

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



Διαδραστικό Βοήθημα

Θεωρία - VideoΜαθήματα - Ασκήσεις

Κεφάλαιο 1ο - ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις- συμπληρώσεις)

A. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

B. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

1.2 Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα

A. Αλγεβρικές παραστάσεις-Μονώνυμα

B. Πράξεις με μονώνυμα

1.3 Πολυώνυμα - Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

A. Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση ρητών παραστάσεων

B. Πρόσθεση - Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

Κεφάλαιο 2ο - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 Η εξίσωση $ax + \beta = 0$

2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο

Κεφάλαιο 3ο - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Κεφάλαιο 5ο - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

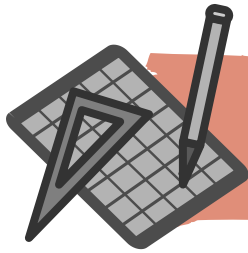
5.1 Σύνολα

5.2 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα

5.3 Έννοια της πιθανότητας



αλγεβρικές παραστάσεις



1.1 Α. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποια είναι τα σύνολα των αριθμών;

Πραγματικοί αριθμοί είναι όλοι οι αριθμοί που γνωρίζουμε και αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Ρητός λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί και $\nu \neq 0$.

Άρρητος λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.

2. Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός αριθμού;

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a είναι ο θετικός αριθμός που δείχνει την απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό a , από την αρχή του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.

Ισχύει επίσης ότι $|0| = 0$.

$$\text{π.χ.: } |4| = 4$$

$$|-6| = 6$$

3. Τι γνωρίζουμε για τις πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς;

• Πρόσθεση-Αφαίρεση

➔ Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα αυτό βάζουμε ως πρόσημο το κοινό τους πρόσημο.

$$3 + 7 = +10$$

$$-5 - 7 = -12$$

→ Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά αυτή βάζουμε πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

$$-11 + 6 = -5$$

$$-7 + 10 = +3$$

→ Η πράξη της αφαίρεσης γίνεται με τη βοήθεια της πρόσθεσης. Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου: $a - b = a + (-b)$

$$9 - 12 = 9 + (-12) = -3$$

• Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση

→ Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο + .

$$3 \cdot 7 = +21$$

$$(-4) \cdot (-2) = +8$$

→ Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο - .

$$4 \cdot (-2) = -8$$

$$-3 \cdot 2 = -6$$

→ Η πράξη της διαίρεσης γίνεται με τη βοήθεια του πολλαπλασιασμού.

→ Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών ($a : b$, ή με $b \neq 0$), πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$3 : 9 = 3 \cdot \frac{1}{9}$$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητες των πράξεων;

Αντιμεταθετική Ιδιότητα:	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική Ιδιότητα:	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$ $\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$ $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική Ιδιότητα:	$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$	

Επίσης ισχύει: $\alpha \cdot 0 = 0$

Αν $\alpha\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$

5. Πότε δύο αριθμοί ονομάζονται αντίθετοι;

Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν λέγονται αντίθετοι.

$$5 + (-5) = 0$$

6. Πότε δύο αριθμοί ονομάζονται αντίστροφοι;

Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα λέγονται αντίστροφοι.

$$5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$$



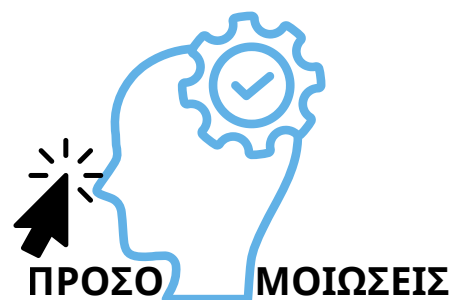
Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$\begin{aligned} & -1 + \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\ & -1 + \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{3} - \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ & -1 + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ & -\frac{2}{8} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

2. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$\frac{\frac{3}{5} - 1}{3 - \frac{8}{10}}$$



$$\frac{\frac{3}{5} - \frac{5}{5}}{\frac{30}{10} - \frac{8}{10}} = \frac{-\frac{2}{5}}{\frac{22}{10}} = \frac{-2 \cdot 10}{5 \cdot 22} = \frac{-2}{11} = -\frac{2}{11}$$

3. Αν γνωρίζουμε ότι $\alpha + \beta = -3$, να υπολογιστεί η παράσταση:

Χρησιμοποιήσαμε:

Επιμεριστική ιδιότητα

Αντιμεταθετική ιδιότητα

Αναγωγή ομοίων όρων

$$\alpha + (\beta - 2) - 2(\alpha + 1) + (2 - 2\beta)$$

$$\alpha + \beta - 2 - 2\alpha - 2 + 2 - 2\beta =$$

$$\alpha - 2\alpha + \beta - 2\beta - 2 - 2 + 2 =$$

$$-\alpha - \beta - 2 =$$

$$-(\alpha + \beta) - 2 =$$

$$-(-3) - 2 =$$

$$3 - 2 =$$

Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

1. Τι είναι δύναμη αριθμού;

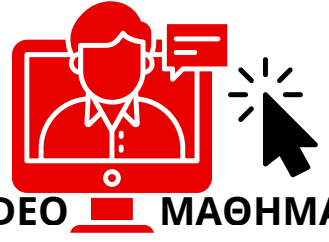
Η δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό a και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $n \geq 2$ συμβολίζεται με a^n και είναι το γινόμενο n παραγόντων ίσων με τον αριθμό a .

Δηλαδή $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n φορές)

Επίσης ισχύει $a^1 = a$ και $a^0 = 1$, $a \neq 0$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων;

- | | | |
|----------|--|---|
| 1 | $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ | π.χ. : $2^3 \cdot 2^9 = 2^{11}$ |
| 2 | $a^n : a^m = a^{n-m}$ | π.χ. : $3^4 : 3^2 = 3^2$ |
| 3 | $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ | π.χ. : $(x \cdot 3)^2 = x^2 \cdot 3^2$ |
| 4 | $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ | π.χ. : $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$ |
| 5 | $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ | π.χ. : $(4^6)^2 = 4^{6 \cdot 2} = 4^{12}$ |
| 6 | $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ | π.χ. : $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$ |



1. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$\frac{3^{-2} \cdot 3^3 \cdot 2^3}{(3^3 \cdot 4^2)^2}$$

$$\frac{3^{-2} \cdot 3^3 \cdot 2^3}{(3^3 \cdot 4^2)^2} =$$

$$\frac{3^{-2+3} \cdot 2^3}{3^{3 \cdot 2} \cdot 4^{2 \cdot 2}} =$$

$$\frac{3^1 \cdot 2^3}{3^6 \cdot 4^4} =$$

$$\frac{3 \cdot 2^3}{3^6 \cdot (2^2)^4} =$$

$$\frac{3 \cdot 2^3}{3^6 \cdot 2^8} =$$

$$3^{1-6} \cdot 2^{3-8} =$$

$$3^{-5} \cdot 2^{-5} =$$

$$\frac{1}{3^5 \cdot 2^5} =$$

$$\frac{1}{6^5}$$

2. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$A = 5^{-2} \cdot 5^3 - 7(2^4 - 4^2) + 3^2 - 3$$

Θυμόμαστε την προτεραιότητα των πράξεων:

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

$$5^{-2} \cdot 5^3 - 7(2^4 - 4^2) - 3^2 + 3 =$$

$$5^{-2+3} - 7(16 - 16) - 9 + 3 =$$

$$5^1 - 7(0) - 6 =$$

$$5 - 0 - 6 =$$

$$5 - 6 =$$

$$-1$$

3. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = x \cdot (x \cdot y^3)^2 : (x^4 \cdot y)^{-1}$ αν γνωρίζουμε ότι $x \cdot y = -1$.

$$x \cdot (x \cdot y^3)^2 : (x^4 \cdot y)^{-1} =$$

$$x \cdot x^2 \cdot y^6 : x^{-4} \cdot y^{-1} =$$

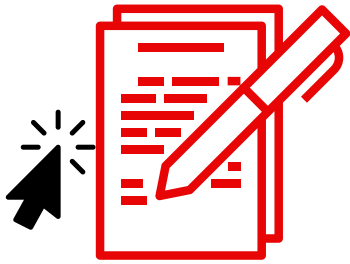
$$x^3 \cdot y^6 \cdot x^4 \cdot y^1 =$$

$$x^7 \cdot y^7 =$$

$$(x \cdot y)^7 =$$

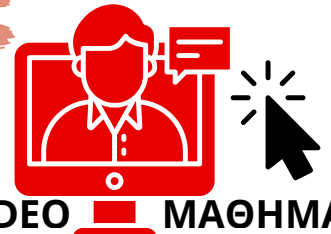
$$(-1)^7 =$$

$$-1$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού πραγματικού αριθμού x;

Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x.

Ορίζουμε ότι $\sqrt{0} = 0$.

Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$(\sqrt{x})^2 = x, \quad x \geq 0$$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας;

- Το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών δύο μη αρνητικών αριθμών ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους.

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

- Το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών δύο μη αρνητικών αριθμών ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την παράσταση $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα παίρνουμε:

$$7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (7 - 2 + 5)\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

2. Να απλοποιήσετε την παράσταση $5\sqrt{2} - 2\sqrt{50} + \sqrt{18} - 4\sqrt{8}$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των ριζών παίρνουμε:

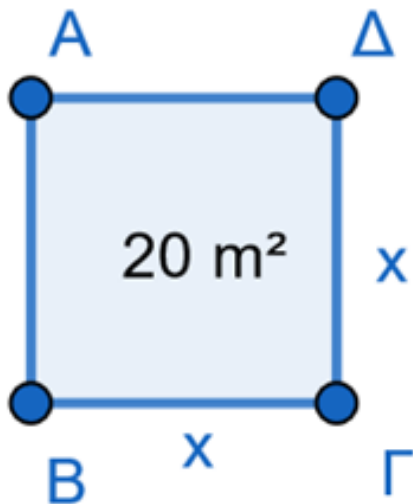
$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} - 2\sqrt{50} + \sqrt{18} - 4\sqrt{8} &= \\ 5\sqrt{2} - 2\sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} - 4\sqrt{4 \cdot 2} &= \\ 5\sqrt{2} - 2 \cdot 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4 \cdot 2\sqrt{2} &= \\ 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2} &= \\ (5 - 10 + 3 - 8)\sqrt{2} &= \\ -10\sqrt{2} & \end{aligned}$$

3. Να μετατραπεί το κλάσμα $\frac{2}{\sqrt{2}}$ σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή:

Θα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

4. Τι πλευρά έχει ένα τετράγωνο με εμβαδόν 20 m^2 ;



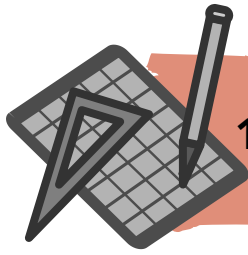
Γνωρίζουμε ότι: $E_{\text{τετρ.}} = x \cdot x$

$$x^2 = 20$$

$$x = \sqrt{20}$$

$$x = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5} \text{ m}$$





1.2 Α. Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε αριθμητική παράσταση;

Οι μαθηματικές εκφράσεις που περιέχουν μόνο αριθμούς ονομάζονται αριθμητικές παραστάσεις.

