $\sqrt{5}$ θα πάρω ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 2 και 1.



Όπως βλέπουμε παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 2^2 + 1^2 &= ΒΓ^2 \\ 4 + 1 &= ΒΓ^2 \\ 5 &= ΒΓ^2 \\ ΒΓ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Οπότε παίρνουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, του οποίου η υποτείνουσα είναι $\sqrt{5}$, άρα κατασκευάσαμε γεωμετρικά τον αριθμό $\sqrt{5}$.

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Αριθμός	Φυσικός	Ακέραιος	Ρητός	Άρρητος	Πραγματικός
1	x	x	x		x
$-\frac{3}{2}$			x		x
$\sqrt{12}$				x	x
-3		x	x		x
$\sqrt{2 \cdot 2}$	x	x	x		x 40

4. Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς: $1, \sqrt{21}, -\sqrt{16}, -3,5, \frac{10}{3}$.

Για να βάλουμε τους αριθμούς σε σειρά θα τους ξεχωρίσουμε σε θετικούς και αρνητικούς και στη συνέχεια θα τους συγκρίνουμε. Για να συγκρίνουμε τους άρρητους χρειαζόμαστε μια δεκαδική προσέγγιση.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε $\sqrt{21}$ οπότε μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι είναι ανάμεσα στους αριθμούς 4 και 5, αφού $4^2 = 16$ και $5^2 = 25$.

Οπότε παίρνουμε:

$$-\sqrt{16} < -3,5 < 1 < \frac{10}{3} < \sqrt{21}$$

Θυμόμαστε ότι αύξουσα σειρά σημαίνει από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο αριθμό και φθίνουσα από τον μεγαλύτερο στον μικρότερο.

5. Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 = 19$

Κάθε φορά που λύνουμε εξίσωση της μορφής x^2 πρέπει να σκεφτόμαστε ότι ψάχνουμε κάθε αριθμό που ικανοποιεί την ισότητα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ψάχνουμε έναν αριθμό που είναι η τετραγωνική ρίζα του 19. Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι το 19 δεν έχει ρητή τετραγωνική ρίζα (δεν μπορούμε να βρούμε το 19 στην προπαίδεια κανενός αριθμού).

Οπότε βρίσκουμε: $x = \pm \sqrt{19}$ και λέμε ότι η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις: $\sqrt{19}, -\sqrt{19}$.



2.3. Προβλήματα



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Μπορούμε να κάνουμε υπολογισμούς με άρρητους αριθμούς;

Οι άρρητοι αριθμοί (και οι περιοδικοί δεκαδικοί αριθμοί) είναι αριθμοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς την αξία τους αλλά τους χρησιμοποιούμε στην καθημερινή ζωή. Συνεπώς συνήθως **βρίσκουμε μια προσέγγιση τους** με δεκαδικά ψηφία και κάνουμε τους υπολογισμούς μας.

Για παράδειγμα θα χρησιμοποιούμε:



$$\sqrt{2} \approx 1,41$$

$$\pi \approx 3,14$$

$$\sqrt{10} \approx 3,16$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73$$

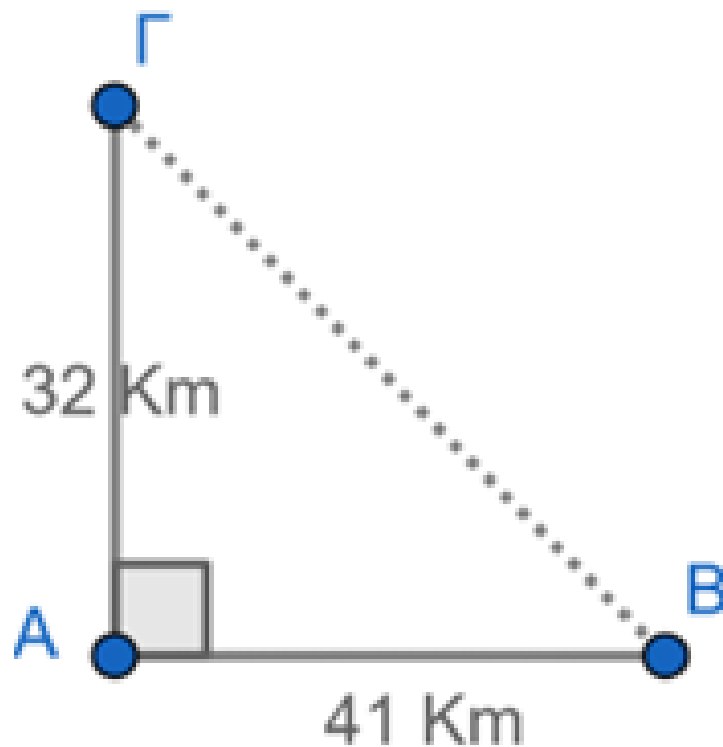


Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Στο σχήμα φαίνεται η διαδρομή που συνδέει 3 πόλεις. Πόσο είναι η απόσταση σε ευθεία ανάμεσα στις πόλεις Β και Γ;



Παρατηρούμε ότι οι τρεις πόλεις ανήκουν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές τις αποστάσεις των πόλεων ΑΓ και ΑΒ.

Για να υπολογίσουμε την απόσταση ΒΓ αρκεί να εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

$$ΑΓ^2 + ΑΒ^2 = ΒΓ^2$$

$$32^2 + 41^2 = ΒΓ^2$$

$$ΒΓ = \sqrt{1.024 + 1.681}$$

$$ΒΓ = \sqrt{2.705}$$

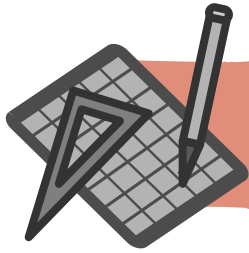
$$ΒΓ \approx 52,02$$

Οπότε βρήκαμε ότι η απόσταση ανάμεσα στις δύο πόλεις είναι 52,02 Km.



3

συναρτήσεις



3. 1. Η έννοια της συνάρτησης



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζεται συνάρτηση;

Η σχέση με την οποία **κάθε τιμή της μεταβλητής x** , αντιστοιχίζεται σε **μία μόνο τιμή της μεταβλητής y** λέγεται **συνάρτηση**.

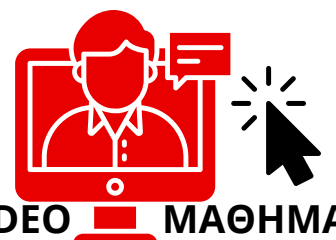
Συχνά αναφερόμαστε στην μεταβλητή x ως ανεξάρτητη μεταβλητή και στην μεταβλητή y ως εξαρτημένη, κι αυτό γιατί η τιμή της y προκύπτει μέσω της x .

2. Τι ονομάζουμε πίνακα τιμών μιας συνάρτησης;

Τα ζεύγη των τιμών (x,y) μιας συνάρτησης παρουσιάζονται σε έναν πίνακα, ο οποίος λέγεται **πίνακας τιμών** της συνάρτησης.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Δίνεται η συνάρτηση $y=2x+3$, να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της:

x	0	1	-1	3	4	-9	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
y	3	5	1	9	11	-15	0	8

Για να συμπληρώσουμε τον πίνακα τιμών:

Όταν μας δίνεται το x και ψάχνουμε το y , αρκεί να αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό που **47**
του αντιστοιχεί.

$$\text{Για } x=0: y = 2 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$\text{Για } x=1: y = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$\text{Για } x=-1: y = 2 \times (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$\text{Για } x=3: y = 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$\text{Για } x=\frac{5}{2}: y = 2 \times \frac{5}{2} + 3 = 5 + 3 = 8$$

Όταν μας δίνεται το y και ψάχνουμε να βρούμε το x , αρκεί να αντικαταστήσουμε το y με τον αριθμό που του αντιστοιχεί και στη συνέχεια να λύσουμε την εξίσωση που προκύπτει για το x .

$$\begin{aligned} \text{Για } y=11: & \longrightarrow 11 = 2x + 3 \\ & 2x = 11 - 3 \\ & 2x = 8 \\ & x = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Για } y=-15: & \longrightarrow -15 = 2x + 3 \\ & 2x = -15 - 3 \\ & 2x = -18 \\ & x = \frac{-18}{2} = -9 \end{aligned}$$

Για $y=0$: $\longrightarrow$

$$0 = 2x + 3$$

$$2x = -3$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

2. Ποια συνάρτηση περιγράφει τις καταστάσεις που αναφέρονται;

A. Θέλω να βρω το κόστος του ενοικίου αν γνωρίζω ότι για κάθε τετραγωνικό μέτρο πληρώνω 5,5€.

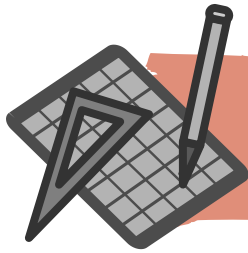
Καταλαβαίνουμε ότι πρέπει να φτιάξουμε μια συνάρτηση στην οποία εξαρτημένη μεταβλητή y είναι το ενοίκιο και ανεξάρτητη x είναι τα τετραγωνικά μέτρα του διαμερίσματος. Άρα παίρνω $y=5,5 \cdot x$

B. Θέλω να βρω τον καινούργιο μισθό, ο οποίος είναι όσο ο παλιός αλλά μειωμένος κατά 50€.

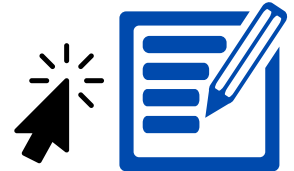
Σκεφτόμαστε όπως πριν και παίρνουμε $y=x-50$, όπου x ο παλιός μισθός και y ο νέος μισθός.

Γ. Θέλω να περιγράψω το εμβαδόν και την περίμετρο ενός τετραγώνου για το οποίο ξέρω την πλευρά του.

Έστω ότι συμβολίζουμε την πλευρά του τετραγώνου με a . Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι η περίμετρος προκύπτει από την συνάρτηση: $\Pi=4 \cdot a$ και το εμβαδόν $E=a \cdot a = a^2$.



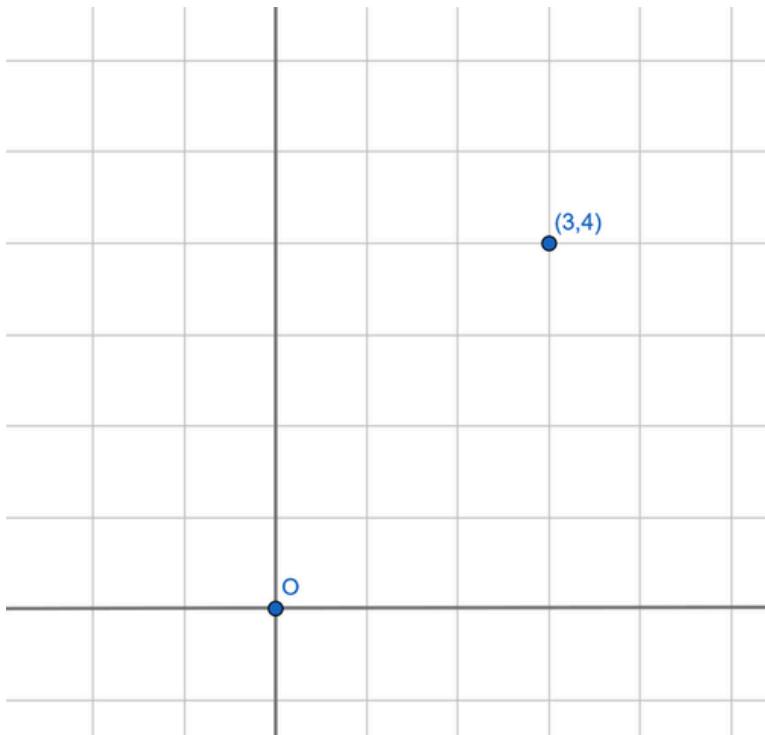
3.2. Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε συντεταγμένες ενός σημείου;

Μέσω μιας συνάρτησης μπορούμε να πάρουμε διάφορα ζεύγη αριθμών (x,y) . Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος (x,y) και, αντιστρόφως, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.



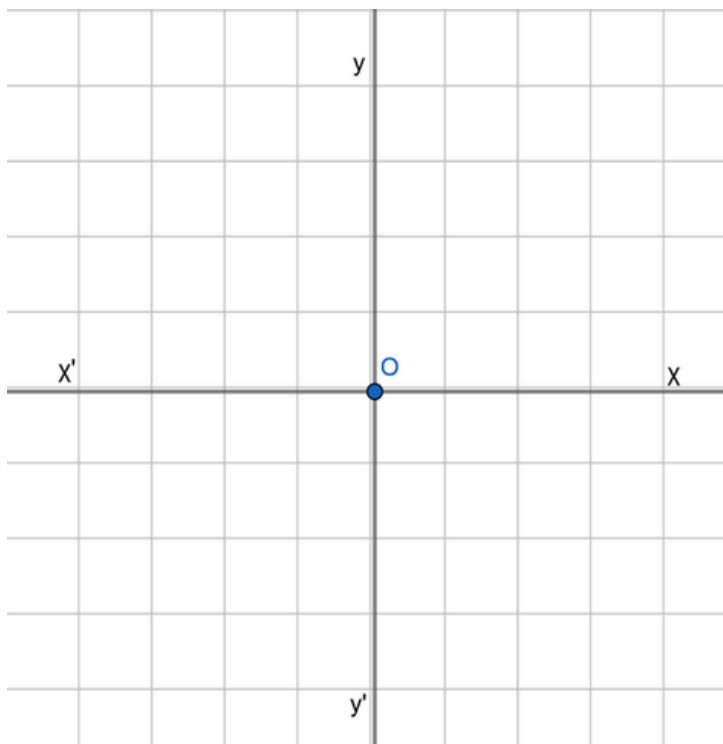
Ο πρώτος από τους αριθμούς στο ζεύγος (x,y) λέγεται **τετμημένη (x)** του σημείου και ο δεύτερος λέγεται **τεταγμένη (y)** του σημείου.

Η τετμημένη και η τεταγμένη λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου.

Π.χ. : Μας δίνεται το σημείο A (3,4). Καταλαβαίνουμε ότι έχει τετμημένη 3 και τεταγμένη 4.

2. Τι ονομάζουμε σύστημα αξόνων;

Οι άξονες $x'x$ και $y'y$ αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων ή απλώς ένα σύστημα αξόνων.



Όταν χρησιμοποιούμε κάθετους άξονες των οποίων οι μονάδες μέτρησης έχουν το ίδιο μήκος τότε λέμε ότι έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων**.