2. Τι ονομάζουμε αλγεβρική παράσταση;

Οι μαθηματικές εκφράσεις οι οποίες, εκτός από αριθμούς, περιέχουν και μεταβλητές λέγονται αλγεβρικές παραστάσεις.

3. Ποια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ακέραια;

Μια αλγεβρική παράσταση λέγεται ακέραια, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

$$7x^5y^6, 3ax + 2x, \frac{3}{5}x + \sqrt{2} \cdot z$$

4. Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης;

Αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης ονομάζουμε τον αριθμό που θα προκύψει αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις.

5. Τι ονομάζουμε μονώνυμο;

Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται μονώνυμα.

$$3x, 2y^6x, \frac{1}{2}(xy)^2$$

6. Ποια είναι τα μέρη ενός μονωνύμου;

Σε κάθε μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται συντελεστής του, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται κύριο μέρος.

$$\text{συντελεστής} \rightarrow 7 \cdot x^5 \leftarrow \text{κύριο μέρος}$$

7. Τι ονομάζουμε βαθμό μονωνύμου;

Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται βαθμός του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή. Βαθμός του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του ονομάζουμε το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

$$x^4 y^3 \rightarrow \text{βαθμός ως προς } x : 4, \text{ βαθμός ως προς } y : 3, \text{ βαθμός πολυωνύμου} : 4 + 3 = 7$$

8. Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια, ίσα και αντίθετα;

Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται όμοια. Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται ίσα ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται αντίθετα.

$$3x \text{ και } 7x : \text{όμοια}$$

$$2y^2 \text{ και } (1+1)y^2 : \text{ίσα}$$

$$5z^3 x^2 \text{ και } -5z^3 x^2 : \text{αντίθετα}$$

9. Είναι οι αριθμοί μονώνυμα;

Θεωρούμε τους αριθμούς μονώνυμα και τα ονομάζουμε σταθερά μονώνυμα. Ο αριθμός 0 λέγεται μηδενικό μονώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να γράψετε το μονώνυμο που έχει κύριο μέρος x^6y και συντελεστή $\frac{5}{8}$. Έπειτα να βρείτε ένα όμοιο και το αντίθετό του μονώνυμο.

Το αρχικό μονώνυμο είναι $\frac{5}{8}x^6y$

Ένα όμοιο του είναι $2x^6y$

Το αντίθετό του είναι $-\frac{5}{8}x^6y$

2. Ποια είναι η τιμή της παράστασης για $a=4$ και $b=-2$;

$$A = a^2 - b + a \cdot b$$

$$4^2 - (-2) + 4 \cdot (-2) =$$

$$16 + 2 - 8 =$$

$$10$$

3. Να εκφράσετε ως μονώνυμο το εμβαδόν του παρακάτω ορθογωνίου:



$$E = \text{βάση} \cdot \text{ύψος} = 2x \cdot x = 2x^2$$

B. Πράξεις με μονώνυμα

1. Τι γνωρίζουμε για τις πράξεις με μονώνυμα;

Στις πράξεις που γίνονται μεταξύ μονωνύμων ισχύουν όλες οι ιδιότητες των πράξεων που ισχύουν και στους αριθμούς.

Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

$$3a^3 + 7a^3 = 10a^3$$

Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

$$6x^3 \cdot 2x^2 \cdot 3y^3 = 36x^5y^3$$

Η διαίρεση μονωνύμων γίνεται όπως και η διαίρεση αριθμών.

$$(20x^5y^3) : (4xyz) = \frac{20x^5y^3}{4xyz} = \frac{5x^4y^2}{z}$$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α. $6a^3 - 5a + 2a^3 + 8a = 8a^3 - 3a$

β. $3z^5y^2 \cdot 2zy^2 \cdot (-3)x^5y = -18x^5y^5z^6$



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

2. Στη φυσική μαθαίνουμε ότι η ηλεκτρική δύναμη ανάμεσα σε δύο φορτία q_1, q_2 τα οποία βρίσκονται σε απόσταση r , δίνεται από την σχέση: $F_c = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$.

Πόσο πρέπει να αλλάξει η απόσταση ώστε να τετραπλασιαστεί η ηλεκτρική δύναμη ανάμεσα σε δύο φορτία;

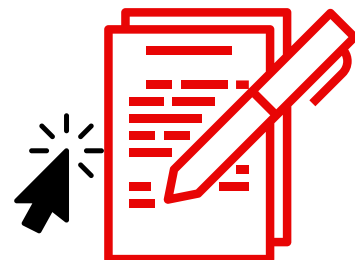
Θέλουμε $F' = 2F_c$

$$\frac{F'}{F_c} = \frac{K \frac{q_2 q_1}{r_1^2}}{K \frac{q_2 q_1}{r^2}} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{r^2}{r_1^2} = \frac{1}{2}$$

$$2r^2 = r_1^2$$

$$r_1 = \sqrt{2}r$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

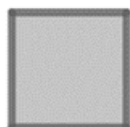
3. Πόσο θα αλλάξει το εμβαδόν ενός τετραγώνου όταν τετραπλασιάσουμε την περίμετρό του;

Η αρχική πλευρά του τετραγώνου είναι x . Η περίμετρος αρχικά είναι $4x$ και το εμβαδόν x^2 .

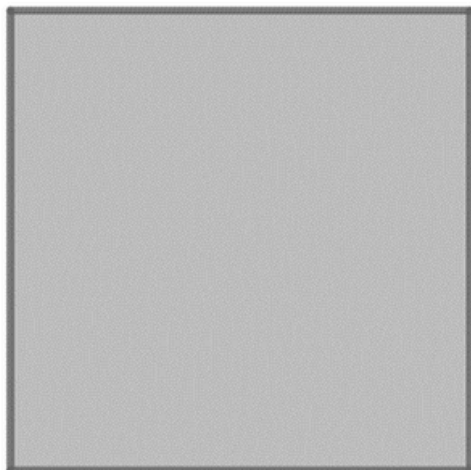
Η νέα περίμετρος είναι $4 \cdot 4x = 16x$.

Δηλαδή η νέα πλευρά είναι $4x$. Το νέο εμβαδόν είναι $4x \cdot 4x = 16x^2$.

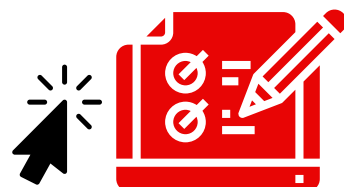
Δηλαδή το εμβαδόν δεκαεξαπλασιάστηκε!



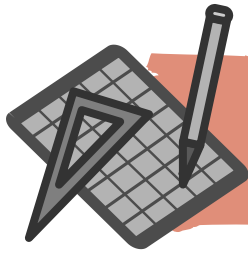
x



$4x$



ONLINE TEST



1.3 Πολυώνυμα- Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε πολυώνυμο;

Το άθροισμα όχι όμοιων μονωνύμων είναι μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται πολυώνυμο.

$$x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 9$$

2. Τι είναι όρος ενός πολυωνύμου;

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται όρος του πολυωνύμου.

3. Τι είναι βαθμός πολυωνύμου;

Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του. Για να βρούμε το βαθμό ενός πολυωνύμου εύκολα βοηθάει να γράφουμε το πολυώνυμο με τις δυνάμεις σε φθίνουσα σειρά.

4. Τι σχέση έχουν τα μονώνυμα με τα πολυώνυμα;

Δεχόμαστε ότι κάθε μονώνυμο και κάθε αριθμός είναι και πολυώνυμο. Κάθε αριθμός λέγεται σταθερό πολυώνυμο. Ο αριθμός μηδέν λέγεται μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό, ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

5. Πότε δυο πολυώνυμα λέγονται ίσα;

Δύο πολυώνυμα είναι ίσα, όταν έχουν όρους ίσα μονώνυμα.

6. Πώς κάνουμε πρόσθεση και αφαίρεση με πολυώνυμα;

Μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε πολυώνυμα χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

$$5x^2 - 6x + 7yx - (3x^2 - 4x + 3) =$$

$$5x^2 - 6x + 7yx - 3x^2 + 4x - 3 =$$

$$2x^2 - 2x + 7yx - 3$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^2 - 4x^3 + x^2 - 2(x+1) - 3$ σε φθίνουσα σειρά αφού κάνετε όλες πράξεις γίνονται. Στη συνέχεια να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ώστε το πολυώνυμο $K(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ να είναι ίσο με το $P(x)$.

$$P(x) = 2x^2 - 4x^3 + x^2 - 2(x+1) - 3 =$$

$$2x^2 - 4x^3 + x^2 - 2x - 2 - 3 =$$

$$-4x^3 + 3x^2 - 2x - 5$$

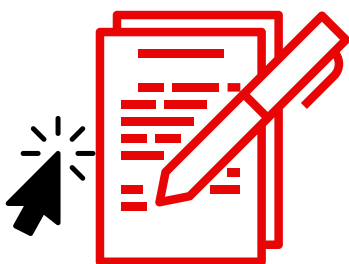
Για να ίσα τα πολυώνυμα $P(x)$ και $K(x)$ πρέπει να έχουν όρους ίσα μονώνυμα οπότε παίρνουμε:

$$\alpha = -4$$

$$\beta = 3$$

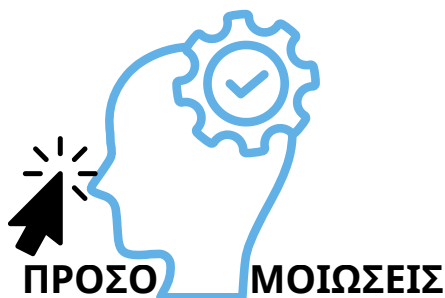
$$\gamma = -2$$

$$\delta = -5$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

2. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8$. Να υπολογίσετε το $P(2x)$ και $P(-x)$.



$$\begin{aligned}P(2x) &= 2(2x)^3 - 4(2x)^2 - 8 \\&= 2(8x^3) - 4(4x^2) - 8 \\&= 16x^3 - 16x^2 - 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(-x) &= 2(-x)^3 - 4(-x)^2 - 8 \\&= -2x^3 - 4x^2 - 8\end{aligned}$$

3. Στην φυσική μαθαίνουμε ότι η μετατόπιση ενός σώματος που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα σε σχέση με τον χρόνο δίνεται από την σχέση: $x(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

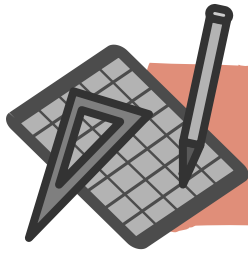
Ειδικά το κινητό στο εργαστήριο κινείται με την εξίσωση: $x(t) = 10 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot t^2$

Πόσα μέτρα έχει διανύσει σε 5 δευτερόλεπτα και πόσα σε 10 δευτερόλεπτα;

$$\begin{aligned}x(5) &= 10 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 \\&= 50 + 2 \cdot 25 = 50 + 50 \\&= 100\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(10) &= 10 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^2 \\&= 100 + 2 \cdot 100 = 100 + 200 \\&= 300\end{aligned}$$





1.4 Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πώς πολλαπλασιάζουμε μονώνυμο με πολυώνυμο;

Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

2. Πώς πολλαπλασιάζουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο;

Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α. $4y(2y - 2)$

β. $(5x + 2x^2) \cdot (2 - x)$



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

Μπορούμε να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό είτε κάθετα είτε οριζόντια.

α. $4y(2y - 2) = 4y \cdot 2y - 4y \cdot 2 = 8y^2 - 8y$

ή

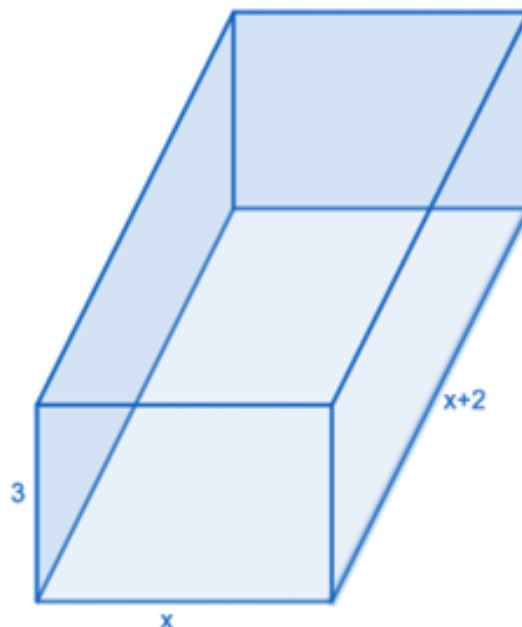
$$\begin{array}{r} 2y - 2 \\ \times 4y \\ \hline 8y^2 - 8y \end{array}$$

$$\begin{aligned}\beta. (5x + 2x^2) \cdot (2 - x) &= 5x \cdot 2 - 5x \cdot x + 2x^2 \cdot 2 - 2x^2 \cdot x \\ &= 10x - 5x^2 + 4x^2 - 2x^3 \\ &= -2x^3 - x^2 + 10x\end{aligned}$$

2. Ποιος είναι ο όγκος του παρακάτω ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου;

Θυμόμαστε ότι για να βρούμε τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τις τρεις διαστάσεις του. Οπότε έχουμε:

$$V = 3 \cdot x \cdot (x + 1) = 3x^2 + 3x$$



3. Αν $P(x) = x^2 + 9x - 2$ και $Q(x) = x^3 - 1$ να βρεθεί το πολυώνυμο $K(x) = P(x) \cdot Q(x)$ και στη συνέχεια να υπολογιστεί το $K(-2)$.

$$\begin{aligned}K(x) &= P(x) \cdot Q(x) = (x^2 + 9x - 2)(x^3 - 1) \\ &= x^2 \cdot x^3 - x^2 + 9x \cdot x^3 - 9x - 2x^3 + 2 \\ &= x^5 - x^2 + 9x^4 - 9x - 2x^3 + 2 \\ &= x^5 + 9x^4 - 2x^3 - x^2 - 9x + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K(-2) &= (-2)^5 + 9(-2)^4 - 2(-2)^3 - (-2)^2 - 9(-2) + 2 \\ &= -32 + 9 \cdot 16 - 2(-8) - (4) + 18 + 2 \\ &= -32 + 144 + 16 - 4 + 18 + 2 \\ &= 144\end{aligned}$$





1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε ταυτότητα;

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

2. Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

• **Τετράγωνο Αθροίσματος:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

➔ **Απόδειξη:** $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

• **Τετράγωνο Διαφοράς:** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

➔ **Απόδειξη:** $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

• **Κύβος Αθροίσματος:** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

➔ **Απόδειξη:**
$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

• **Κύβος Διαφοράς:** $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

➔ **Απόδειξη:**
$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

• Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά: $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

➔ Απόδειξη: $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να κάνετε τη πράξη: $(\alpha + 2)^2 - (1 - 2\alpha)^2$

$$\begin{aligned}(\alpha + 2)^2 - (1 - 2\alpha)^2 &= \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 2 + 2^2 - (1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\alpha + (2\alpha)^2) \\&= \alpha^2 + 4\alpha + 4 - (1 - 4\alpha + 4\alpha^2) \\&= \alpha^2 + 4\alpha + 4 - 1 + 4\alpha - 4\alpha^2 \\&= -3\alpha^2 + 8\alpha + 3\end{aligned}$$

2. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{2}{1 + \sqrt{3}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

Για να κάνουμε τον άρρητο παρονομαστή ρητό, θα πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με την ποσότητα $1 - \sqrt{3}$ γιατί $(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1^2 - \sqrt{3}^2 = 1 - 3 = -2$.

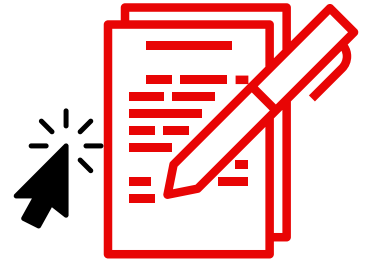
$$\text{Οπότε παίρνουμε: } \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$$

3. Να αποδείξετε ότι $(\beta + \frac{1}{\beta})^2 - (\beta - \frac{1}{\beta})^2 = 4$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(1,897 + \frac{1}{1,897})^2 - (1,897 - \frac{1}{1,897})^2$.

$$\begin{aligned}(\beta + \frac{1}{\beta})^2 - (\beta - \frac{1}{\beta})^2 &= \beta^2 + 2\beta \frac{1}{\beta} + (\frac{1}{\beta})^2 - (\beta^2 - 2\beta \frac{1}{\beta} + (\frac{1}{\beta})^2) \\&= \beta^2 + 2 + \frac{1}{\beta^2} - (\beta^2 - 2 + \frac{1}{\beta^2}) \\&= \beta^2 + 2 + \frac{1}{\beta^2} - \beta^2 + 2 - \frac{1}{\beta^2} \\&= 4\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης $(1,897 + \frac{1}{1,897})^2 - (1,897 - \frac{1}{1,897})^2$

αρκεί να σκεφτούμε ότι το 1,897 είναι το β οπότε: $(1,897 + \frac{1}{1,897})^2 - (1,897 - \frac{1}{1,897})^2 = 4$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

4. Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα της ταυτότητας: $(\alpha + \beta + \gamma)^2$.

Μπορούμε να σκεφτούμε με δύο τρόπους:

1ος τρόπος:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) \\&= \alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\beta + \beta^2 + \beta\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2 \\&= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma\end{aligned}$$

2ος τρόπος:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta + \gamma)^2 &= ((\alpha + \beta) + \gamma)^2 \\&= (\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta)\gamma + \gamma^2 \\&= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 \\&= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma\end{aligned}$$





1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε παραγοντοποίηση;

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

2. Χαρακτηριστικές Περιπτώσεις Παραγοντοποίησης

- **Κοινός Παράγοντας:** Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων αξιοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\text{π.χ. } 3\alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta = \alpha\beta(3\beta - 2\alpha + 1)$$

- **Κοινός Παράγοντας κατά ομάδες - Ομαδοποίηση:** Σε κάποιες παραστάσεις δεν υπάρχει ένας κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους αλλά υπάρχει κοινός παράγοντας ανάμεσα σε κάποιους όρους. Σε αυτή την περίπτωση κάνουμε ομαδοποίηση, δηλαδή «ξεχωρίζουμε» τους όρους της παράστασης με τον ίδιο κοινό παράγοντα.

$$\text{π.χ. } 2\alpha^3 - 10\alpha^2 + \alpha - 5 = 2\alpha^2(\alpha - 5) + 1(\alpha - 5) = (2\alpha^2 + 1)(\alpha - 5)$$

- **Διαφορά Τετραγώνων:** Αξιοποιώντας την ταυτότητα $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ καταλαβαίνουμε ότι μπορούμε να γράψουμε κάθε διαφορά τετραγώνων σε μορφή γινομένου. Για να σχηματίσουμε διαφορά τετραγώνων γράφουμε κάθε όρο της παράστασης σε μορφή τέλει τετραγώνου.

$$\text{π.χ. } 9 - 4\beta^2 = 3^2 - (2\beta)^2 = (3 - 2\beta)(3 + 2\beta)$$

• **Ανάπτυγμα Τετραγώνου:** Αξιοποιώντας τις ταυτότητες $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ και $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι ανάπτυγμα τετραγώνου (τέλειο τετράγωνο).

π.χ. $4κ^2 + 12κλ + 9λ^2 = (2κ)^2 + 2 \cdot 2κ \cdot 3λ + (3λ)^2 = (2κ + 3λ)^2$



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

i.	$4(a-b) - 3γ(β-a)$
ii.	$x^2 + 3xy + y^2$
iii.	$(2a-1)^2 - 64$
iv.	$-a^2 - 2a - 1$

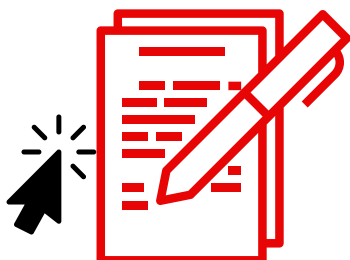
i. $4(a-b) - 3γ(β-a) = 4(a-b) + 3γ(a-b) = (a-b)(4+3γ)$

ii. $x^2 + 3xy + 2y^2 = x^2 + xy + 2xy + 2y^2 = x(x+y) + 2y(x+y) = (x+y)(x+2y)$

iii. $(2a-1)^2 - 64 = (2a-1)^2 - 8^2 = (2a-1+8)(2a-1-8) = (2a+7)(2a-9)$

iv. $-a^2 - 2a - 1 = -(a^2 + 2a + 1) = -(a+1)^2 = -(a+1)(a+1)$

2. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $2x^2 - 4x$ και στη συνέχεια να την λύσετε $=0$.