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε συστήματα αξόνων με **διαφορετικού μήκους** μονάδες μέτρησης στους **άξονες $x'x$ και $y'y$** . Τότε το σύστημα **δεν είναι ορθοκανονικό**.

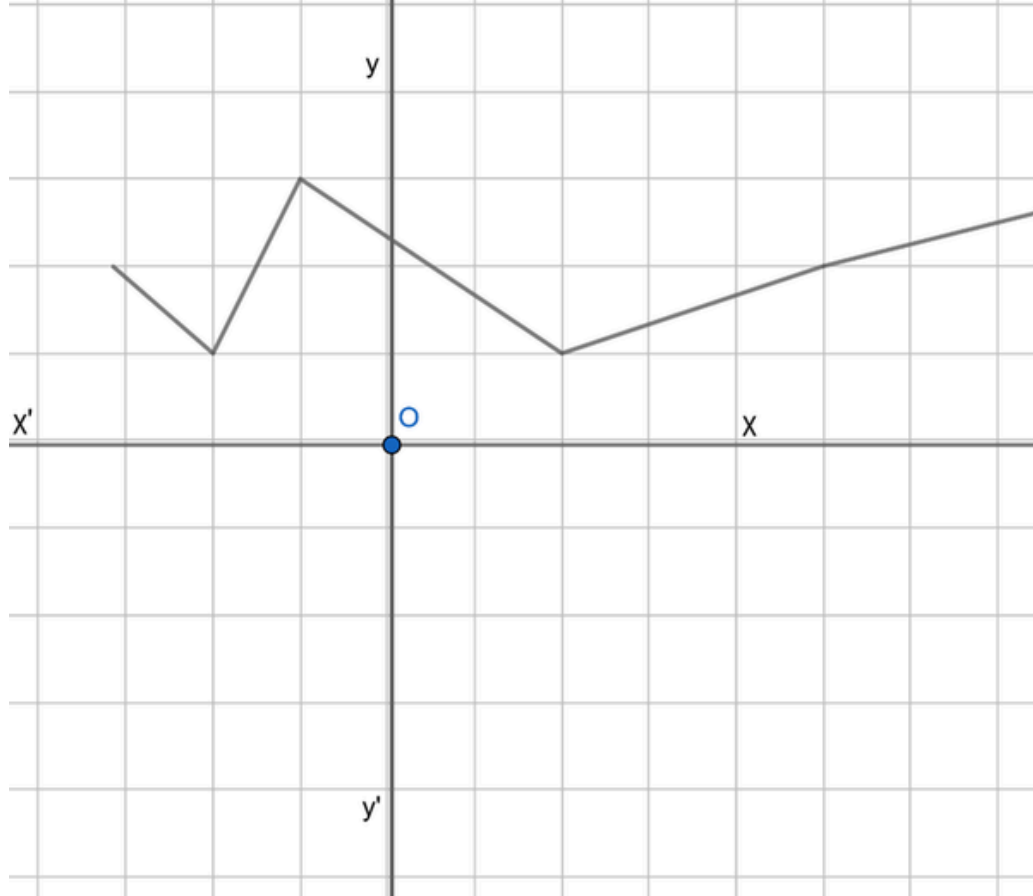
3. Τι είναι τα τεταρτημόρια;

Το σύστημα των αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα μέρη. Τα τέσσερα αυτά μέρη λέγονται **τεταρτημόρια**.

4. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος **y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x** . Ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής **το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y)** που προκύπτουν από την συνάρτηση.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για τη σχέση των μεταβλητών της συνάρτησης.

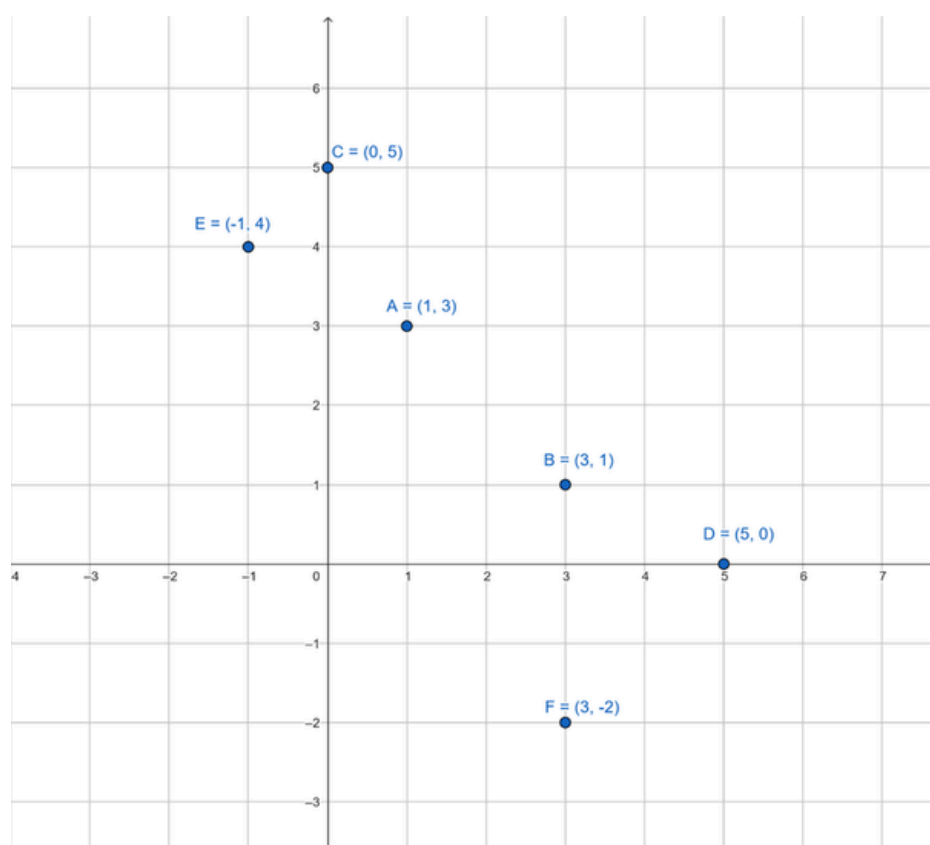


Λυμένα Παραδείγματα

1. Να τοποθετήσετε τα παρακάτω σημεία στο σύστημα αξόνων:



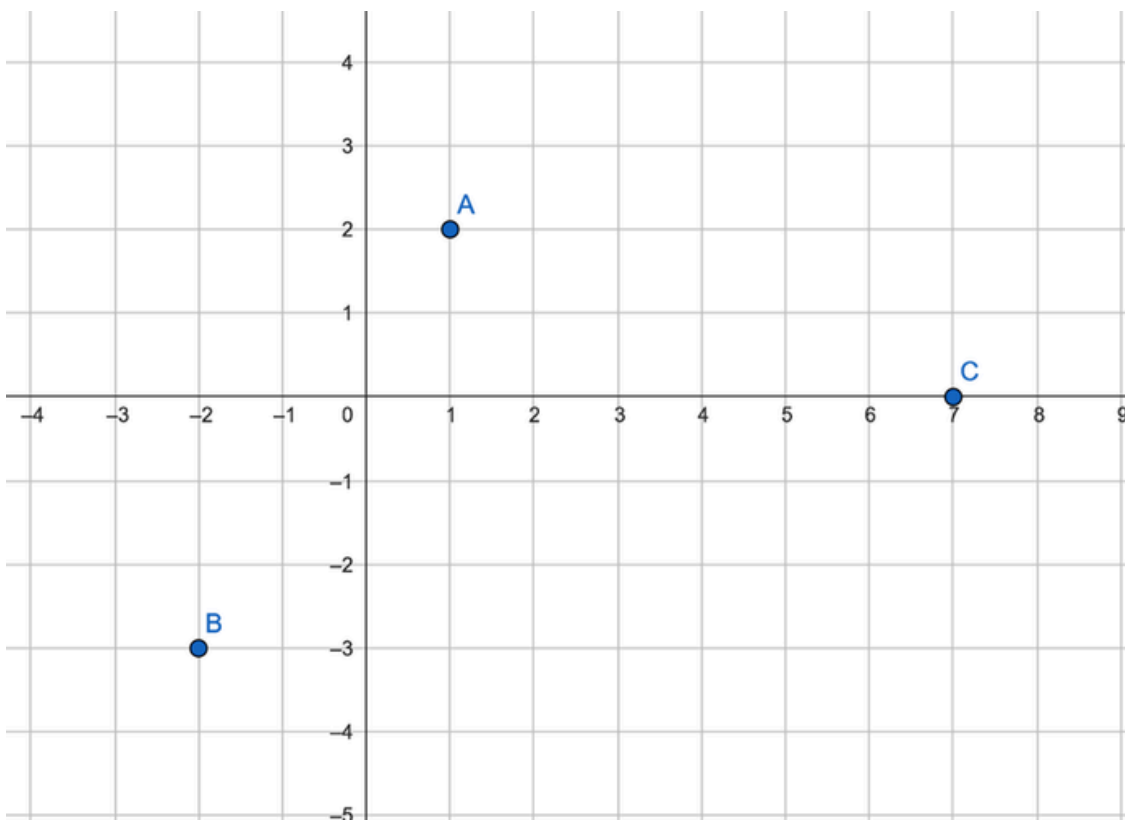
$A(1,3)$, $B(3,1)$, $C(0,5)$, $D(5,0)$, $E(-1,4)$, $F(3,-2)$



Παρατηρούμε ότι το σημείο $\Gamma(0,5)$ βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$ και το σημείο $\Delta(5,0)$ βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$.

Γενικά ισχύει ότι κάθε σημείο με τετμημένη 0 είναι σημείο του άξονα $y'y$ και κάθε σημείο με τεταγμένη 0 είναι σημείο του άξονα $x'x$.

2. Μελετώντας το σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B και C.



Για το σημείο A: Ψάχνουμε να βρούμε το x , κοιτώντας σε ποιο σημείο τέμνεται ο άξονας $x'x$ όταν φέρουμε παράλληλη στον $y'y$. Παρατηρούμε ότι είναι στο 1. Για να βρούμε το y , φέρουμε παράλληλη ευθεία από το σημείο στον $x'x$ και παρατηρούμε ότι τον συναντάει στο 2. Συνεπώς το σημείο A είναι $A(1,2)$.

Όμοια βρίσκουμε $B(-2,-3)$ και $C(7,0)$.

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της παρακάτω συνάρτησης. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

$$y=3x-2$$

X	0	1	2	3
Y	-2	1	4	7

Για να συμπληρώσουμε τον πίνακα τιμών αρκεί να ακολουθήσουμε τον τρόπο που ξέρουμε ήδη, δηλαδή να βάλουμε στη θέση x τον αριθμό που του αντιστοιχεί και να υπολογίσουμε το y. Οπότε παίρνουμε:

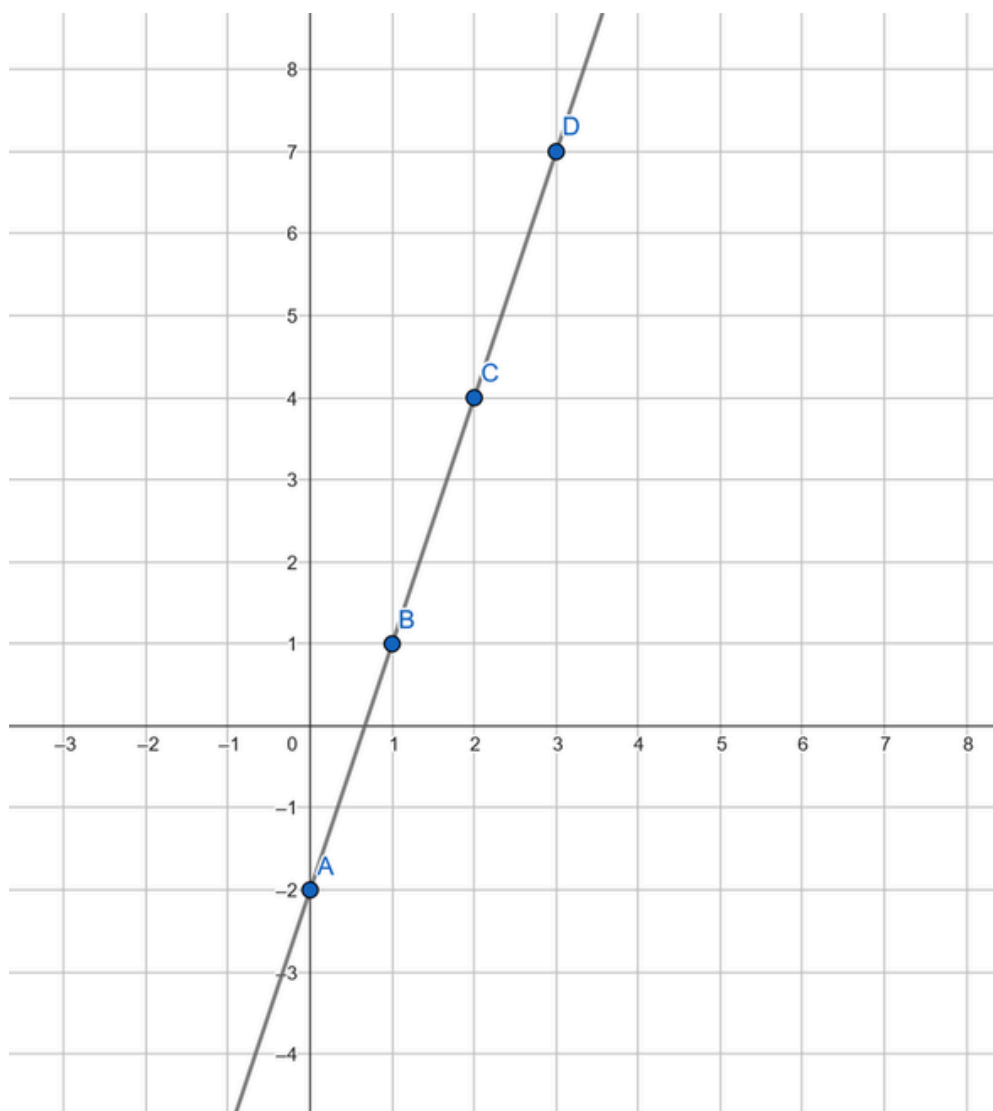
Για $x=0$, $y=-2$

Για $x=1$, $y=1$

Για $x=2$, $y=4$

Για $x=3$, $y=7$

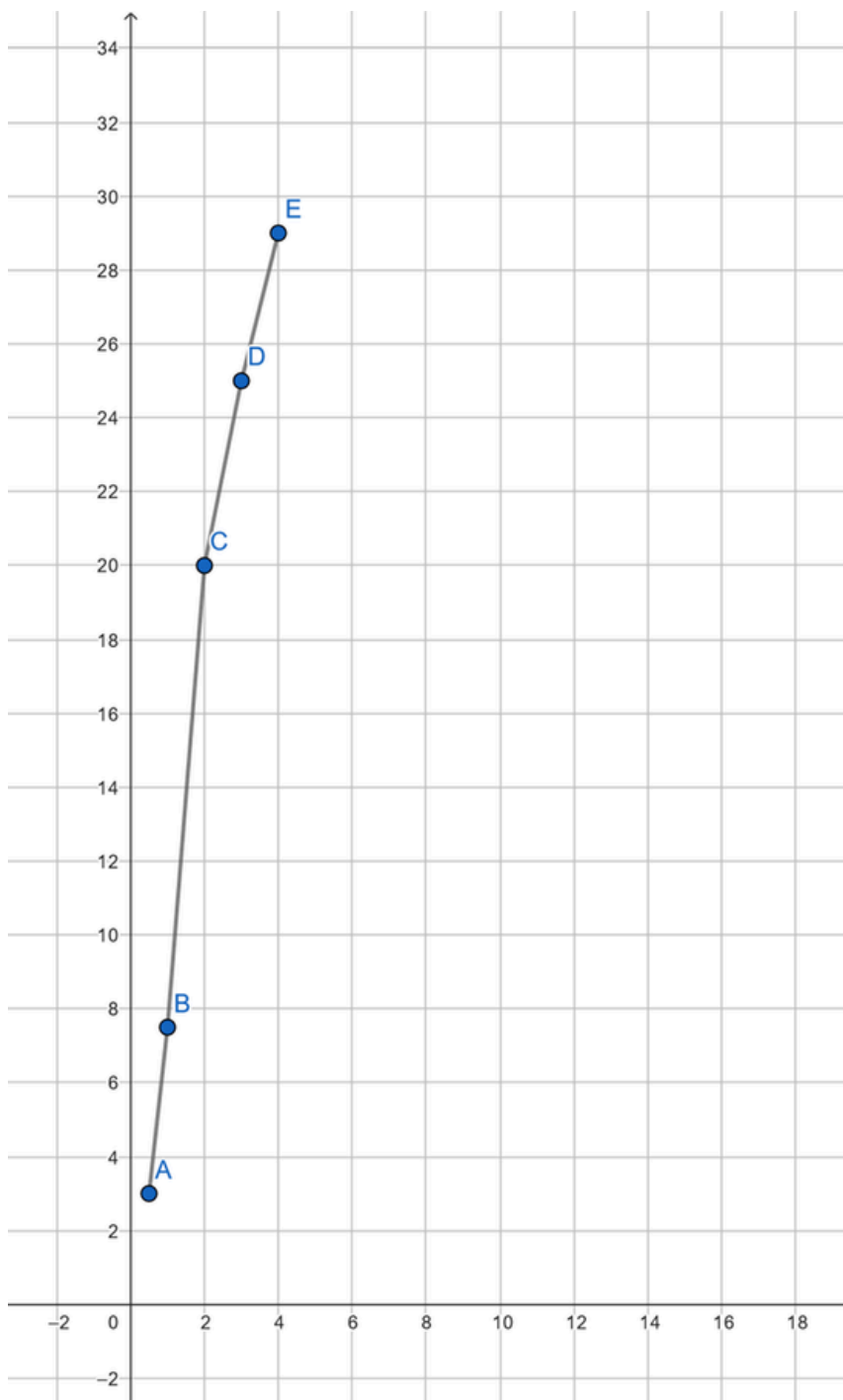
Πλέον έχουμε 4 σημεία, τα $(0,-2)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,7)$. Βρίσκουμε **τα σημεία** στο σύστημα αξόνων και τα **ενώνουμε**. Έχει προκύψει η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης.



4. Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τα στοιχεία για το ύψος ενός φυτού συγκεκριμένης κατηγορίας ανάλογα με το διαθέσιμο νερό στην περιοχή.

Διαθέσιμο νερό (σε lt)	0,5	1	2	3	4
Ύψος (σε cm)	30	75	200	250	290

• Να σημειώσετε τα σημεία σε κατάλληλο σύστημα αξόνων και στη συνέχεια να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση.



Για να είναι πιο εύκολη η μελέτη της γραφικής παράστασης προτιμήσαμε να βάλουμε το ύψος σε δεκατόμετρα και όχι σε εκατοστόμετρα όταν την σχεδιάσαμε.

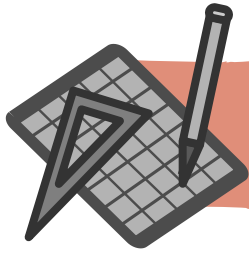
- **Μελετώντας την γραφική παράσταση να βρείτε:**

- ο Πόσα περίπου lt απαιτούνται για να φτάσει το φυτό σε ύψος 40 εκατοστών;
- ο Ένα φυτό Φ έφτασε με 0,75 lt νερού διαθέσιμα σε ύψος 3 μέτρων. Ανήκει αυτό το φυτό στην κατηγορία των φυτών που μελετάμε;

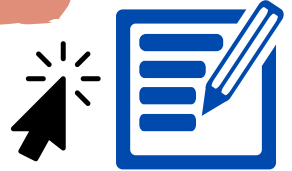
→ Για να φτάσει σε ύψος 40 εκατοστών το φυτό χρειάζεται λίγο περισσότερα από 0,5lt νερού.

→ Το φυτό Φ δεν ανήκει στην κατηγορία των φυτών που μελετάμε, αφού χρειάζεται πολύ λιγότερο νερό για να φτάσει στα 3 μέτρα σε σχέση με τα φυτά της κατηγορίας που παρουσιάζονται στην γραφική μας παράσταση.





3.3. Η συνάρτηση $y = ax$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποια ποσά ονομάζονται ανάλογα ποσά;

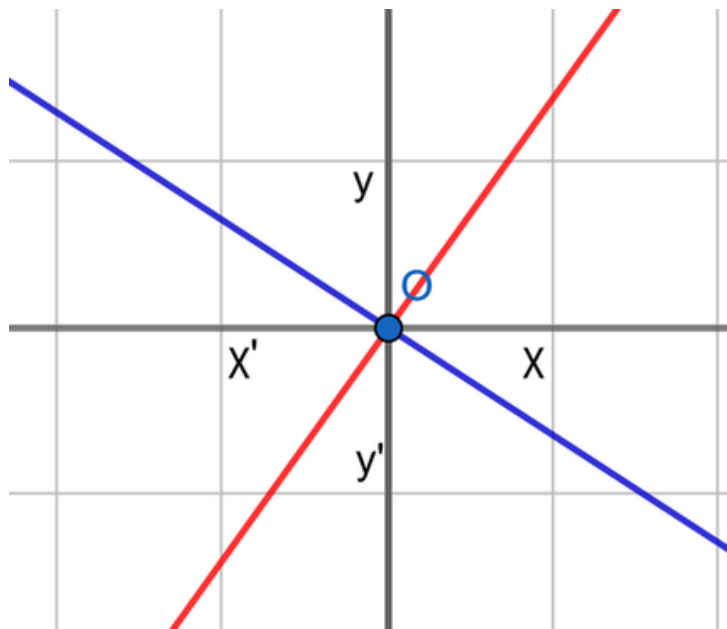
Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό. Τα **ανάλογα ποσά περιγράφονται από την συνάρτηση $y=ax$.**

2. Τι γνωρίζεις για την γραφική παράσταση των ανάλογων ποσών;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$, δηλαδή των ανάλογων ποσών, είναι μία **ευθεία που διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων.**

Ειδικά για τον **άξονα $x'x$** , ξέρουμε ότι είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 0 \cdot x$, δηλαδή **$y = 0$.**

Γενικά, κάθε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι της μορφής $y=ax$.



3. Τι είναι κλίση της ευθείας;

Παρατηρούμε ότι στην ευθεία $y = ax$ ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντα σταθερός και ίσος με a , δηλαδή: $\frac{y}{x} = a, x \neq 0$

Ο λόγος αυτός λέγεται **κλίση της ευθείας $y = ax$** .



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών στα παρακάτω ανάλογα ποσά και να βρεθεί η συνάρτησή τους.

x	1	2	3	4
y	4	8	12	16

Παρατηρούμε ότι μας δίνεται πληροφορία για το ζεύγος (2,8). Αφού τα ποσά είναι ανάλογα καταλαβαίνουμε ότι για $x=1$ θα πάρουμε $y=4$. Αυτό γιατί, αφού τα ποσά είναι ανάλογα, ξέρω ότι ό,τι συμβαίνει στο x θα συμβαίνει και στο y . Στην συγκεκριμένη περίπτωση, το x από 2 έγινε 1. Δηλαδή υποδιπλασιάστηκε. Αντίστοιχα το y θα υποδιπλασιαστεί και θα προκύψει 4.

Με τον ίδιο τρόπο συμπληρώνουμε και τα υπόλοιπα κενά στον πίνακα.

Για να βρούμε τη συνάρτησή τους:

Αφού ξέρουμε ότι τα **ποσά είναι ανάλογα**, η συνάρτηση θα είναι της μορφής **$y=ax$** . Για να βρούμε το a αξιοποιούμε τον τύπο $a = \frac{y}{x}$. Οπότε διαλέγουμε ένα ζευγάρι (x,y) από τον πίνακα, π.χ. (2,8), και έχουμε $a = \frac{8}{2} = 4$.

Τελικά η συνάρτηση είναι $y=4x$.

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι έχουμε βρει σωστά τον τύπο της συνάρτησης, αν ικανοποιεί όλα τα σημεία που προκύπτουν από τον πίνακα. Όντως, για κάθε x του πίνακα τιμών προκύπτει το αντίστοιχο y .

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και περνάει από το σημείο K(3,7).

Αφού η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα είναι της μορφής $y=ax$.

Αρκεί να βρούμε το a , δηλαδή την κλίση της ευθείας. Γνωρίζουμε ότι $a = \frac{y}{x} = \frac{7}{3}$.

Οπότε η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = \frac{7}{3}x$.

3. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο Λ(2,-2).

Όπως πριν, η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα είναι της μορφής $y=ax$. Για να βρούμε την κλίση, δηλαδή το a , υπολογίζουμε το πηλίκο: $\frac{y}{x} = -\frac{2}{2} = -1$.

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο (2,-4) και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών.

Η εξίσωση είναι της μορφής $y=ax$. Για να βρούμε το a υπολογίζουμε $-\frac{4}{2} = -2$ οπότε έχουμε $y=-2x$.

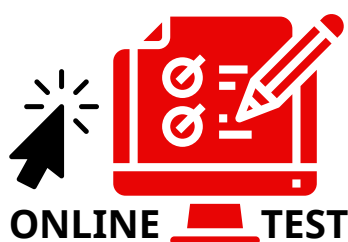
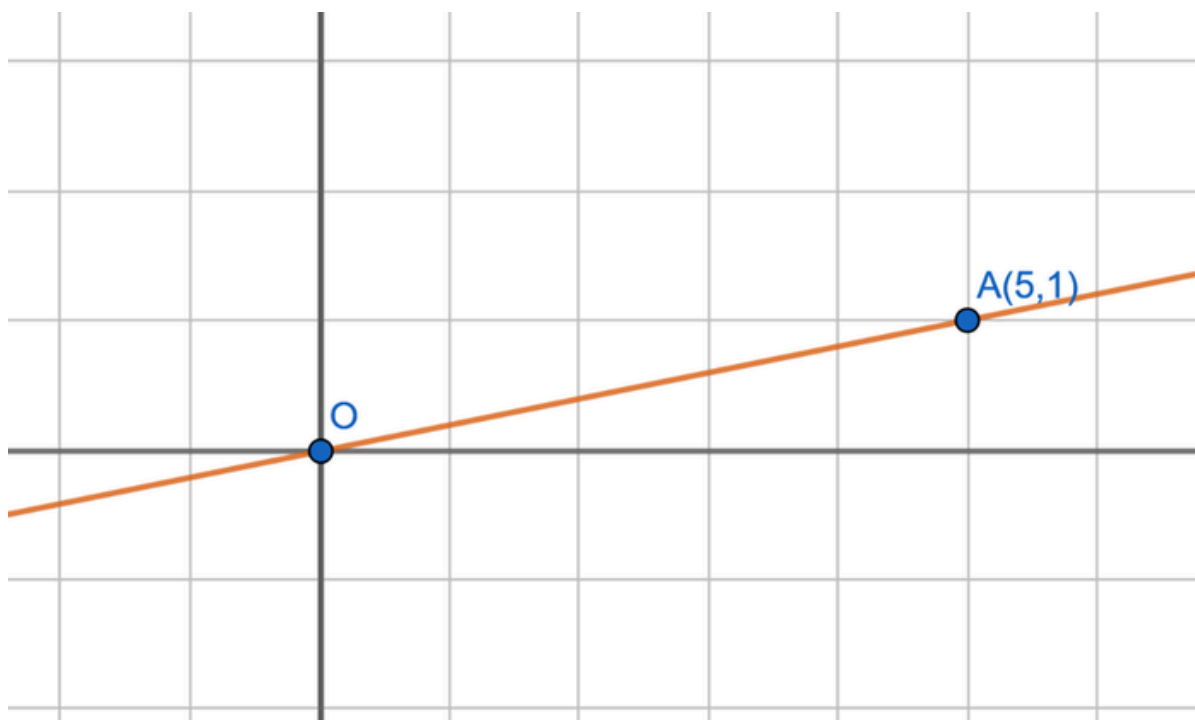
Γνωρίζοντας την εξίσωση της ευθείας μπορούμε να συμπληρώσουμε εύκολα τον πίνακα:

x	1	5	-1	-5
y	-2	10	2	10

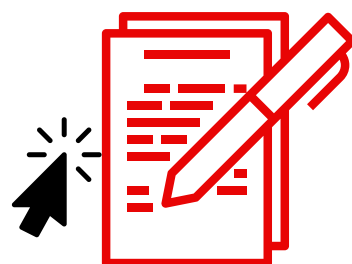
5. Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση $y=5x$.

Από τη μορφή της συνάρτησης καταλαβαίνω ότι είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Συνεπώς χρειάζομαι μόνο ένα ακόμη σημείο για να την σχεδιάσω. Διαλέγω μια τιμή για το x , εκτός από το μηδέν, και βρίσκω το αντίστοιχο y . Για $x=1$ παίρνω $y=5$. Οπότε έχω το σημείο A(1,5).