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

$$2x^2 - 4x = 2x(x-2)$$

και $2x^2 - 4x = 0$

$$2x(x-2) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{ή} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

3. Να υπολογιστεί η παράσταση $99 \cdot 101$ χωρίς χρήση αριθμομηχανής.

Για να υπολογίσουμε την παράσταση $99 \cdot 101$ αρκεί να σκεφτούμε ότι $99 = 100 - 1$ και $101 = 100 + 1$

Οπότε έχουμε: $99 \cdot 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1^2 = 10.000 - 1 = 9.999$

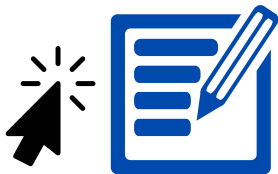




1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. Ακέραιων Αλγεβρικών Παραστάσεων

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

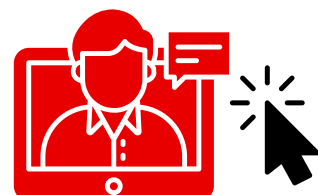
Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον μικρότερο από τους εκθέτες του.



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων $9a^3b\gamma^2$ και $6a\beta^2\gamma^3$.

Οι συντελεστές των μονωνύμων είναι 9 και 6 άρα θα έχουμε $\text{Ε.Κ.Π.}(9,6)=18$

και $\text{Ε.Κ.Π.}(9a^3b\gamma^2, 6a\beta^2\gamma^3) = 18a^3\beta^2\gamma^3$

2. Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων $6a^2 - 3a$ και $3a^3 - 3a$.

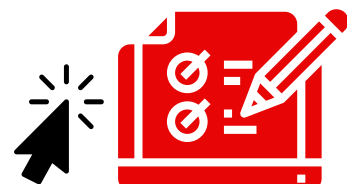
Πρώτα θα αναλύσουμε τα πολυώνυμα σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

$$6a^2 - 3a = 3a(2a - 1)$$

$$3a^3 - 3a = 3a(a^2 - 1) = 3a(a - 1)(a + 1)$$

Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των αριθμητικών παραγόντων $\text{Ε.Κ.Π.}(3,3)=3$.

Τελικά παίρνουμε $\text{Ε.Κ.Π.}(6a^2 - 3a, 3a^3 - 3a) = 3a(2a - 1)(a - 1)(a + 1)$



ONLINE TEST



1.9 Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε ρητή αλγεβρική παράσταση;

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται ρητή αλγεβρική παράσταση ή απλώς ρητή παράσταση. Οι μεταβλητές μιας ρητής παράστασης δεν μπορούν να πάρουν τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή της, αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

2. Πώς απλοποιούμε μια ρητή αλγεβρική παράσταση;

Παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους της και διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες των όρων της.

$$\text{π.χ. } \frac{a^2 - 3a}{a^2 - 9} = \frac{a(a-3)}{(a-3)(a+3)} = \frac{a}{a+3}$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η αλγεβρική παράσταση $\frac{12x - 6}{9x^2 - 4x}$

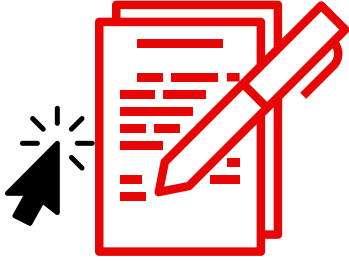
Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει ο παρονομαστής να είναι διαφορετικός του μηδέν. Οπότε θα ψάξουμε αρχικά ποιες τιμές του x μηδενίζουν τον παρονομαστή.

$$9x^2 - 4x = 0$$

$$x(9x - 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ή} \quad x = \frac{4}{9}$$

Η παράσταση δεν ορίζεται για $x = 0$ και $x = \frac{4}{9}$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

2. Να απλοποιήσετε την ρητή αλγεβρική παράσταση $\frac{a^3 - 2a^2 + a}{a^3 - a}$

$$\begin{aligned}\frac{a^3 - 2a^2 + a}{a^3 - a} &= \frac{a(a^2 - 2a + 1)}{a(a^2 - 1)} \\ &= \frac{a(a-1)^2}{a(a^2 - 1^2)} \\ &= \frac{a(a-1)(a-1)}{a(a-1)(a+1)} \\ &= \frac{a-1}{a+1}\end{aligned}$$



ONLINE TEST



1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

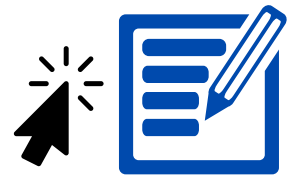
Α. Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση ρητών παραστάσεων

1. Πώς κάνουμε πολλαπλασιασμό ρητών παραστάσεων;

Για να πολλαπλασιάσουμε ρητές παραστάσεις χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες:

$$1. \alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$$

$$2. \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Πώς κάνουμε διαίρεση ρητών παραστάσεων;

Για να διαιρέσουμε δύο ρητές παραστάσεις χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα:

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Επίσης για τα σύνθετα κλάσματα ισχύει:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$



1. Να βρείτε το γινόμενο $6a \cdot \frac{-3a}{9a^3}$

$$6a \cdot \frac{-3a}{9a^3} = \frac{6a \cdot (-3a)}{9a^3} = \frac{-18a^2}{9a^3} = -\frac{2}{a}$$

2. Να βρείτε το γινόμενο $\frac{a+2}{\beta} \cdot \frac{3\beta+a\beta}{2a+4}$

$$\frac{a+2}{\beta} \cdot \frac{3\beta+a\beta}{2a+4} = \frac{a+2}{\beta} \cdot \frac{\beta(3+a)}{2(a+2)} = \frac{3+a}{2}$$

3. Να κάνετε την διαίρεση $\frac{(κ+λ)^2}{κ} : \frac{κ}{κ^2-λ^2}$

$$\frac{(κ+λ)^2}{κ} : \frac{κ}{κ^2-λ^2} = \frac{(κ+λ)^2}{κ} \cdot \frac{κ}{κ^2-λ^2} = \frac{(κ+λ)(κ+λ)}{κ} \cdot \frac{κ}{(κ-λ)(κ+λ)} = \frac{κ+λ}{κ-λ}$$

4. Να απλοποιήσετε το κλάσμα

$$\frac{\frac{x-1}{x^2-4}}{\frac{x^2-1}{x+2}}$$

$$\frac{\frac{x-1}{x^2-4}}{\frac{x^2-1}{x+2}} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x^2-4)(x^2-1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x-2)(x+1)}$$



B. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

1. Πώς κάνουμε πρόσθεση (και αφαίρεση) ρητών αλγεβρικών παραστάσεων;

Χρησιμοποιούμε όλους τους κανόνες που έχουν και οι πράξεις με τα κλάσματα. Πρέπει να κάνουμε πρόσθεση και αφαίρεση σε ρητές παραστάσεις με ίδιους παρονομαστές!

2. Πώς κάνουμε ομώνυμες ρητές αλγεβρικές παραστάσεις;

- I. Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.
- II. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- III. Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.
- IV. Εκτελούμε τις πράξεις και τις δυνατές απλοποιήσεις.

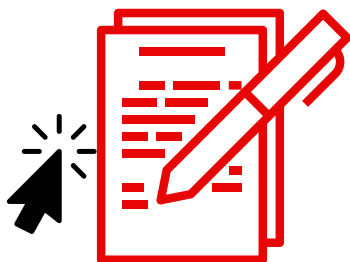
$$\frac{1}{a-\beta} + \frac{1}{a+\beta} - \frac{1}{a^2-\beta^2} =$$

$$\frac{1}{a-\beta} + \frac{1}{a+\beta} - \frac{1}{(a-\beta)(a+\beta)} =$$

π.χ.

$$\frac{a+\beta}{(a-\beta)(a+\beta)} + \frac{a-\beta}{(a-\beta)(a+\beta)} - \frac{1}{(a-\beta)(a+\beta)} =$$

$$\frac{2a-1}{(a-\beta)(a+\beta)}$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\Gamma = \frac{1}{A} + B$ αν $A = \frac{a-2}{a-1}$, $B = \frac{(a-3)(a-1)}{a-2}$

$$\Gamma = \frac{1}{A} + B =$$

$$\frac{a-1}{a-2} + \frac{(a-3)(a-1)}{a-2} =$$

$$\frac{(a-1) + (a-3)(a-1)}{a-2} =$$

$$\frac{(a-1)(a-3+1)}{a-2} =$$

$$\frac{(a-1)(a-2)}{a-2} =$$

$$a-1$$

2. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2\kappa + 1}{\kappa + 1} + \frac{\kappa - 2}{(\kappa - 3)(\kappa + 1)} = \frac{2\kappa}{\kappa - 3}$

$$\begin{aligned}\frac{2\kappa + 1}{\kappa + 1} + \frac{\kappa - 2}{(\kappa - 3)(\kappa + 1)} &= \frac{2\kappa}{\kappa - 3} \\ \frac{(2\kappa + 1)(\kappa - 3)}{(\kappa + 1)(\kappa - 3)} + \frac{\kappa - 2}{(\kappa - 3)(\kappa + 1)} &= \frac{2\kappa(\kappa + 1)}{(\kappa - 3)(\kappa + 1)} \\ (2\kappa + 1)(\kappa - 3) + \kappa - 2 &= 2\kappa(\kappa + 1) \\ 2\kappa^2 - 6\kappa + \kappa - 3 + \kappa - 2 &= 2\kappa^2 + 2\kappa \\ -2\kappa - 6\kappa + \kappa + \kappa &= 3 + 2 \\ -6\kappa &= 5 \\ \kappa &= -\frac{5}{6}\end{aligned}$$



2

εξισώσεις - ανισώσεις



2.1 Η εξίσωση $ax + \beta = 0$

1. Ποια εξίσωση ονομάζεται πρώτου βαθμού ή πρωτοβάθμια;

Η εξίσωση στην οποία υπάρχει ένας άγνωστος και ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός ένα.

π.χ. $3x + 5 = 0$
 $\frac{x}{2} - 6 = \sqrt{2}$
 $3(x - 2) + 3x = 2x - 7$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Τι γνωρίζουμε για τις πρωτοβάθμιες εξισώσεις;

Ο αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση λέγεται ρίζα ή λύση της εξίσωσης.

Μια εξίσωση που δεν έχει λύση λέγεται αδύνατη.

Μια εξίσωση που επαληθεύεται για κάθε τιμή του αγνώστου λέγεται αόριστη ή ταυτότητα.

Για κάθε εξίσωση της μορφής $ax + \beta = 0$ ισχύει:

- Αν $a \neq 0$, τότε η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει μοναδική λύση $x = -\frac{\beta}{a}$
- Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση $ax + \beta = 0$ γράφεται $0x = -\beta$ και:
 - αν $\beta \neq 0$, δεν έχει λύση (αδύνατη), ενώ
 - αν $\beta = 0$, κάθε αριθμός είναι λύση της (ταυτότητα ή αόριστη)



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{y+1}{2} + y = \frac{2y+3}{3} + 2$

α. Πρώτα θα κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών. Δηλαδή θα πάρουμε μια εξίσωση χωρίς παρονομαστές πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) των παρονομαστών.

β. Θα διώξουμε τις παρενθέσεις χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα

γ. Θα χωρίσουμε γνωστούς από αγνώστους.

δ. Θα κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

ε. Θα διαιρέσουμε με τον συντελεστή του αγνώστου.

$$\begin{aligned}\frac{y+1}{2} + y &= \frac{2y+3}{3} + 2 \\ 6 \cdot \frac{y+1}{2} + 6y &= 6 \cdot \frac{2y+3}{3} + 6 \cdot 2 \\ 3(y+1) + 6y &= 2(2y+3) + 12 \\ 3y + 3 + 6y &= 4y + 6 + 12 \\ 3y + 6y - 4y &= 12 + 6 - 3 \\ 5y &= 15 \\ y &= \frac{15}{5} \\ y &= 3\end{aligned}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $4(3-a) + 8(a-1) = 4a + 10$

$$\begin{aligned}4(3-a) + 8(a-1) &= 4a + 10 \\ 4 \cdot 3 - 4a + 8a - 8 \cdot 1 &= 4a + 10 \\ 12 - 4a + 8a - 8 &= 4a + 10 \\ -4a + 8a - 4a &= 10 - 12 + 8 \\ 0 \cdot a &= 6 \\ 0 &= 6\end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση δεν μπορεί να λυθεί, είναι αδύνατη.

3. Να λυθεί η εξίσωση $6(x+2) - 4 = 4x + 2(x+4)$

$$\begin{aligned}6(x+2) - 4 &= 4x + 2(x+4) \\ 6x + 6 \cdot 2 - 4 &= 4x + 2x + 2 \cdot 4 \\ 6x + 12 - 4 &= 4x + 2x + 8 \\ 6x - 2x - 4x &= -12 + 4 + 8 \\ 0 \cdot x &= 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει για κάθε τιμή του x , συνεπώς είναι αόριστη ή ταυτότητα.





2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε δευτεροβάθμια εξίσωση;

Η εξίσωση στην οποία υπάρχει ένας άγνωστος και ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου είναι ο αριθμός 2 ονομάζεται δευτεροβάθμια εξίσωση.
π.χ. $3x^2 - 4x + 1 = 0$, $x^2 - 2x = 0$, $x^2 - 6x + 11 = 0$

2. Ποιοι είναι οι όροι μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης;

Κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση έχει την μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Οι αριθμοί a, b, γ είναι οι συντελεστές της εξίσωσης. Το γ ειδικά ονομάζεται σταθερός όρος της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

π.χ. Η εξίσωση $3x^2 + 5x - 2 = 0$ έχει $a=3$, $b=5$ και $\gamma=-2$.

Α. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Γενικά ισχύει ότι αν $a \cdot b = 0$ τότε $a = 0$ ή $b = 0$

• 1η περίπτωση: $ax^2 + bx = 0$ με $a \neq 0$

Για να λύσουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση αυτής της μορφής:

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος.

Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων.

Για να είναι το γινόμενο $x(ax+b)$ ίσο με το μηδέν πρέπει $x = 0$ ή $ax + b = 0$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3 \cdot x(x - 2) = 0$$

π.χ.

$$x = 0 \text{ ή } x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 2$$

• 2η περίπτωση: $ax^2 + \gamma = 0$ με $a \neq 0$

Για να λύσουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση αυτής της μορφής:

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος εξίσωσης και δημιουργούμε διαφορά τετραγώνων.

Αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων και λύνουμε όπως πριν.

π.χ.

$$\begin{aligned}a^2 - 25 &= 0 \\a^2 - 5^2 &= 0 \\(a - 5)(a + 5) &= 0 \\a = 5 \quad \text{ή} \quad a &= -5\end{aligned}$$

Διαφορετικά μπορούμε να θυμηθούμε ότι αν a είναι θετικός, η εξίσωση $x^2 = a$ έχει δύο λύσεις $x = \pm\sqrt{a}$.

π.χ.

$$\begin{aligned}x^2 - 16 &= 0 \\x^2 &= 16 \\x &= \pm\sqrt{16} \\x &= \pm 4\end{aligned}$$

Β. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου

Για να λύσουμε την εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Η παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ ονομάζεται διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και την αξιοποιούμε για να βρούμε τις λύσεις μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

• **Αν** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ τότε βρίσκουμε τις δύο λύσεις της εξίσωσης :

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$



π.χ.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$$

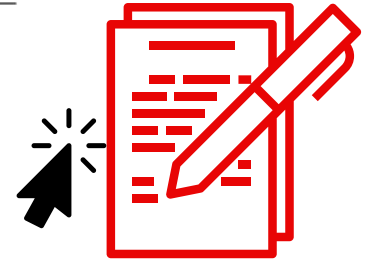
Άρα:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{5-1}{2}$$

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{4}{2} = 2$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Για να ελέγξουμε ότι έχουμε βρει σωστά τις λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης αρκεί να αντικαταστήσουμε στη θέση του αγνώστου τις τιμές που βρήκαμε.

→ Στο παραπάνω παράδειγμα έχουμε:

$$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$$

$$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 + 10 - 6 = 0$$

- Αν $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ τότε έχουμε μία διπλή ρίζα στην δευτεροβάθμια εξίσωση και την βρίσκουμε ως εξής:

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

π.χ. $x^2 + 4x + 4 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0$$

Άρα

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{4}{2}$$

$$x = -2$$

- Αν $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύσεις, είναι αδύνατη.

π.χ. $2x^2 - 4x + 6 = 0$
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
 $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6$
 $\Delta = 16 - 48$
 $\Delta = -32 < 0$
 Άρα η εξίσωση δεν έχει λύσεις.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να λυθούν οι εξισώσεις: $x^2 - 3x + 9 = 0$, $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $2x^2 - 8x - 9 = 0$

$$x^2 - 3x + 9 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$$

$$\Delta = 9 - 36$$

$$\Delta = -27 < 0$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει λύσεις.

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$$

$$\Delta = 16 - 16 = 0$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)$$

$$\Delta = 64 + 36$$

$$\Delta = 100 >$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.

$$x_1 = \frac{-(-8) + \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{8 + 10}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$x_2 = \frac{-(-8) - \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{8 - 10}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $(x-4)^2 + (2x-1)^2 = 13$

$$(x-4)^2 + (2x-1)^2 = 13$$

$$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 4x + 1 = 13$$

$$5x^2 - 12x + 17 = 13$$

$$5x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4$$

$$\Delta = 144 - 80$$

$$\Delta = 64 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-12) + \sqrt{64}}{2 \cdot 5} = \frac{12 + 8}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$x_2 = \frac{-(-12) - \sqrt{64}}{2 \cdot 5} = \frac{12 - 8}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Παραγοντοποίηση Τριωνύμου

Για να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ αρκεί να βρούμε τις δύο ρίζες του x_1, x_2 και παίρνουμε: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα : $2x^2 - 5x + 3$, $\alpha^2 - 10\alpha + 25$

- Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$ αρκεί να λύσουμε την εξίσωση: $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

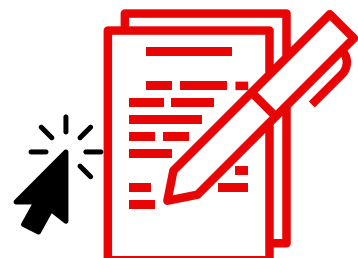
$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Βρήκαμε ότι η εξίσωση έχει 2 λύσεις, οπότε μπορούμε να γράψουμε το τριώνυμο παραγοντοποιημένο:

$$2x^2 - 5x + 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 1)$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

- Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $a^2 - 10a + 25$ μπορούμε να σκεφτούμε δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Θα φτιάξουμε και θα λύσουμε την εξίσωση $a^2 - 10a + 25 = 0$

$$a^2 - 10a + 25 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25$$

$$\Delta = 100 - 100 = 0$$

Άρα η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

$$a = \frac{-(-10)}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$$

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε το τριώνυμο παραγοντοποιημένο

$$a^2 - 10a + 25 = (a - 5)(a - 5) = (a - 5)^2$$

2ος τρόπος: Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το τριώνυμο $a^2 - 10a + 25$ είναι ανάπτυγμα της ταυτότητας για το τετράγωνο της διαφοράς, άρα μπορούμε κατευθείαν να πούμε ότι

$$a^2 - 10a + 25 = (a - 5)^2$$





2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

1. Πώς λύνουμε ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας εξίσωση;

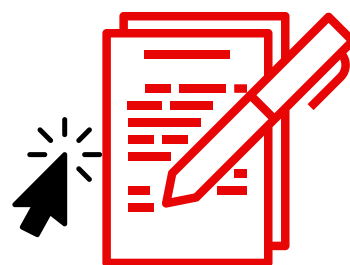
- Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα.
- Ξεχωρίζουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα.
- Χρησιμοποιούμε μια μεταβλητή για να προσδιορίσουμε την άγνωστη ποσότητα που ψάχνουμε.
- Εκφράζουμε όλες τις υπόλοιπες ποσότητες του προβλήματος σε σχέση με τη μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε.
- Δημιουργούμε μια εξίσωση χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος.
- Λύνουμε την εξίσωση.
- Ελέγχουμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε και κάνουμε επαλήθευση.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ



Λυμένα Παραδείγματα

1. Στη Φυσική μαθαίνουμε ότι όταν ένα σώμα εκτελεί ευθύγραμμο ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα, μπορούμε να βρούμε κάθε χρονική στιγμή t την θέση του x αξιοποιώντας τον τύπο:

$$x = u_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Αν ένα σώμα κινείται με αρχική ταχύτητα $u_0 = 2 \text{ m/s}$ και επιτάχυνση $a = 4 \text{ m/s}^2$ να βρείτε πόσα μέτρα διένυσε σε χρόνο $t = 5 \text{ s}$ και σε πόσο χρόνο θα έχει φτάσει στην θέση $x = 180 \text{ m}$.