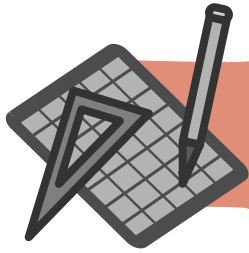
Δηλαδή πλέον ξέρω ότι η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(1,5)$ και μπορώ να τη σχεδιάσω εύκολα σε ένα σύστημα αξόνων. Ενώνω τα δύο σημεία $O(0,0)$ και $A(1,5)$ με ευθύγραμμο τμήμα και προεκτείνω προς τις δύο κατευθύνσεις.



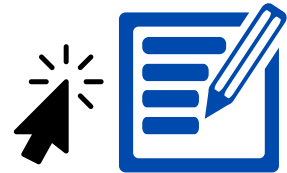
ONLINE TEST



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ



3.4. Η συνάρτηση $y = ax + \beta$



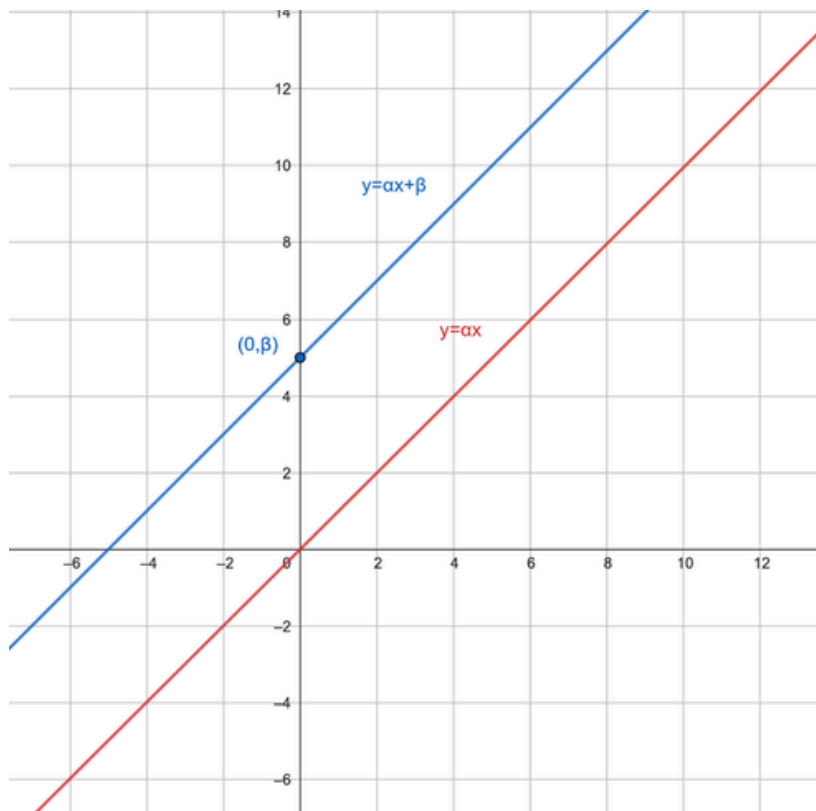
ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποια είναι η εξίσωση κάθε ευθείας;

Η συνάρτηση $y = ax + \beta$, είναι η γενική εξίσωση της ευθείας.

2. Τι ευθεία εκφράζει η εξίσωση $y = ax + \beta$ με $\beta \neq 0$;

Είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y = ax$, που διέρχεται από το σημείο $(0, \beta)$ του άξονα $y'y$.



3. Τι εκφράζει το a στην εξίσωση της ευθείας;

Ο αριθμός a λέγεται κλίση της ευθείας $y = ax + \beta$.

π.χ.: η ευθεία $y = 3x + 9$ έχει κλίση 3.

4. Τι εκφράζει το β στην εξίσωση της ευθείας;

Το β μας δείχνει το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$: $B(0,\beta)$.

π.χ. : η ευθεία $y = 3x + 9$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,9)$.

5. Πότε δύο ευθείες ονομάζονται παράλληλες;

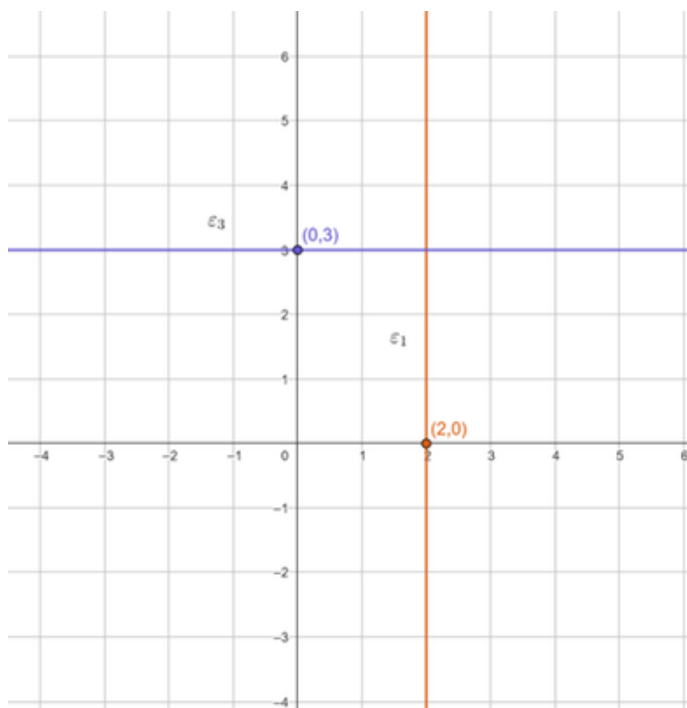
Παράλληλες είναι οι ευθείες που **έχουν ίδια κλίση** δηλαδή έχουν **ίδιο α** .

π.χ.: οι ευθείες $y = -2x + 8$ και $y = -2x + 11$ είναι παράλληλες γιατί έχουν ίδια κλίση $\alpha = -2$.

6. Ποιες είναι οι εξισώσεις των ευθειών που αποτελούν τους άξονες $x'x$ και $y'y$;

Ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση $y=0$.

Ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση $x=0$.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να βρείτε την κλίση στις παρακάτω ευθείες και στη συνέχεια να διαλέξετε τις παράλληλες ευθείες.

a. $y=5x-3$ d. $y=2+5x$

b. $y=-3x+6$ e. $y=-x+1$

c. $y=5-3x$ f. $y=x+3$

Για να βρούμε την κλίση της ευθείας αρκεί να βρούμε τον αριθμό με τον οποίο πολλαπλασιάζεται το x , δηλαδή τον συντελεστή του.

Στην ευθεία a έχουμε κλίση $\alpha=5$.

Στην ευθεία b έχουμε κλίση $\alpha=-3$.

Στην ευθεία c έχουμε κλίση $\alpha=-3$. (Προσέχουμε ότι κλίση είναι ο συντελεστής του x)

Στην ευθεία d έχουμε κλίση $\alpha=5$.

Στην ευθεία e έχουμε κλίση $\alpha=-1$.

Στην ευθεία f έχουμε κλίση $\alpha=1$.

Για να βρούμε **παράλληλες ευθείες αρκεί να βρούμε ευθείες με ίδια κλίση**. Εύκολα βλέπουμε ότι παράλληλες είναι μεταξύ τους οι ευθείες b, c καθώς και οι ευθείες a, d .

2. Να σχεδιάσετε σε κοινό σύστημα αξόνων τις ευθείες:

$$y=-x+3, y=-x, y=-x-3.$$

Παρατηρούμε πως οι ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους, αφού έχουν την ίδια κλίση α . Συνεπώς θα **σχεδιάσουμε 3 παράλληλες ευθείες**. Η ευθεία $y=-x$ περνάει από την αρχή των αξόνων και από ένα σημείο που βρίσκουμε: για $x=1$ παίρνουμε $A(1,-1)$.

Για να σχεδιάσουμε τις άλλες δύο ευθείες:

Η $y=-x+3$ θα διέρχεται σίγουρα από το σημείο $(0,3)$. Για να βρούμε ένα ακόμη σημείο, θα πάρουμε πάλι για $x=1$ το σημείο $B(1,2)$.

Η $y=-x-3$ θα διέρχεται σίγουρα από το σημείο $(0,-3)$. Για να βρούμε ένα ακόμη σημείο, θα πάρουμε πάλι για $x=1$ το σημείο $\Gamma(1,-4)$.

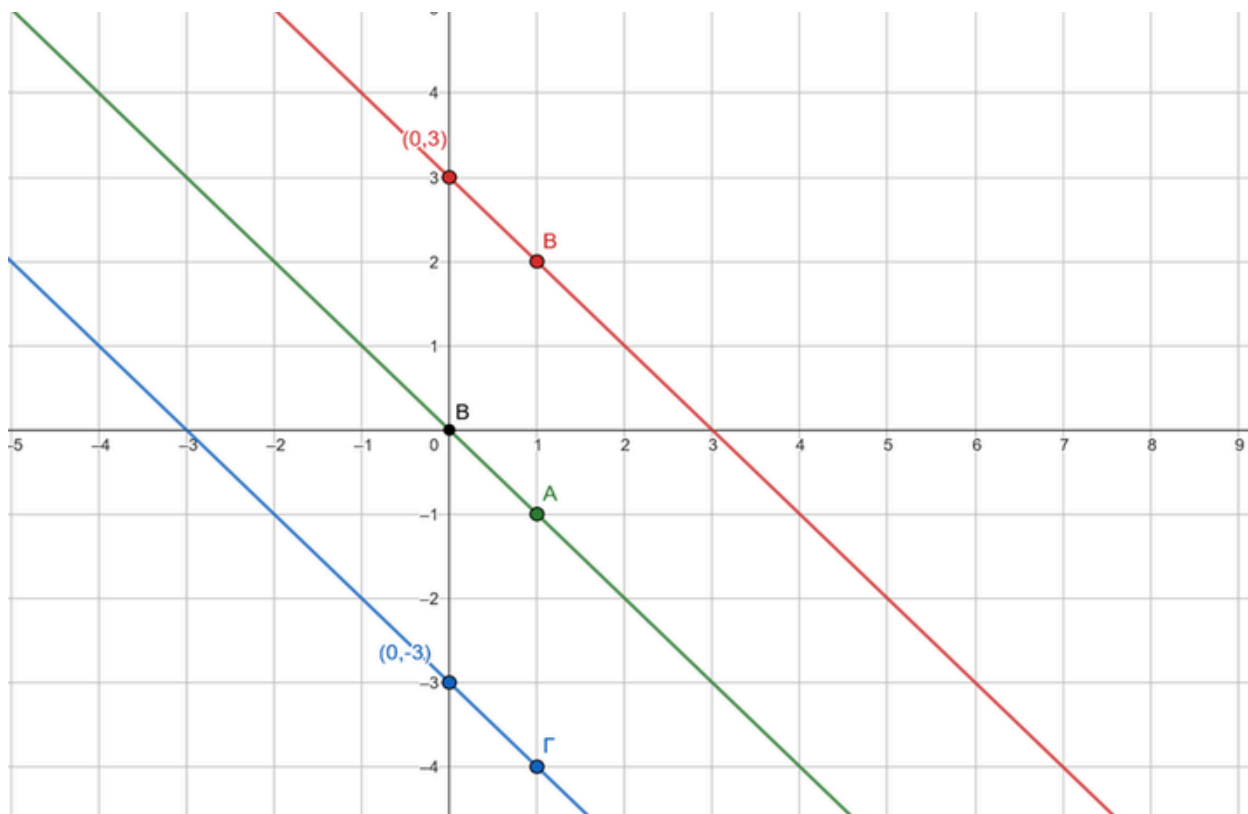
Θυμόμαστε πως κάθε ευθεία της μορφής $y=ax+\beta$ περνάει από το σημείο $(0,\beta)$.

Οπότε βάζουμε στον άξονα τα σημεία για να σχεδιάσουμε τις ευθείες:

$$y=-x : O(0,0) \text{ και } A(1,-1)$$

$$y=-x+3: (0,3) \text{ και } B(1,2)$$

$$y=-x-3: (0,-3) \text{ και } \Gamma(1,-4)$$



3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση 4 και τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 2.

Η έκφραση «τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 2» είναι ισοδύναμη της έκφρασης περνάει από το σημείο $(0, 2)$!

Καταλαβαίνουμε ότι η ευθεία έχει την μορφή $y=ax+\beta$. Το a , η κλίση της ευθείας, μας δίνεται ότι είναι $a=4$. Για το β αρκεί να σκεφτούμε ότι περνάει από το σημείο $(0, 2)$, δηλαδή θα είναι $\beta=2$. Οπότε τελικά παίρνουμε: $y=4x+2$.

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας με κλίση 2 , η οποία διέρχεται από το σημείο Κ(1,4).

Η εξίσωση της ευθείας θα είναι της μορφής $y=ax+\beta$.

Εύκολα βλέπουμε ότι $a=2$ οπότε έχουμε: $y=2x+\beta$.

Για να βρούμε το β , θα αξιοποιήσουμε την πληροφορία ότι **η ευθεία διέρχεται από το σημείο Κ(1,4)**. Δηλαδή οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Οπότε θα βάλουμε όπου $y=4$ και $x=1$ και παίρνουμε:

$$4=2 \cdot 1 + \beta$$

$$4=2+\beta$$

$$\beta=4-2$$

$$\beta=2$$

Οπότε τελικά ξέρουμε το a και το β και παίρνουμε την εξίσωση της ευθείας: $y=2x+2$.

5. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $y=-2x+9$ με τους άξονες.

Για το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ ξέρουμε ότι είναι το σημείο **(0,β)**, δηλαδή (0,9).

Για το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ αρκεί να πάρουμε $y=0$, οπότε προκύπτει η εξίσωση:

$$0=-2x+9$$

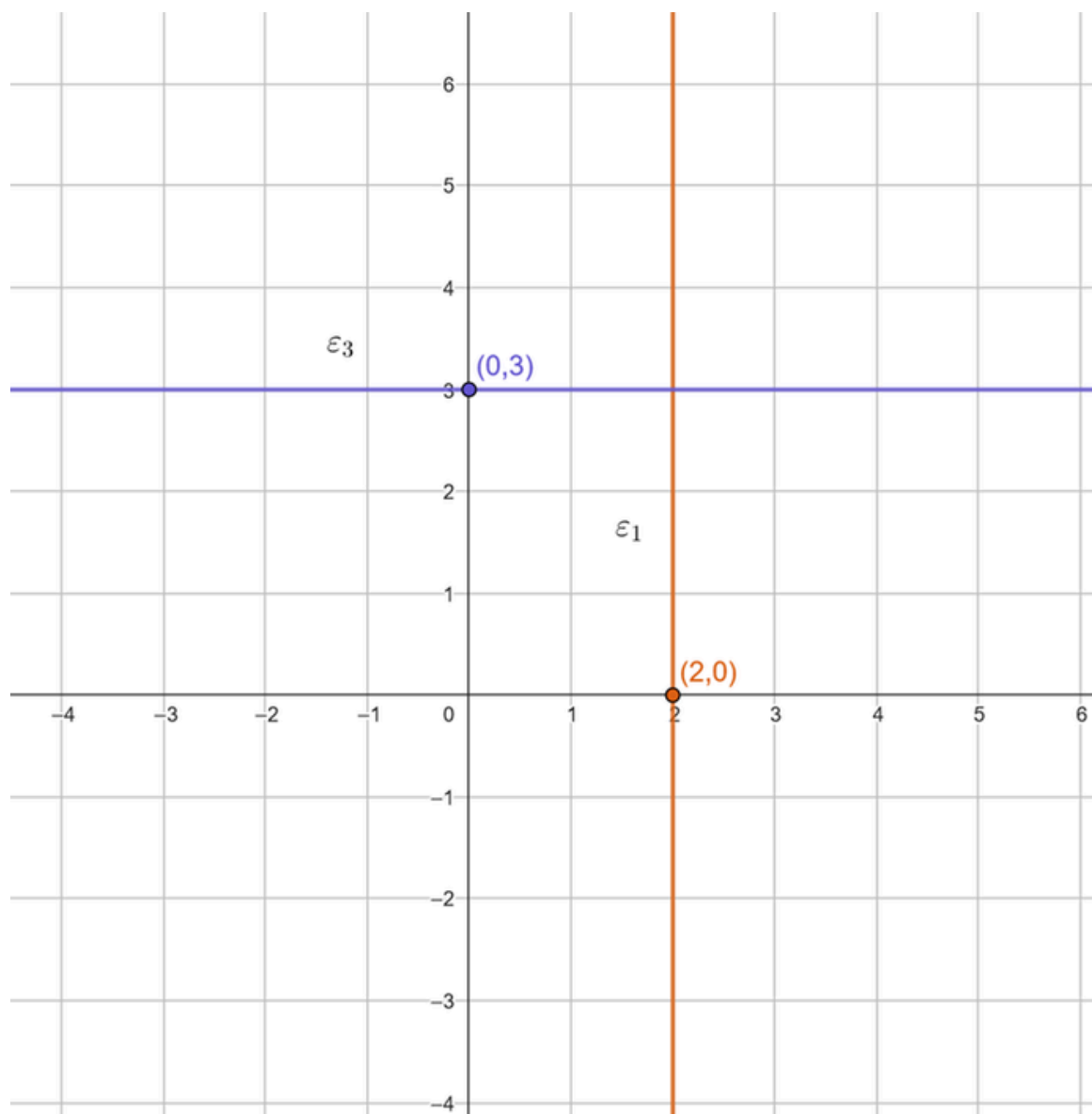
$$2x=9$$

$$x=\frac{9}{2}$$

Άρα η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\frac{9}{2}, 0)$

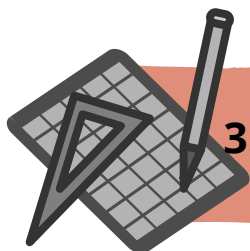
Μπορούμε να παρατηρήσουμε πως βρίσκοντας τα σημεία τομής μιας ευθείας με τους άξονες, μπορούμε να τη σχεδιάσουμε εύκολα στη συνέχεια σε σύστημα αξόνων.

6. Ποιες είναι οι εξισώσεις των παρακάτω ευθειών;



Παρατηρούμε ότι η **ευθεία** ε_1 είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $(2, 0)$. Άρα θα είναι της **μορφής** $x=2$

Η **ευθεία** ε_3 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $(0, 3)$ άρα θα είναι της μορφής $y=3$.



3.5. Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ - Η υπερβολή



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποια ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα;

Αντιστρόφως ανάλογα είναι τα ποσά στα οποία όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιαστεί επί έναν αριθμό, τότε η τιμή του άλλου διαιρείται με τον αριθμό αυτόν. **Όταν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντιστοιχών τιμών τους είναι σταθερό.**

Π.χ.: Τα ποσά στον πίνακα είναι αντιστρόφως ανάλογα αφού έχουμε $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4$.

x	1	2
y	4	2

2. Ποια είναι η συνάρτηση που περιγράφει τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά;

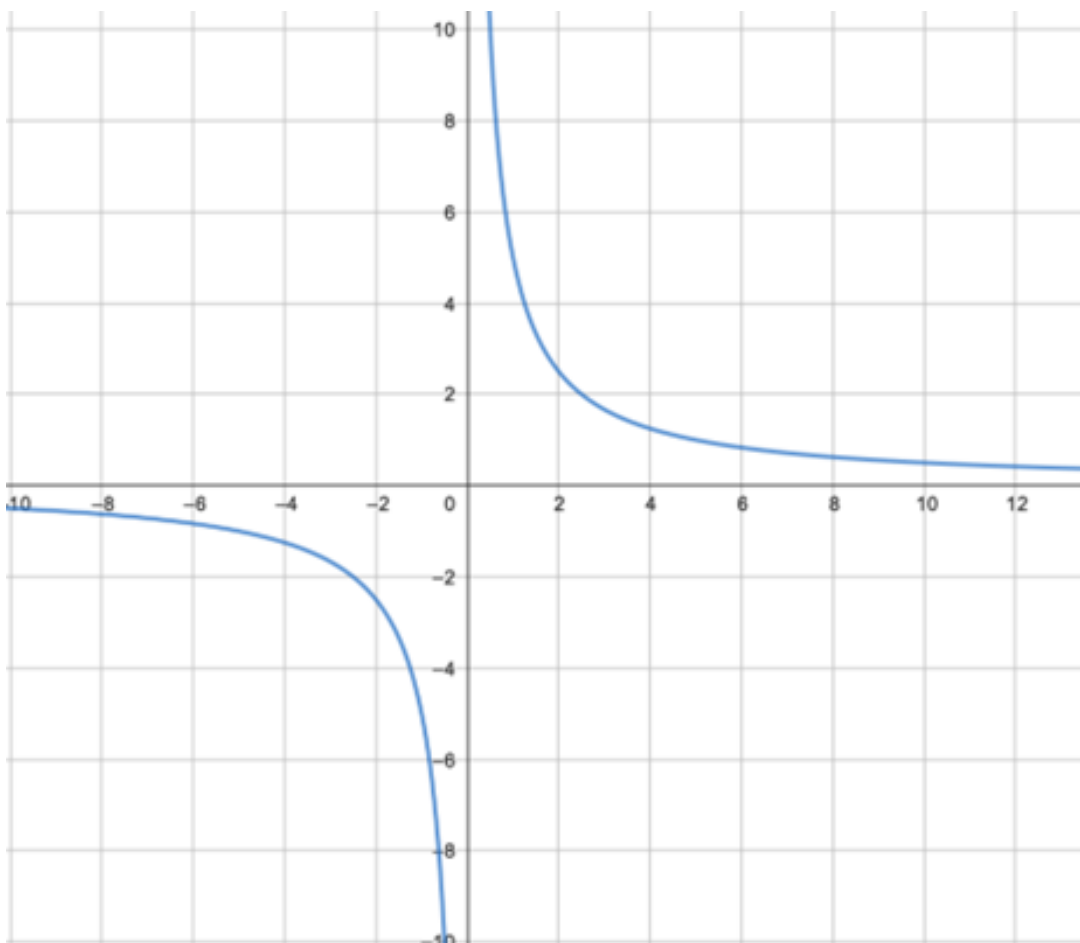
Αν $a \neq 0$ είναι το σταθερό γινόμενο των αντιστρόφως ανάλογων ποσών x και y , τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο $y = \frac{a}{x}$.

Καταλαβαίνουμε ότι οι μεταβλητές x και y της συνάρτησης δεν μπορούν να πάρουν ποτέ την τιμή μηδέν.

Π.χ. Από τον παραπάνω πίνακα βρίσκουμε ότι $a=4$ και $y = \frac{4}{x}$

3. Ποια είναι η γραφική παράσταση των αντιστρόφως ανάλογων ποσών;

Η γραφική παράσταση των αντιστρόφως ανάλογων ποσών λέγεται **υπερβολή** και οι δύο γραμμές που τη συνθέτουν λέγονται **κλάδοι** της υπερβολής.

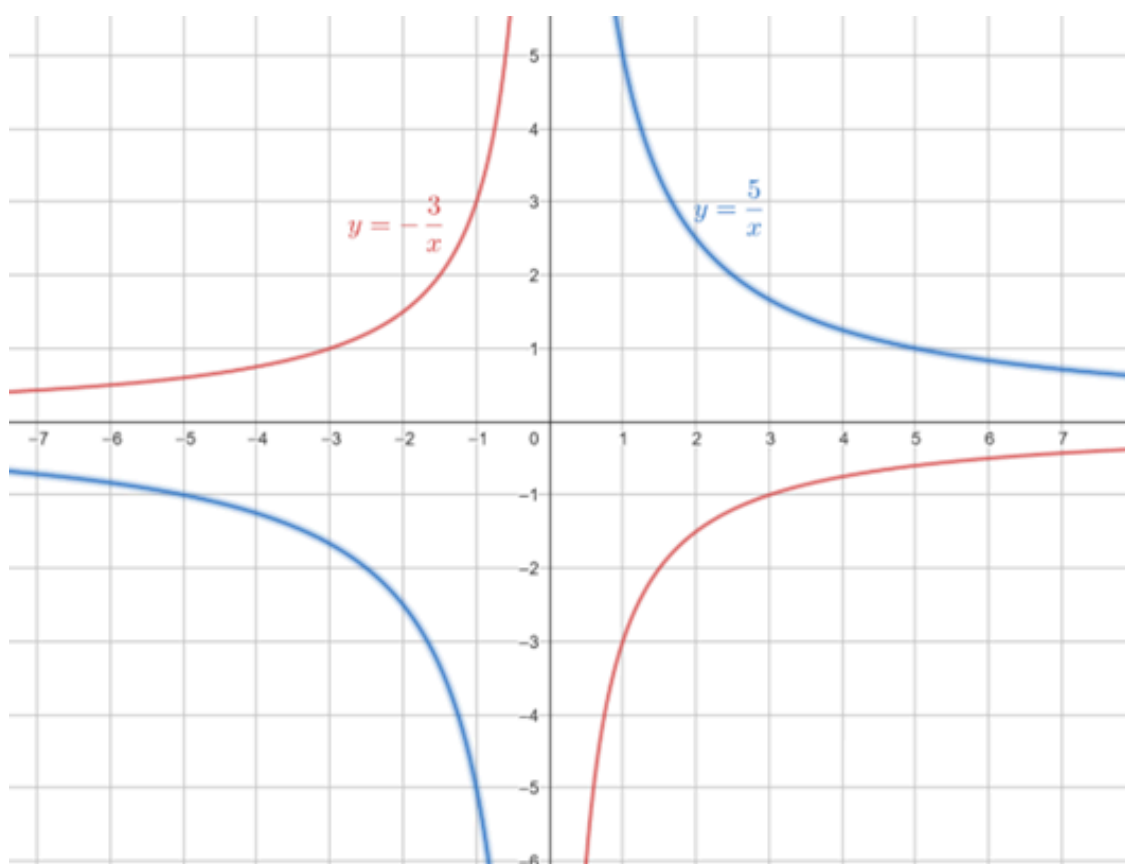


4. Πού βρίσκονται οι κλάδοι της υπερβολής;

Οι δύο κλάδοι βρίσκονται:

Στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $a > 0$.

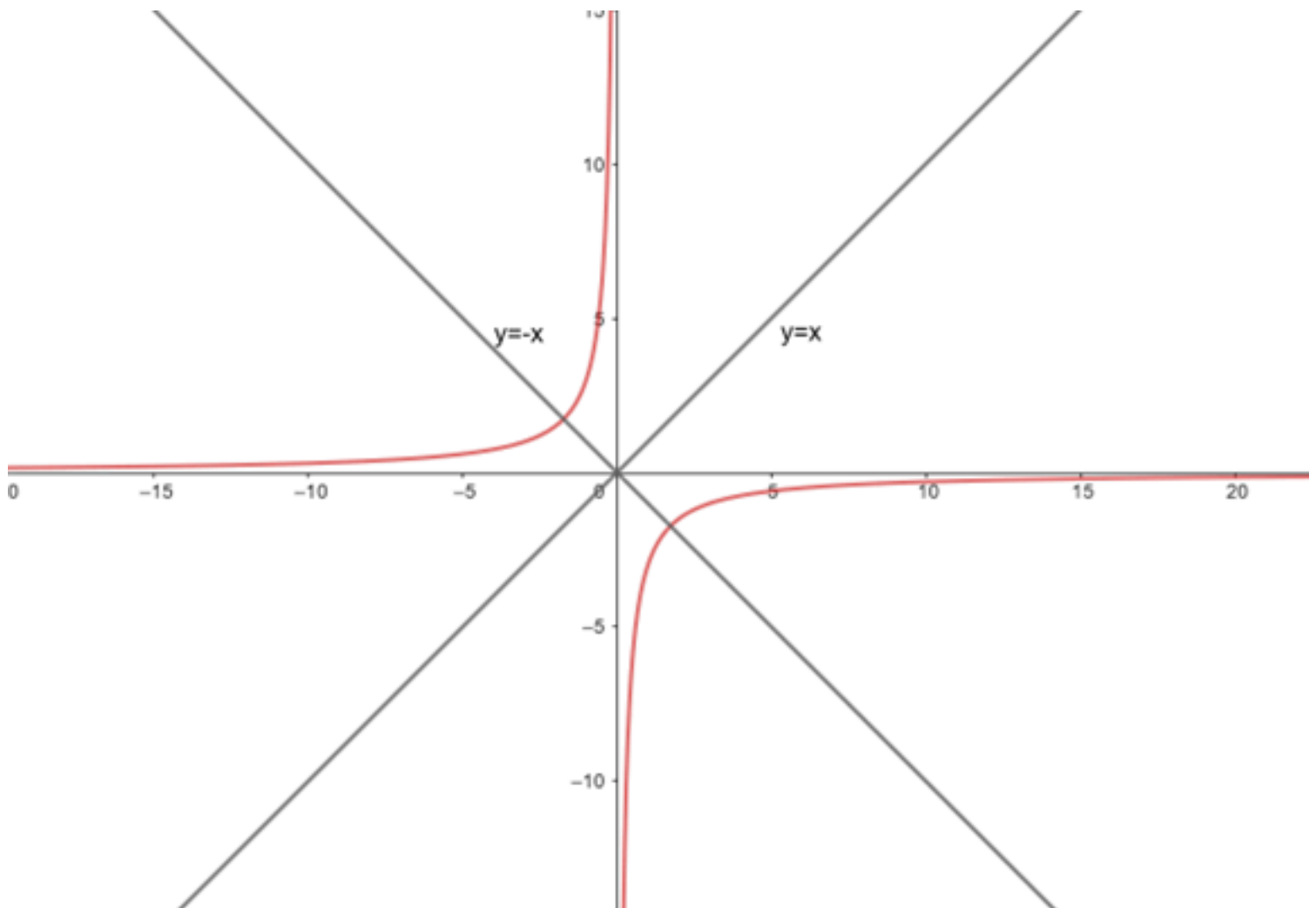
Στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $a < 0$.