Το σώμα κινείται με την εξίσωση: $x = 2t + \frac{1}{2} 4t^2 = 2t + 2t^2$

Για να βρούμε πόσα μέτρα διένυσε στα 5 πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησής του αρκεί να βάλουμε $t = 5$ και να λύσουμε την εξίσωση.

$$x = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 = 10 + 2 \cdot 25 = 10 + 50 = 60 \text{ m}$$

Για να βρούμε σε πόσο χρόνο θα έχει φτάσει στην θέση $x = 180 \text{ m}$ αρκεί να βάλουμε όπου $x = 180$.

$$180 = 2t + 2t^2$$

$$2t^2 + 2t - 180 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-180)$$

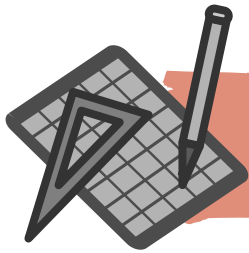
$$\Delta = 4 + 1440$$

$$\Delta = 1444 > 0$$

$$t_1 = \frac{-2 + \sqrt{1444}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 + 38}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

$$t_2 = \frac{-2 - \sqrt{1444}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 - 38}{4} = \frac{-40}{4} = -10$$

Παρόλο που βρήκαμε δύο λύσεις, πρέπει να ελέγξουμε αν αυτές οι λύσεις απαντούν στο πρόβλημά μας. Επειδή ψάχνουμε χρονικό διάστημα καταλαβαίνουμε ότι δεν μπορούμε να έχουμε αρνητικό αποτέλεσμα. Συνεπώς παρόλο που η εξίσωση έχει 2 λύσεις, το πρόβλημα έχει μία, $t = 9 \text{ s}$.



2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο

Β. Ιδιότητες της διάταξης



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ανισοτήτων;

- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

$$\alpha > \beta \text{ τότε } \alpha + \gamma > \beta + \gamma \text{ και } \alpha - \gamma > \beta - \gamma$$

- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

$$\alpha > \beta, \gamma > 0 \text{ τότε } \alpha\gamma > \beta\gamma \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$$

- Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.

$$\alpha > \beta, \gamma < 0 \text{ τότε } \alpha\gamma < \beta\gamma \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$$

Γ. Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο

Για να λύσουμε μια ανίσωση αρκεί να συνδυάσουμε τις ιδιότητες της διάταξης με τις μεθόδους που μάθαμε για να λύνουμε εξισώσεις. **π.χ.:**

$$\begin{aligned} 2x - 3 &> 5 \\ 2x &> 5 + 3 \\ 2x &> 8 \\ x &> \frac{8}{2} \\ x &> 4 \end{aligned}$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να λύσετε την ανίσωση $a + \frac{1-a}{2} > 3a - \frac{a+2}{4}$

$$a + \frac{1-a}{2} > 3a - \frac{a+2}{4}$$

$$4a + 2(1-a) > 12a - (a+2)$$

$$4a + 2 - 2a > 12a - a - 2$$

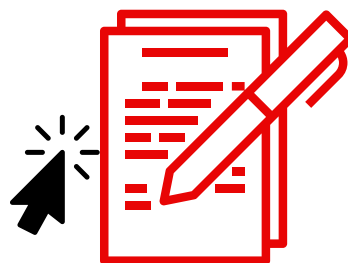
$$4a - 2a - 12a + a > -2 - 2$$

$$-9a > -4$$

$$9a < 4$$

$$a < \frac{4}{9}$$

- Αρχικά πολλαπλασιάζουμε με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Διώχνουμε τις παρενθέσεις χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.
- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- Προσέχουμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης.



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

2. Να λύσετε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας ανίσωση:

Το εισιτήριο σε ένα υποβρύχιο μουσείο στοιχίζει 20€ και συμπεριλαμβάνει την ενοικίαση του εξοπλισμού. Στην περίπτωση που ο επισκέπτης χρησιμοποιήσει δικό του εξοπλισμό, τότε το εισιτήριο εισόδου είναι 5€. Αν το κόστος αγοράς του εξοπλισμού είναι 150€, πόσες φορές θα πρέπει να επισκεφθεί το ίδιο άτομο το υποβρύχιο μουσείο, ώστε να συμφέρει να αγοράσουμε τον εξοπλισμό;

Θα ορίσουμε ως x την άγνωστη μεταβλητή που είναι ο αριθμός επισκέψεων στο μουσείο. Για να είναι συμφέρουσα η αγορά του εξοπλισμού πρέπει:

$$\begin{aligned}
 150 + 5\chi &< 20\chi \\
 150 &< 20\chi - 5\chi \\
 150 &< 15\chi \\
 \frac{150}{15} &< \chi \\
 10 &< \chi
 \end{aligned}$$

Δηλαδή για να συμφέρει να αγοράσουμε εξοπλισμό και να μην χρησιμοποιούμε του μουσείου πρέπει να επισκεφθούμε τουλάχιστον 10 φορές το μουσείο.



3

*συστήματα γραμμικών
εξισώσεων*



3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση;

Κάθε εξίσωση με δύο αγνώστους (x, y) της μορφής $ax + by = \gamma$ ονομάζεται γραμμική εξίσωση.

2. Τι είναι λύση μιας γραμμικής εξίσωσης;

Λύση μιας εξίσωσης $ax + by = \gamma$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει. Επειδή μπορούμε να βρούμε άπειρα ζεύγη (x, y) που επαληθεύουν την γραμμική εξίσωση καταλαβαίνουμε ότι αν αναπαραστήσουμε γραφικά όλες τις λύσεις της εξίσωσης θα πάρουμε μια ευθεία.

3. Πώς μπορούμε να βρούμε ένα σημείο μιας ευθείας;

Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας και αντίστροφα αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

4. Ποιες είναι οι ειδικές περιπτώσεις ευθειών;

Η εξίσωση $y = a$ με $a \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, a)$.

Η εξίσωση $x = \beta$ με $\beta \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\beta, 0)$.

Οι εξισώσεις $x = 0$ και $y = 0$ παριστάνουν τους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.

5. Ποια είναι η γενική εξίσωση της ευθείας;

Γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax+by=\gamma$ και παριστάνει ευθεία όταν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να σχεδιαστεί η ευθεία $5x - 2y = 10$. Ποια είναι η τετμημένη x του σημείου $A(x, 10)$ ώστε το σημείο A να ανήκει στην παραπάνω ευθεία;

Ξέρουμε ότι για να σχεδιάσουμε μια ευθεία αρκεί να ξέρουμε βρούμε δύο σημεία της. Συνηθίζουμε να παίρνουμε σημεία με «απλά» x .

Για το πρώτο σημείο K θα χρησιμοποιήσουμε $x=0$ και παίρνουμε:

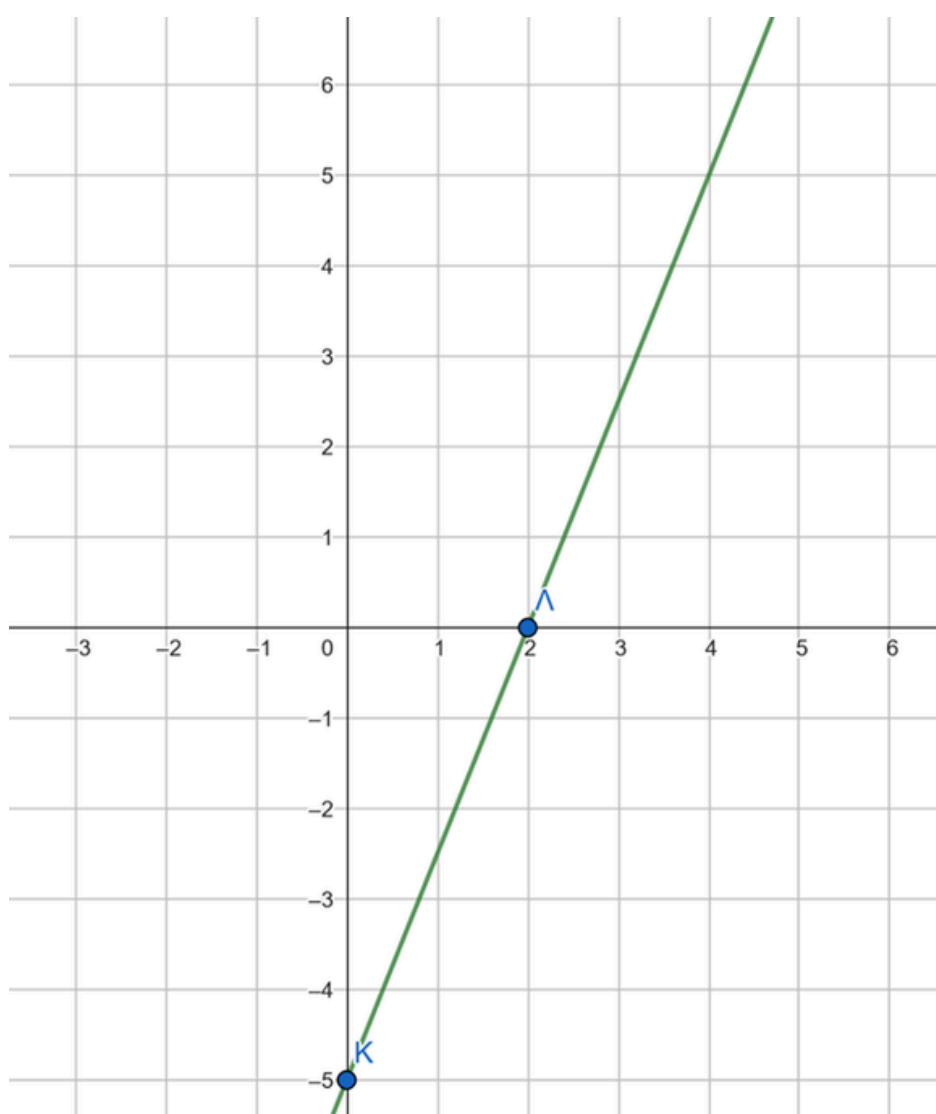
$$\begin{aligned}5 \cdot 0 - 2y &= 10 \\ -2y &= 10 \\ y &= -5\end{aligned}$$

Οπότε παίρνουμε $K(0, -5)$.

Για το δεύτερο σημείο Λ θα χρησιμοποιήσουμε $x=2$ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}5 \cdot 2 - 2y &= 10 \\ 10 - 2y &= 10 \\ -2y &= 0 \\ y &= 0\end{aligned}$$

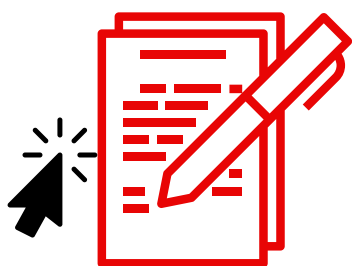
Οπότε παίρνουμε $\Lambda(2, 0)$.



Για να ανήκει το σημείο $A(x,10)$ στην ευθεία αρκεί οι συντεταγμένες του να ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας. Οπότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned}5x - 2y &= 10 \\5x - 2 \cdot 10 &= 10 \\5x - 20 &= 10 \\5x &= 30 \\x &= \frac{30}{5} = 6\end{aligned}$$

Δηλαδή συμπεραίνουμε ότι το σημείο A έχει συντεταγμένες $(6,10)$.



2. Αν ευθεία $2x+\beta y=4$ διέρχεται από το σημείο $B(1,-2)$ να βρεθεί το β και τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες.

Αφού έχουμε ένα σημείο που ανήκει στην ευθεία, για να βρούμε το β αρκεί να βάλουμε τις συντεταγμένες του σημείου B στην εξίσωση της ευθείας.

$$\begin{aligned}2x + \beta y &= 4 \\2 \cdot 1 + \beta \cdot (-2) &= 4 \\-2\beta + 2 &= 4 \\-4\beta &= 6 \\\beta &= \frac{6}{-2} \\\beta &= -3\end{aligned}$$

Άρα τελικά η ευθεία έχει εξίσωση: $2x-3y=4$

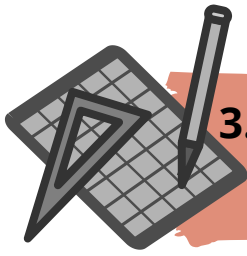
Για να βρούμε τα σημεία τομής μιας ευθείας με τους άξονες αρκεί να βρούμε το σημείο με τετμημένη $x=0$, είναι το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$, και το σημείο με τεταγμένη $y=0$, είναι το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$.

$$\begin{aligned}\text{Παίρνουμε για } x=0: \quad 2 \cdot 0 - 2y &= 4 \\-2y &= 4 \\y &= \frac{-4}{2} = -2\end{aligned}$$

Δηλαδή παίρνουμε το σημείο $(0,-2)$.

Κάνουμε την ίδια διαδικασία για $y=0$ και παίρνουμε το σημείο $(2,0)$.





3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε επίλυση γραμμικού συστήματος;

Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x , y , και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών (x, y) που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y .

2. Τι ονομάζεται λύση γραμμικού συστήματος;

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

3. Μπορούμε να λύσουμε ένα σύστημα γραφικά;

Για να λύσουμε γραφικά ένα σύστημα πρέπει να σχεδιάσουμε τις δυο ευθείες σε κοινό σύστημα αξόνων και να εξετάσουμε την θέση τους.

- Αν οι ευθείες τέμνονται τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση, τις συντεταγμένες του σημείου τομής.
- Αν οι ευθείες είναι παράλληλες τότε το σύστημα είναι αδύνατο, δηλαδή δεν έχει λύση.
- Αν οι ευθείες συμπίπτουν (ταυτίζονται) τότε το σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να σχεδιάσετε και στη συνέχεια να βρείτε τη λύση του συστήματος:

$$x - y = 5$$

$$2x + y = 1$$

Για να σχεδιάσουμε τις δύο ευθείες:

Για την $x - y = 5$:

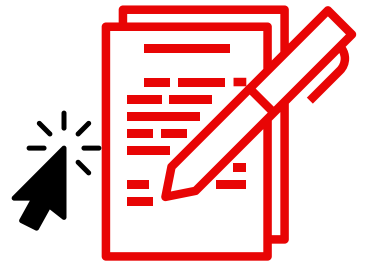
→ όταν $x=0$ παίρνουμε $y=-5$ δηλαδή το σημείο $A(0,-5)$

→ όταν $y=0$ παίρνουμε $x=5$ δηλαδή το σημείο $B(5,0)$

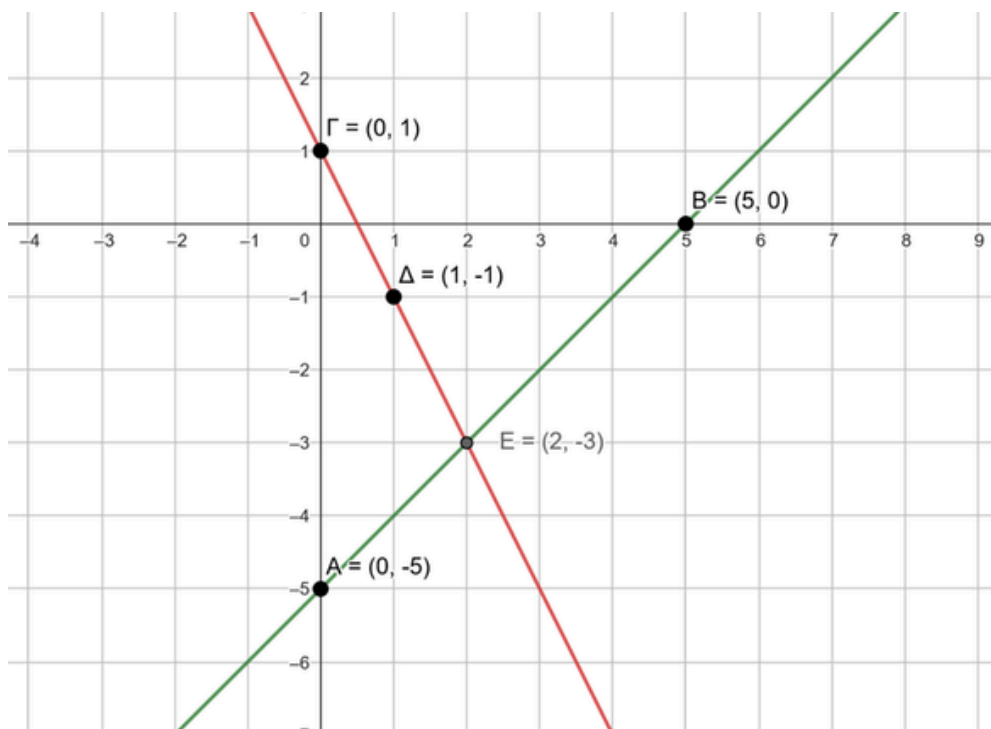
Για την $2x + y = 1$:

→ όταν $x=0$ παίρνουμε $y=1$ δηλαδή το σημείο $\Gamma(0,1)$

→ όταν $y=-1$ παίρνουμε $x=1$ δηλαδή το σημείο $\Delta(1,-1)$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ



Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες έχουν σημείο τομής το $E(2,-3)$, άρα η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(2,-3)$.

2. Να βρείτε τη λύση του παρακάτω συστήματος:

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 12 \\ 6x+9y &= -18 \end{aligned}$$

Για την ευθεία : $2x+3y=12$

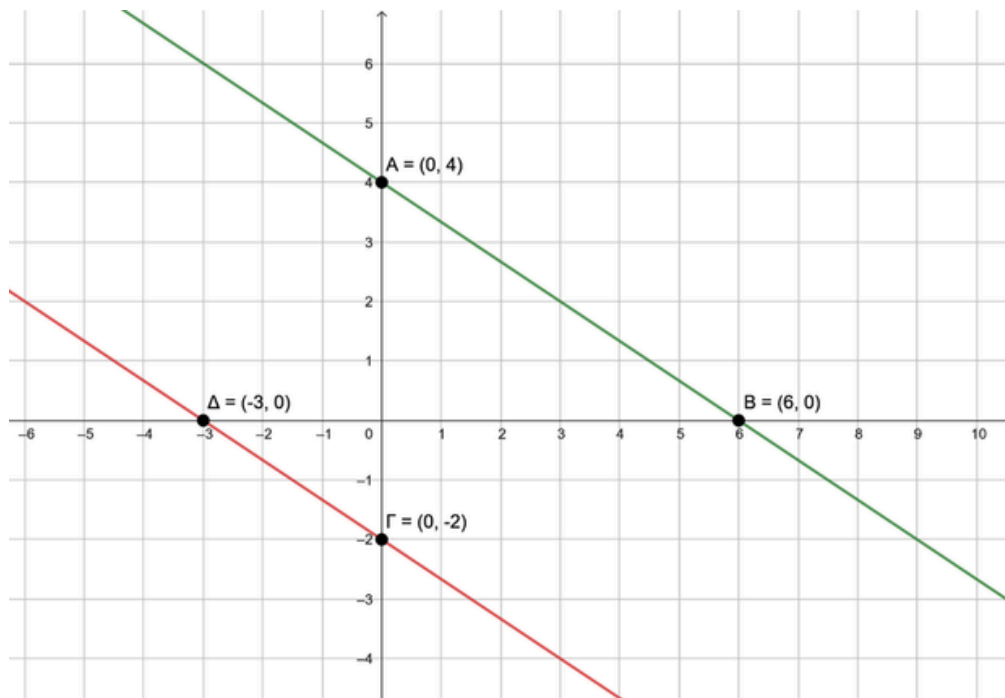
→ όταν $x=0$ παίρνουμε $y=4$ δηλαδή το σημείο $A(0,4)$

→ όταν $y=0$ παίρνουμε $x=6$ δηλαδή το σημείο $B(6,0)$

Για την ευθεία : $6x+9y=-18$

→ όταν $x=0$ παίρνουμε $y=-3$ δηλαδή το σημείο $\Gamma(0,-3)$

→ όταν $y=0$ παίρνουμε $x=-3$ δηλαδή το σημείο $\Delta(-3,0)$



Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες δεν έχουν κανέναν κοινό σημείο αφού είναι παράλληλες, συνεπώς το σύστημα είναι αδύνατο.