5. Τι ξέρουμε για τη συμμετρία της υπερβολής;

Η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:

Κέντρο συμμετρίας την **αρχή Ο** των αξόνων και **άξονες συμμετρίας** τις **διχοτόμους** των γωνιών των αξόνων, δηλαδή **τις ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$** .





Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{4}{x}$

x	1	2	4	-1	-2	-4
y	4	2	1	-4	-2	-1

Εύκολα συμπληρώνουμε τις τιμές της μεταβλητής y, απλά υπολογίζοντας με το αντίστοιχο x σε κάθε περίπτωση,

$$\text{π.χ.: } \frac{4}{1} = 4, \frac{4}{2} = 2, \frac{4}{-4} = -1, \text{κ.ο.κ.}$$

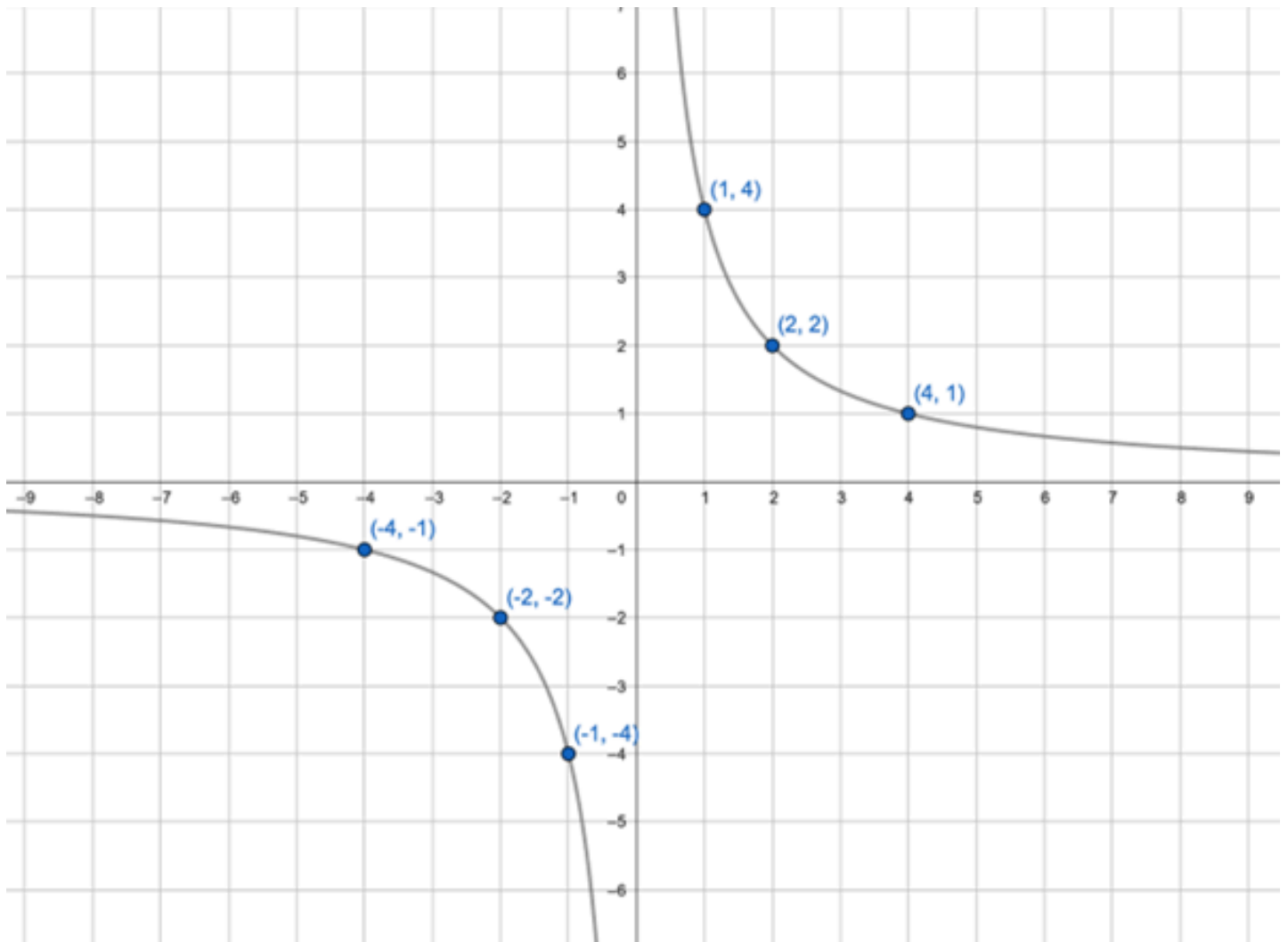
Για να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης:

Δεν ξεχνάμε ότι πρέπει να σχεδιάσουμε μια υπερβολή με δύο κλάδους!

Για τα θετικά x παίρνουμε τα σημεία: (1,4), (2,2), (4,1).

Για τα αρνητικά x παίρνουμε τα σημεία: (-1,-4), (-2,-2), (-4,-1).

Τοποθετούμε τα σημεία στο σύστημα αξόνων και σχεδιάζουμε τους δύο κλάδους της υπερβολής.



2. Να εξετάσετε αν είναι αντιστρόφως ανάλογα τα ποσά που φαίνονται στους παρακάτω πίνακες:

1	2	3	4
10	20	30	40

1	2	3	4
-0,2	-0,4	-0,6	-0,8

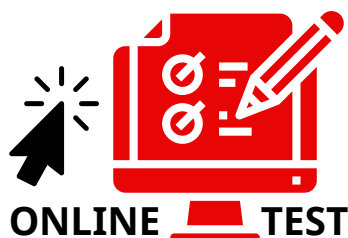
2	4	-5	-1
10	5	-4	-20

Για να εξετάσουμε αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα αρκεί να βρούμε τα γινόμενα των τιμών και να δούμε αν είναι σταθερά.

Στον πρώτο πίνακα έχουμε: $1 \cdot 10 = 10$, $2 \cdot 20 = 40$, άρα δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

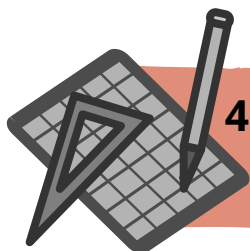
Στον δεύτερο πίνακα έχουμε: $1 \cdot (-0,2) = -0,2$, $2 \cdot (-0,4) = -0,8$ άρα δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Στον τρίτο πίνακα έχουμε: $2 \cdot 10 = 20$, $4 \cdot 5 = 20$, $-5 \cdot (-4) = 20$, $-1 \cdot (-20) = 20$, δηλαδή είναι **όλα τα γινόμενα ίσα**, άρα τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.



4

περιγραφική στατιστική



4.1. Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός - Δείγμα



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε πληθυσμό στη στατιστική;

Ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό του, λέγεται **πληθυσμός**.

π.χ. Θέλουμε να μελετήσουμε τι ομάδα υποστηρίζουν οι μαθητές των Γυμνασίων όλης της Ελλάδας. Ο πληθυσμός της έρευνας είναι όλοι οι μαθητές Γυμνασίων της Ελλάδας.

2. Τι ονομάζουμε μεταβλητή στη στατιστική;

Το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού, ονομάζεται **μεταβλητή**.

π.χ. Στην παραπάνω έρευνα μεταβλητή είναι η ομάδα που υποστηρίζουν οι μαθητές.

3. Τι ονομάζουμε δείγμα;

Το κομμάτι του πληθυσμού που μελετάμε ονομάζεται **δείγμα** του πληθυσμού. Λέμε ότι ένα δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό όταν εκφράζει όλο τον πληθυσμό που θέλουμε να μελετήσουμε.

π.χ. Στην παραπάνω έρευνα δείγμα είναι οι μαθητές που ρωτήθηκαν στην έρευνα. Αν πάρουμε μαθητές μόνο από το κέντρο της Θεσσαλονίκης δεν θα έχουμε αντιπροσωπευτικό δείγμα. σε αυτήν την έρευνα θα έπρεπε να απευθυνθούμε σε μαθητές Γυμνασίων από όλη την Ελλάδα.

4. Τι ονομάζουμε δειγματοληψία;

Η διαδικασία επιλογής του δείγματος ονομάζεται **δειγματοληψία** (ή δημοσκόπηση).

5. Τι ονομάζουμε μέγεθος δείγματος;

Μέγεθος δείγματος ονομάζουμε το πλήθος των στοιχείων που έχει το δείγμα.

π.χ. Σε μια έρευνα που ρωτήσαμε 150 μαθητές, το μέγεθος του δείγματος είναι 150.

Στην Στατιστική χρησιμοποιούμε πολύ συχνά ποσοστά επί τοις εκατό (%) για να επικοινωνήσουμε τα αποτελέσματα μιας έρευνας, γιατί είναι κατανοητά από όλους.

Θυμόμαστε ότι:

$$\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 0,25 = 25\%$$

$$35\% = \frac{35}{100}$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να βρείτε τα χαρακτηριστικά (πληθυσμός, μεταβλητή, δείγμα, μέγεθος δείγματος) της παρακάτω έρευνας. Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό;

Για να μελετήσουμε το χρώμα των λουλουδιών που φυτρώνουν στην Αττική ελέγξαμε τα 100 άνθη που βρήκαμε στους πρόποδες της Πάρνηθας.

Πληθυσμός: → λουλούδια που φυτρώνουν στην Αττική

Μεταβλητή: → χρώμα λουλουδιού

Δείγμα: → άνθη στους πρόποδες της Πάρνηθας

Μέγεθος δείγματος: $\longrightarrow 100$

Το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό γιατί έχουμε πάρει πληροφορίες από μια μικρή περιοχή, με ορεινό στοιχείο ενώ η Αττική έχει πλούσιο ανάγλυφο, με βουνά, πεδιάδες και θάλασσα.

2. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ποσοστά: $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{8}$

Ένας τρόπος για να μετατρέπουμε κλάσματα σε ποσοστά είναι να τα μετατρέπουμε σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 100.

$$\text{Δηλαδή } \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\% \quad \text{και} \quad \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\% .$$

Σε κάποιες περιπτώσεις δεν μπορούμε εύκολα να μετατρέψουμε το κλάσμα σε ισοδύναμο με παρονομαστή το 100, οπότε είναι πιο βολικό να κάνουμε τη διαίρεση και να μετατρέπουμε τον δεκαδικό αριθμό που προκύπτει σε ποσοστό.

$$\text{Δηλαδή } \frac{5}{8} = 0,625 = 62,5\%$$

3. Να υπολογίσετε το 12% του 160.

Κάθε φορά που μας ζητείται να βρούμε το ποσοστό μιας ποσότητας για να το βρούμε αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το ποσοστό με την ποσότητα.

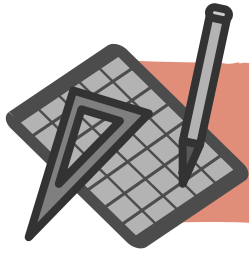
$$\text{Δηλαδή } 12\% \cdot 160 = \frac{12}{100} \cdot 160 = \frac{1920}{100} = 19,2$$

4. Να βρείτε τι ποσοστό είναι οι 81 στους 180 μαθητές.

Κάθε φορά που μας ζητείται να υπολογίσουμε το ποσοστό αρκεί να βρούμε το κλάσμα που έχει αριθμητή την ποσότητα που μας «ενδιαφέρει» και παρονομαστή την συνολική ποσότητα. Το κλάσμα αυτό μας δείχνει και το αντίστοιχο ποσοστό.

$$\text{Δηλαδή } \frac{81}{180} = 0,45 = 45\%$$





4.2. Γραφικές παραστάσεις

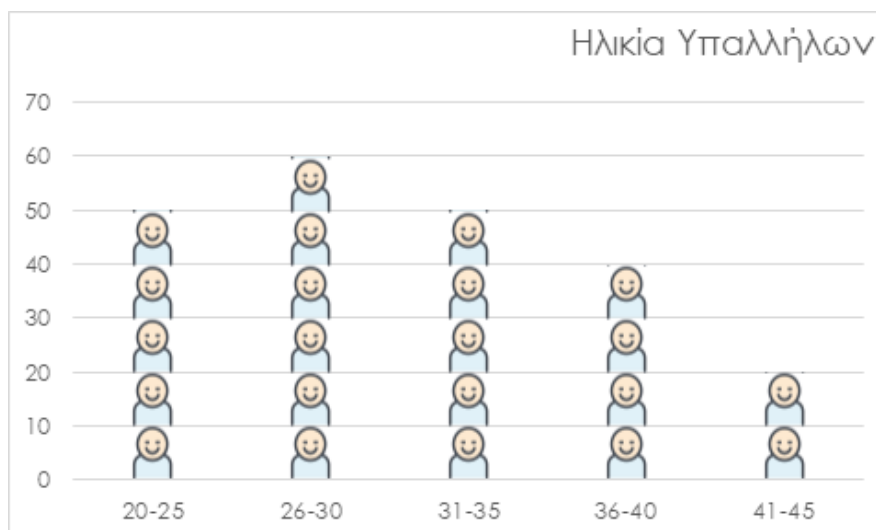


1. Τι ονομάζουμε πληθυσμό στη στατιστική;

Γραφική παράσταση ή γράφημα ονομάζουμε τα διαγράμματα που χρησιμοποιούμε για να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα μιας έρευνας.

2. Τι είναι το εικονόγραμμα;

Το **εικονόγραμμα** είναι ένα γράφημα στο οποίο χρησιμοποιούμε την εικόνα ενός αντικειμένου για να δείξουμε πόσες φορές αυτό παρουσιάζεται στην έρευνά μας. Σε κάθε εικονόγραμμα υπάρχει ο **τίτλος** που μας κατατοπίζει για το είδος και τη μεταβλητή της έρευνας και η **κλίμακα** που δείχνει τον αριθμό των αντικειμένων που παριστάνει η εικόνα.



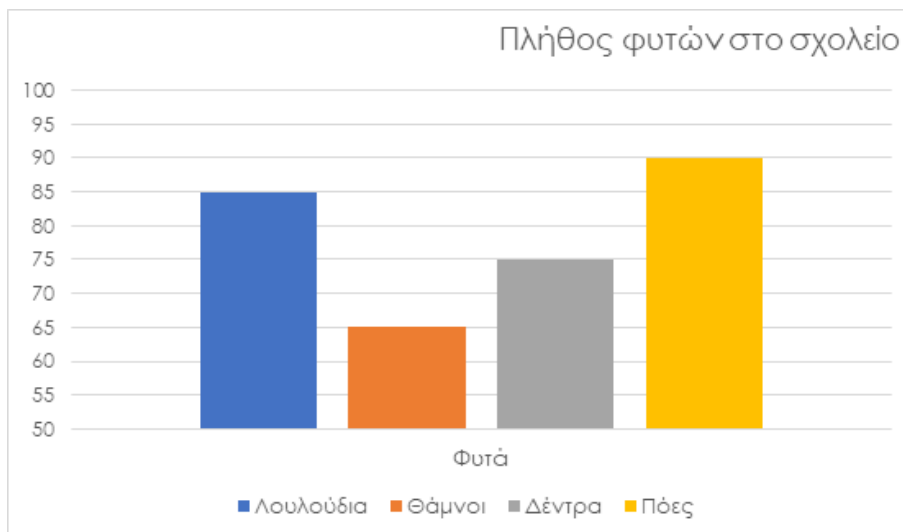
Γνωρίζουμε ότι κάθε εικόνα ανθρώπου αντιστοιχεί σε 10 εργαζόμενους.

3. Τι είναι το ραβδόγραμμα;

Το **ραβδόγραμμα** είναι ένα γράφημα στο οποίο χρησιμοποιούμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα για να δείξουμε το πλήθος των απαντήσεων για την τιμή μιας μεταβλητής. Σε κάθε ραβδόγραμμα υπάρχουν ο τίτλος του που μας κατατοπίζει για το είδος της έρευνας και οι τίτλοι των αξόνων. Οι τίτλοι αξόνων μας δείχνουν τι παριστάνει ο οριζώντιος άξονας και τι ο κάθετος άξονας.

Τα ραβδογράμματα σχεδιάζονται εύκολα και είναι πιο ακριβή από τα εικονογράμματα.

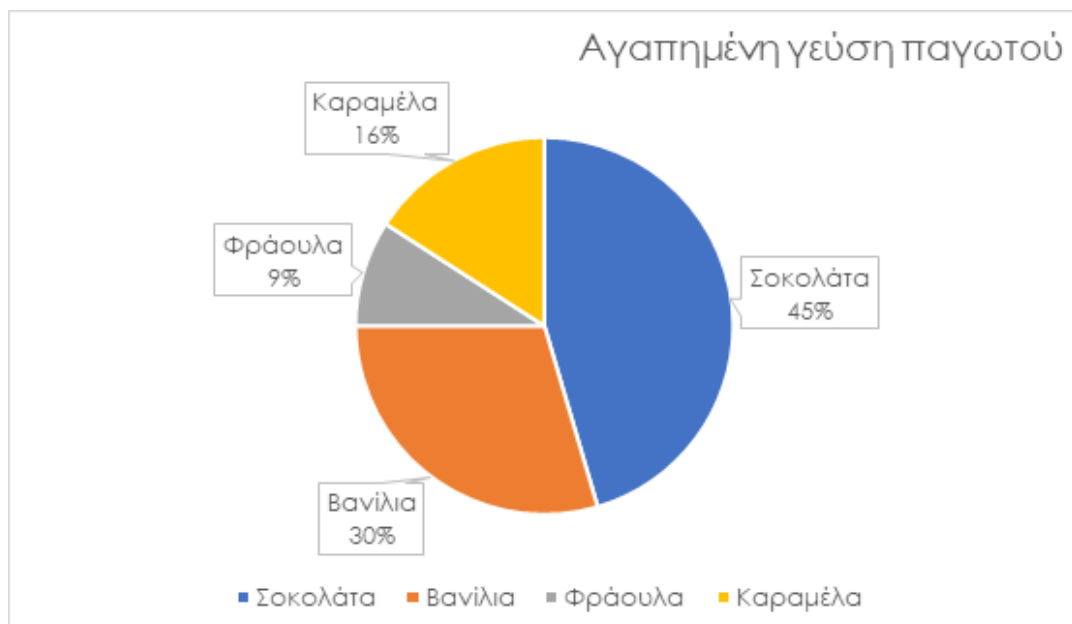
Τα ορθογώνια ενός ραβδογράμματος μπορεί να είναι τοποθετημένα οριζόντια ή κατακόρυφα. Κάποιες φορές αντί για ορθογώνια, σχεδιάζουμε κάθετες γραμμές



4. Τι είναι το κυκλικό διάγραμμα;

Το **κυκλικό** διάγραμμα είναι ένα γράφημα στο οποίο μπορούμε να δούμε τι μέρος του δείγματος έχει συγκεντρώσει κάθε τιμή της μεταβλητής εκφρασμένα πάνω σε έναν κύκλο.

Συγκεκριμένα, το δείγμα παριστάνεται με έναν κυκλικό δίσκο και οι τιμές της μεταβλητής με κυκλικούς τομείς διαφορετικού χρώματος.



5. Πώς υπολογίζουμε τη γωνία κάθε κυκλικού τομέα σε ένα κυκλικό διάγραμμα;

Γνωρίζουμε ότι ο κύκλος έχει 360° , οπότε πρέπει να αντιστοιχίσουμε το μέγεθος του δείγματος με τις 360° του κύκλου.

Επομένως, τα x άτομα που αντιστοιχούν σε μια τιμή της μεταβλητής, θα πρέπει να αντιστοιχούν σε μία γωνία θ , τέτοια ώστε :

π.χ. : Σε ένα δείγμα 30 μαθητών, οι 10 απάντησαν Α. Για να βρούμε ποια γωνία αντιστοιχεί στην απάντηση Α αρκεί να υπολογίσουμε:

$$\frac{\text{μέγεθος δείγματος}}{\text{τιμή κάθε μεταβλητής}} = \frac{360^\circ}{\theta}$$

$$\frac{30}{10} = \frac{360}{\theta}$$

$$30 \cdot \theta = 360 \cdot 10$$

$$30\theta = 3600$$

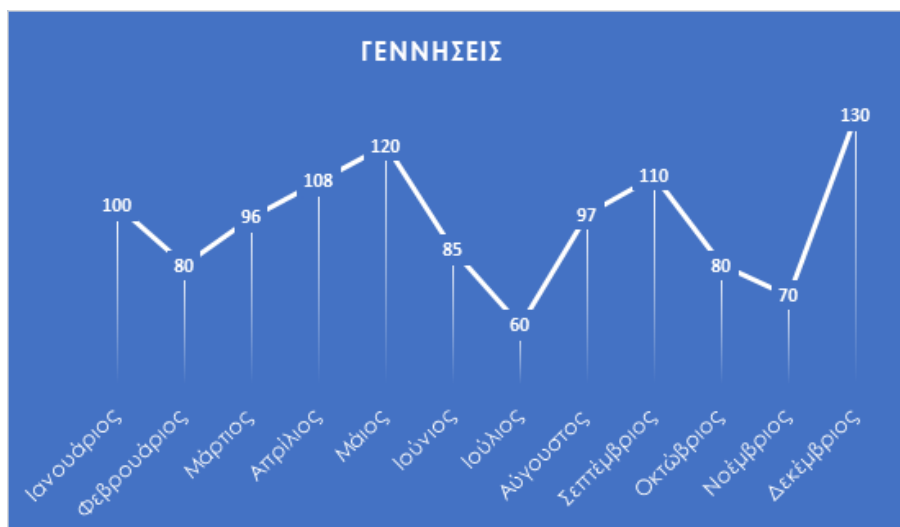
$$\theta = \frac{3600}{30}$$

$$\theta = 120^\circ$$

Δηλαδή στην απάντηση Α αντιστοιχούν 120° .

6. Τι είναι το χρονόγραμμα;

Το **χρονόγραμμα** είναι ένα διάγραμμα, το οποίο χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε την χρονική εξέλιξη ενός φαινομένου.





1. Με βοήθεια του παρακάτω πίνακα, να φτιάξετε ένα ραβδόγραμμα και ένα κυκλικό διάγραμμα που να απεικονίζει τα αποτελέσματα.

Έρευνα: Πού θα πάνε πενθήμερη εκδρομή οι μαθητές της Γ' Λυκείου.			
Δείγμα: 200 μαθητές			
Απαντήσεις	Ρόδος	Βόλος	Ναύπλιο
Τιμές	75	100	25

Για να φτιάξουμε το κυκλικό διάγραμμα θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τις γωνίες που αντιστοιχούν σε κάθε απάντηση. Οπότε θα πάρουμε:

$$\frac{200}{75} = \frac{360}{\rho}$$

$$\rho = \frac{360 \cdot 75}{200}$$

$$\rho = 135^\circ$$

$$\frac{200}{100} = \frac{360}{\beta}$$

$$\beta = \frac{360 \cdot 100}{200}$$

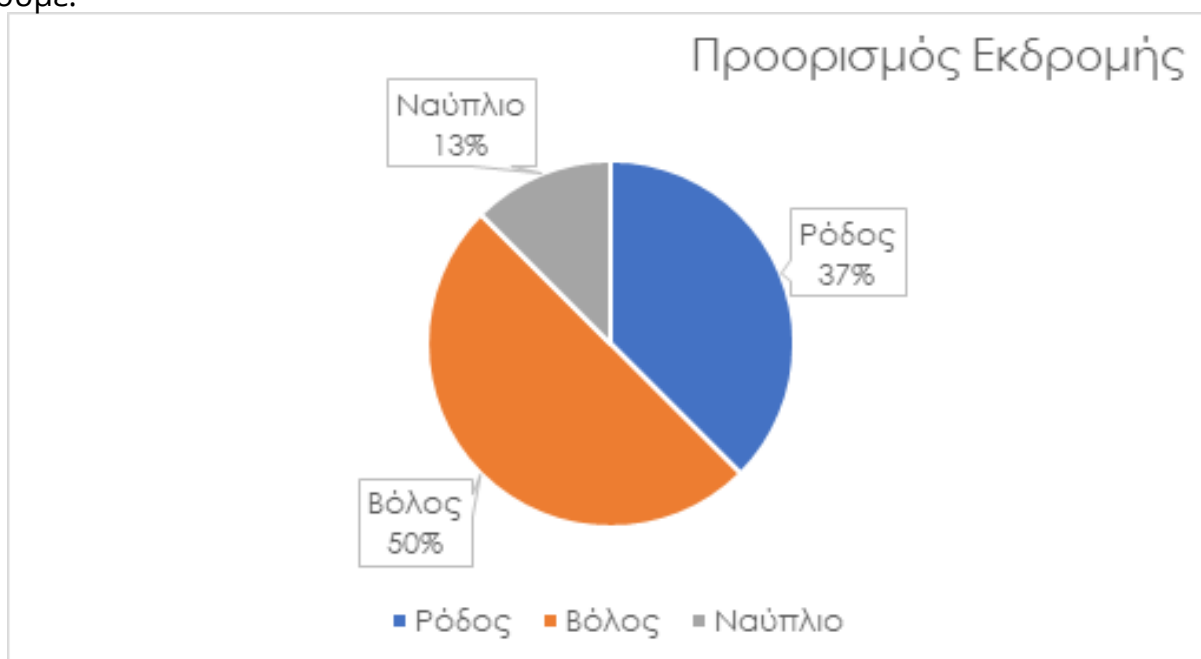
$$\beta = 180^\circ$$

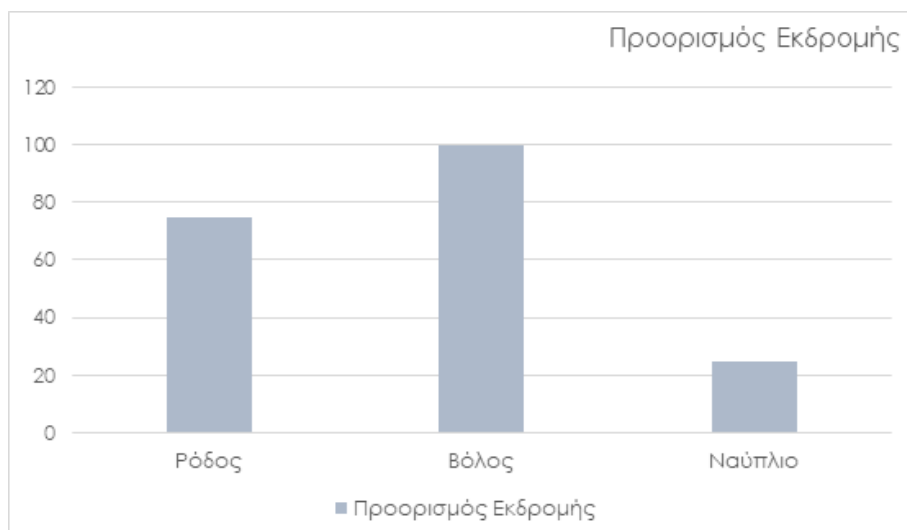
$$\frac{200}{25} = \frac{360}{\nu}$$

$$\nu = \frac{360 \cdot 25}{200}$$

$$\nu = 45^\circ$$

Οπότε έχουμε:





2. Σε μία έρευνα για το αγαπημένο χρώμα των μαθητών βρήκαμε ότι το 50% προτιμάει το μπλε, το 30% προτιμάει το κόκκινο, το 15% προτιμάει το μαύρο και οι υπόλοιποι προτιμούν το λευκό.

1. Να βρείτε:

- το ποσοστό των μαθητών που προτιμούν το λευκό χρώμα.
- πόσοι μαθητές προτιμούν κάθε χρώμα αν γνωρίζουμε ότι συνολικά ρωτήσαμε 200 μαθητές.

2. Να παραστήσετε γραφικά τα δεδομένα της έρευνας σε ραβδόγραμμα, χρησιμοποιώντας τα ποσοστά των απαντήσεων.



- Το ποσοστό των μαθητών που προτιμούν το λευκό χρώμα είναι:

$$100\% - 50\% - 30\% - 15\% = 5\%$$



- Για να βρούμε πόσοι μαθητές προτιμούν κάθε χρώμα έχουμε:

ο Για το μπλε: 50% του 200 άρα $50\% \times 200 = \frac{50}{100} \times 200 = \frac{10000}{100} = 100$ μαθητές

ο Για το κόκκινο: 30% του 200 άρα $30\% \times 200 = \frac{30}{100} \times 200 = \frac{6000}{100} = 60$ μαθητές

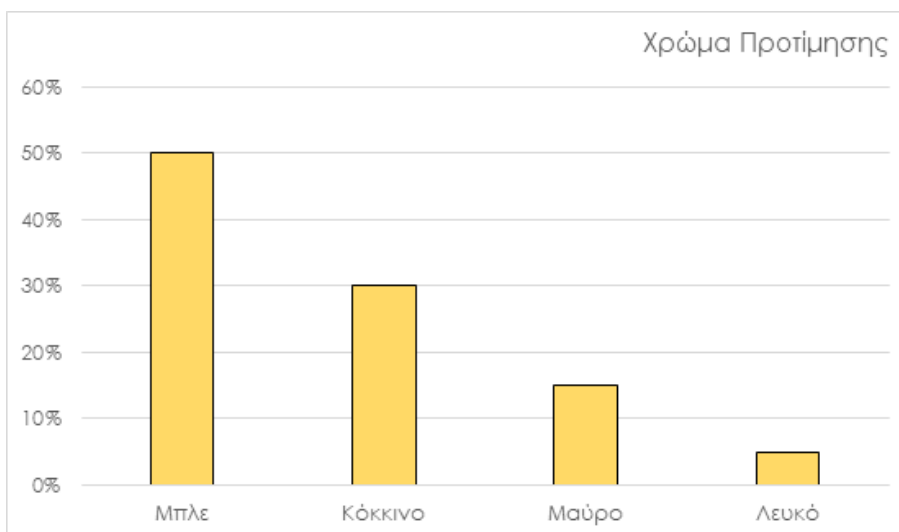
ο Για το μαύρο: 15% του 200 άρα $15\% \times 200 = \frac{15}{100} \times 200 = \frac{3000}{100} = 30$ μαθητές

ο Για το λευκό: 5% του 200 $5\% \times 200 = \frac{5}{100} \times 200 = \frac{1000}{100} = 10$ μαθητές

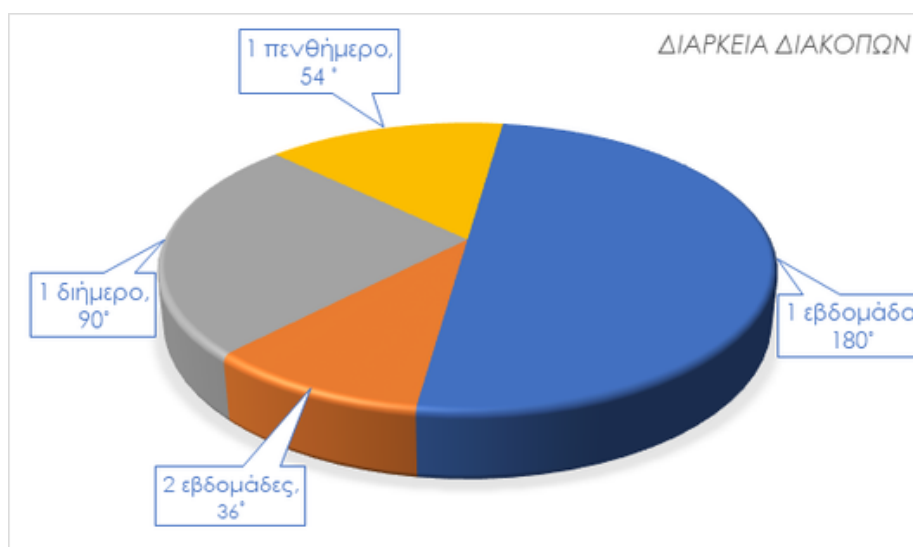
Επιβεβαιώνουμε ότι βρήκαμε σωστά τους αριθμούς προσθέτοντας το πλήθος των μαθητών, δηλαδή $100+60+30+10=200$.



- Για να φτιάξουμε το ραβδόγραμμα αρκεί να αξιοποιήσουμε τα ποσοστά που έχουμε. Δεν ξεχνάμε σε κάθε ραβδόγραμμα να βάζουμε τίτλο ώστε να είναι κατανοητά τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε.



3. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα να βρεθούν οι τιμές της μεταβλητής κάθε κατηγορίας, αν γνωρίζουμε ότι το δείγμα της έρευνας είναι 500 οικογένειες.



Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $\frac{\text{μέγεθος δείγματος}}{\text{τιμή κάθε μεταβλητής}} = \frac{360^\circ}{\theta}$

- Για τη διάρκεια διακοπών μιας εβδομάδας:

$$\frac{500}{\alpha} = \frac{360}{180}$$

$$360\alpha = 500 \cdot 180$$

$$\alpha = \frac{90000}{360}$$

$$\alpha = 250$$

- Για τη διάρκεια διακοπών ενός πενθήμερου:

$$\frac{500}{\beta} = \frac{360}{54}$$

$$360\beta = 54 \cdot 500$$

$$\beta = \frac{27000}{360}$$

$$\beta = 75$$

- Για τη διάρκεια διακοπών ενός διημέρου:

$$\frac{500}{\gamma} = \frac{360}{90}$$

$$360\gamma = 90 \cdot 500$$

$$\gamma = \frac{45000}{360}$$

$$\gamma = 125$$

- Για τη διάρκεια διακοπών δύο εβδομάδων:

$$\frac{500}{\delta} = \frac{360}{36}$$

$$360\delta = 36 \cdot 500$$

$$\delta = \frac{72000}{360}$$

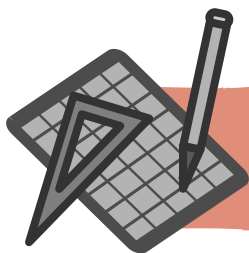
$$\delta = 50$$

Για να επιβεβαιώσουμε ότι έχουμε εκτελέσει σωστά τις πράξεις αρκεί να προσθέσουμε το πλήθος των οικογενειών που βρήκαμε.

Το άθροισμα πρέπει να είναι ίσο με το συνολικό πλήθος, δηλαδή 500 οικογένειες.

Παίρνουμε: $250+75+125+50=500$.





4.5. Μέση τιμή - Διάμεσος



1. Τι ονομάζουμε και πώς βρίσκουμε την μέση τιμή παρατηρήσεων;

ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Η μέση τιμή μας δίνει πληροφορία για το σύνολο των παρατηρήσεων. Για να βρούμε τη μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων, προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών.

Ισχύει : $\text{μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των παρατηρήσεων}}{\text{πλήθος των παρατηρήσεων}}$

Π.χ. : Τα δέκα τμήματα του σχολείου έχουν: 21, 23, 25, 25, 19, 20, 22, 21, 20, 23 μαθητές. Πόσους μαθητές έχει κατά μέσο όρο κάθε τμήμα του σχολείου;

Για να βρούμε πόσους μαθητές έχει κατά μέσο όρο κάθε τμήμα, αρκεί να υπολογίσουμε την μέση τιμή των μαθητών κάθε τμήματος.

Πρώτα θα βρούμε το άθροισμα των τιμών: $21+23+25+25+19+20+22+21+20+23=219$ μαθητές.

Στη συνέχεια θα διαιρέσουμε με το πλήθος των τμημάτων, δηλαδή $\frac{219}{10} = 21,9$ μαθητές.

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή δεν ταυτίζεται απαραίτητα με κάποια τιμή από το δείγμα.

Στο παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να καταλάβουμε ότι κατά μέσο όρο κάθε τμήμα του σχολείου έχει περίπου 22 μαθητές. Αν το υπουργείο έθετε σαν όρο κάθε τμήμα να έχει 28 μαθητές, καταλαβαίνουμε ότι στο παραπάνω σχολείο θα έπρεπε να αυξηθούν οι μαθητές σε κάθε τμήμα ή να μειωθούν τα τμήματα.

2. Τι είναι η διάμεσος παρατηρήσεων;

Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, παίρνουμε ως διάμεσο τη μεσαία παρατήρηση.

Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο, παίρνουμε ως διάμεσο το μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Η διάμεσος γενικά μας δείχνει το μέσο των παρατηρήσεων.

Π.χ. : Έχουμε το δείγμα από θερμοκρασίες μιας πόλης σε μια βδομάδα: 7, 12, 10, 8, 9, 6, 3

Για να βρούμε την διάμεσο πρέπει πρώτα από όλα να βάλουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

Οπότε έχουμε: 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12. Παρατηρούμε ότι το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, οπότε θα πάρουμε ως διάμεσο τη μεσαία παρατήρηση, δηλαδή το 8.

Έχουμε το δείγμα από βαθμολογίες 8 μαθητών σε ένα μάθημα του πανεπιστημίου: 3, 4, 7, 7, 7, 6, 5, 7.

Για να βρούμε τη διάμεσο πρέπει πρώτα να βάλουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

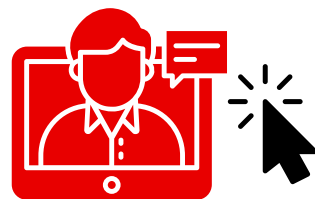
Οπότε έχουμε: 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 7. Παρατηρούμε ότι το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός, οπότε θα πάρουμε ως διάμεσο τον μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή $\frac{6+7}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$

Η διάμεσος μας δίνει πληροφορία για την μέση του δείγματος, αλλά δεν μας βοηθάει να βρούμε τι γίνεται με τις υπόλοιπες τιμές. Στο παραπάνω παράδειγμα βρήκαμε ότι η διάμεσος των βαθμολογιών είναι 6,5. Αν υπολογίσουμε τον μέσο όρο των βαθμολογιών θα έχουμε:

$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 7 + 7 + 7 = 45$, και $45 / 8 = 5,625$. Δηλαδή καταλαβαίνουμε ότι οι βαθμολογίες είναι αρκετά χαμηλές, αλλά η διάμεσος μας έδωσε ένα σχετικά μεγάλο αποτέλεσμα.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Στον πίνακα φαίνονται οι πόντοι που σκόραραν δύο ομάδες κατά τη διάρκεια του πρωταθλήματος. Να βρείτε τη διάμεσο και τη μέση τιμή των πόντων κάθε ομάδας. Στη συνέχεια να συγκρίνετε τη συνολική επίδοση των δύο ομάδων.

Αγωνιστική	Ομάδα Α	Ομάδα Β
1η	50	32
2η	47	67
3η	56	66
4η	49	30
5η	57	40
6η	59	51
7η	49	43

Η μέση τιμή της ομάδας Α είναι: $\frac{367}{7} = 52,43$

Η μέση τιμή της Β ομάδας είναι: $\frac{329}{7} = 47$

Για να βρούμε τη διάμεσο, βάζουμε τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά:

Ομάδα Α	47	49	49	50	56	57	59
Ομάδα Β	30	32	40	43	51	66	67

Άρα καταλαβαίνουμε ότι η διάμεσος της Α ομάδας είναι 50 και της Β ομάδας είναι 43.

Καλύτερη επίδοση έχει η ομάδα Α. Παρατηρούμε επίσης πως η διάμεσος και η μέση τιμή της ομάδας Α είναι κοντά μεταξύ τους, δηλαδή η ομάδα Α έχει πιο ομοιόμορφη «συμπεριφορά» στο σκοράρισμα των πόντων.

2. Ποιο είναι το άθροισμα των παρατηρήσεων σε δείγμα πλήθους 50 και μέσης τιμής 4;

Για να βρούμε το άθροισμα των παρατηρήσεων αρκεί να σκεφτούμε ότι :

$$\text{μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των παρατηρήσεων}}{\text{πλήθος των παρατηρήσεων}}$$

Οπότε παίρνουμε: $4 = \frac{\alpha}{50}$ δηλαδή $\alpha = 4 \times 50 = 200$. Άρα το άθροισμα είναι 200.

3. Ποιο είναι το πλήθος των παρατηρήσεων σε δείγμα με άθροισμα παρατηρήσεων 30 και μέση τιμή 0,1;

Για να βρούμε το πλήθος των παρατηρήσεων αρκεί να σκεφτούμε ότι:

$$\text{μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των παρατηρήσεων}}{\text{πλήθος των παρατηρήσεων}}$$

Οπότε παίρνουμε : $0,1 = \frac{30}{\pi}$ δηλαδή $\pi = \frac{30}{0,1} = 300$. Άρα το πλήθος είναι 300.

4. Να βρείτε ποια παρατήρηση λείπει από το δείγμα: 7 9 10 μ 14 15 αν γνωρίζουμε ότι:

(Παρατηρούμε ότι το δείγμα έχει άρτιο πλήθος παρατηρήσεων άρα η διάμεσος θα είναι η μέση τιμή των δύο μεσαίων όρων.)

- Το δείγμα έχει διάμεσο 10: Ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων πρέπει να είναι 10, άρα $(10+\mu)/2=10$, δηλαδή $\mu=10$.
- Το δείγμα έχει διάμεσο 12: Ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων πρέπει να είναι 12, άρα $(10+\mu)/2=12$, δηλαδή $\mu=14$.
- Το δείγμα έχει διάμεσο 10.5: Ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων πρέπει να είναι 10,5, άρα $(10+\mu)/2=10,5$, δηλαδή $\mu=11$.

5. Πόσο πρέπει να γράψει στο τελευταίο μάθημα ο Κώστας ώστε να έχει μέσο όρο αποφοίτησης τουλάχιστον 6, αν έχει γράψει ήδη: 4, 9, 3, 5;

Για να έχει μέσο όρο 6 θέλουμε: $\frac{4+9+3+5+\beta}{5} = 6$.

Δηλαδή :

$$\begin{aligned}4 + 9 + 3 + 5 + \beta &= 30 \\21 + \beta &= 30 \\\beta &= 30 - 21 = 9\end{aligned}$$

Δηλαδή ο Κώστας πρέπει να γράψει 9 στη τελευταία εξέταση.

Αν βρίσκαμε αποτέλεσμα πάνω από δέκα, θα καταλαβαίναμε ότι όποιον βαθμό κι αν γράψει ο Κώστας, δεν θα μπορούσε να έχει μέσο όρο πάνω από 6.



ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΚΔΟΣΗΣ:
Πρόδρομος Μιχαλάκης

© ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΛΥΣΑΡΙ | LISARI.GR
& Πρόδρομος Μιχαλάκης



Πανόρμου 14 & Σμύρνης,
12242, Αιγάλεω
τηλ.: 210 5982 614
e-mail: info@lisari.gr
www.lisari.gr

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται από τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και από τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η χωρίς γραπτή άδεια του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή οποιοδήποτε μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