3. Να βρείτε τη λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} 2x+y &= 4 \\ 4x+2y &= 8 \end{aligned}$$

Για την ευθεία : $2x+y=4$

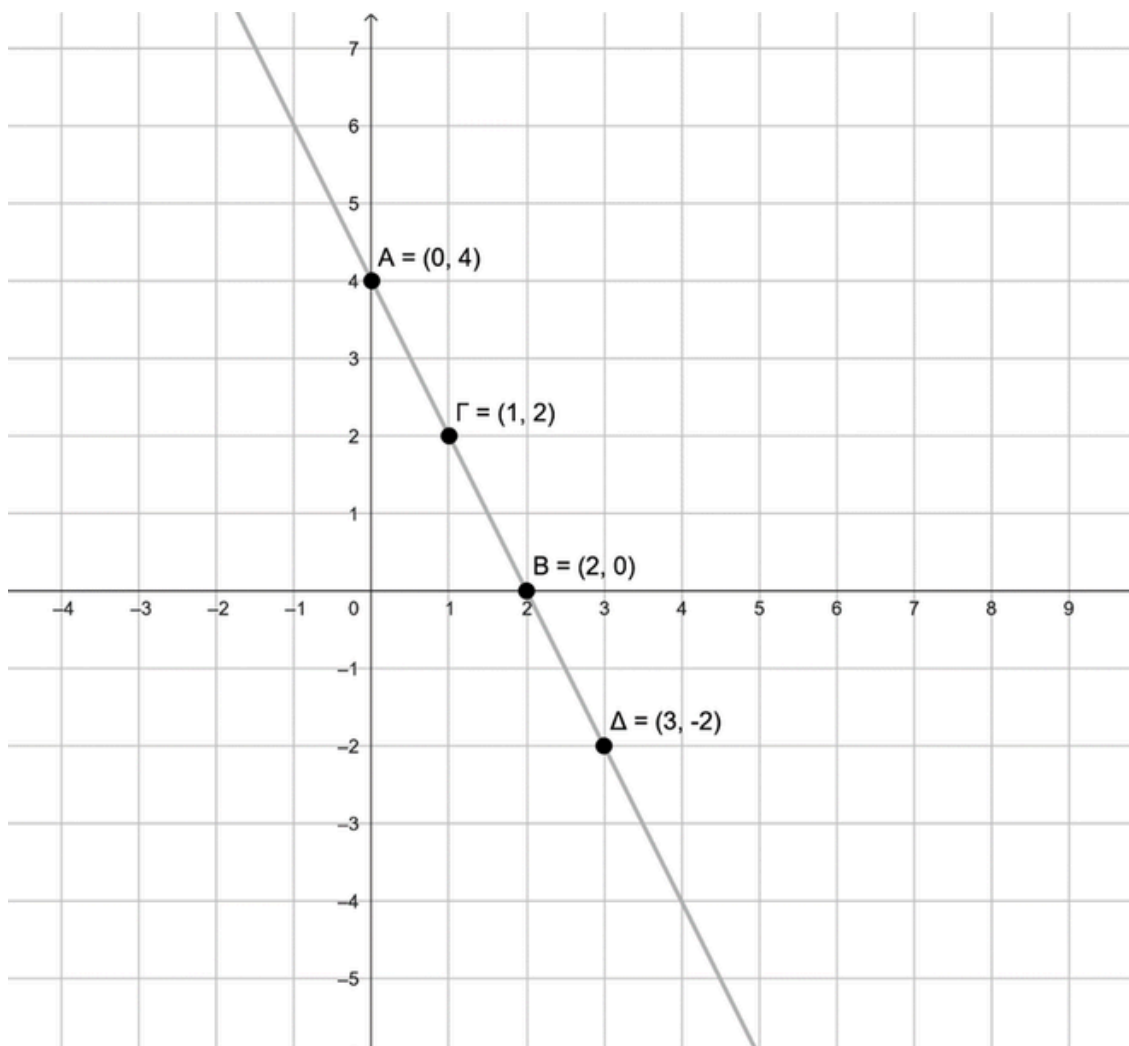
→ όταν $x=0$ παίρνουμε $y=4$ δηλαδή το σημείο $A(0,4)$

→ όταν $y=0$ παίρνουμε $x=2$ δηλαδή το σημείο $B(2,0)$

Για την ευθεία : $4x+2y=8$

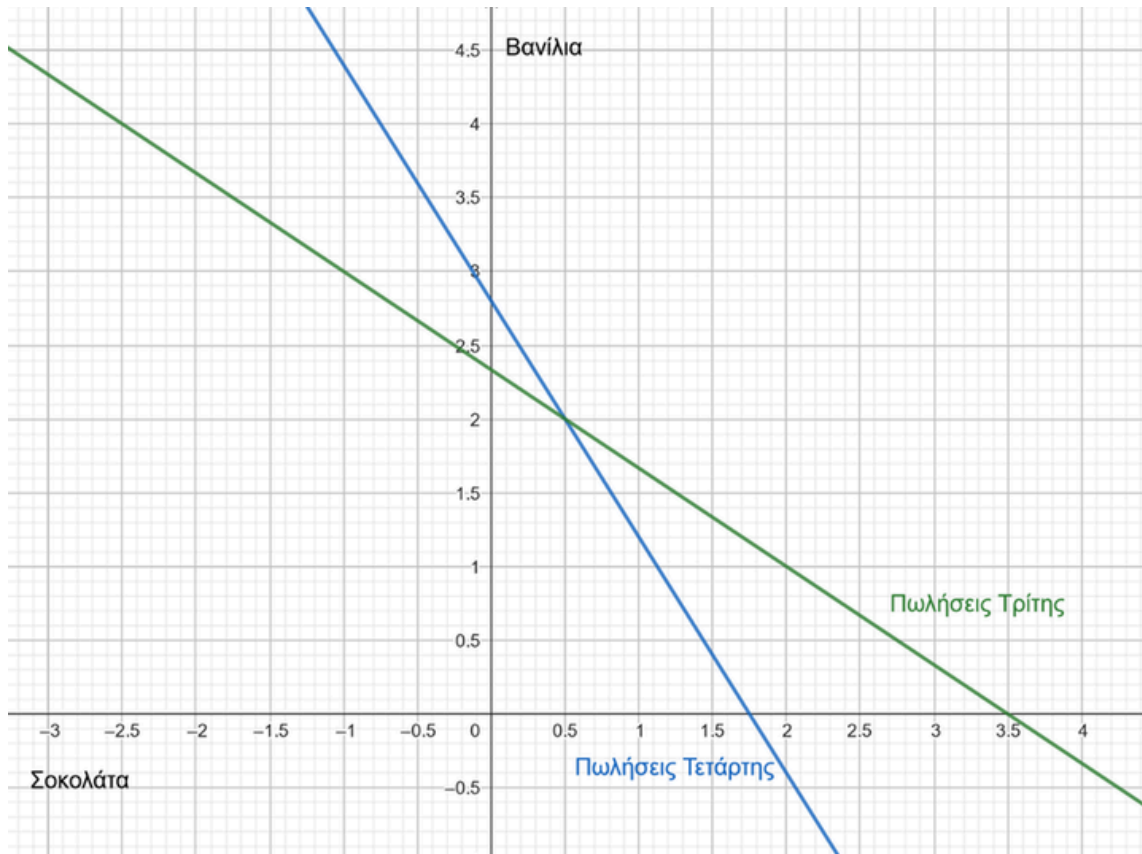
→ όταν $x=1$ παίρνουμε $y=2$ δηλαδή το σημείο $\Gamma(1,2)$

→ όταν $y=-2$ παίρνουμε $x=3$ δηλαδή το σημείο $\Delta(3,-2)$



Παρατηρούμε ότι τελικά οι δύο ευθείες ταυτίζονται, δηλαδή έχουν άπειρα κοινά σημεία, συνεπώς το σύστημα είναι αόριστο.

4. Ένα μικρό παγωτατζίδικο πουλάει παγωτό σοκολάτα και παγωτό βανίλια. Την Τρίτη πούλησε 8 μπάλες παγωτό σοκολάτα και 5 μπάλες παγωτό βανίλια και εισέπραξε 14 ευρώ. Την Τετάρτη πούλησε 6 μπάλες παγωτό σοκολάτα και 9 μπάλες παγωτό βανίλια και εισέπραξε 21 ευρώ. Με πόσες πωλήσεις παγωτού σοκολάτας και βανίλιας θα έχουμε ίση είσπραξη τις δυο μέρες;



Ίση είσπραξη θα έχουμε στο σημείο που συναντιούνται οι δύο ευθείες, δηλαδή στο σημείο $K(0,5, 2)$. Δηλαδή για να εισπράξουμε ίδια χρήματα αρκεί να πουλήσουμε 0,5 μπάλες σοκολάτες και 2 μπάλες βανίλιας.





3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Με ποιους τρόπους μπορούμε να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα;

- Με την μέθοδο της αντικατάστασης
- Με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών

2. Πώς λύνουμε ένα σύστημα με την μέθοδο της αντικατάστασης;

- I. Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς τον έναν άγνωστο.
- II. Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
- III. Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.
- IV. Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

π.χ.:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 5x-y=2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} y=4-x \\ 5x-y=2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y=4-x \\ 5x-(4-x)=2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} y=4-x \\ 5x-4+x=2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} y=4-x \\ 6x=2+4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y=4-x \\ 6x=6 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} y=4-x \\ x=\frac{6}{6}=1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} y=4-1 \\ x=1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y=3 \\ x=1 \end{array} \right\} (x, y) = (1, 3)$$



Για το σύστημα βρήκαμε ότι έχει λύση $(x,y)=(1,3)$.

Για να επιβεβαιώσουμε ότι έχουμε λύσει σωστά το σύστημα εξετάζουμε αν το ζευγάρι των αριθμών που βρήκαμε επαληθεύει τις αρχικές εξισώσεις.

3. Πώς λύνουμε ένα σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών;

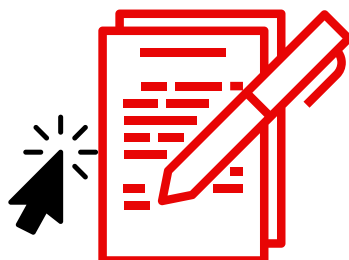
- I. Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σε έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε.
- II. Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.
- III. Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.
- IV. Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

$$\text{π.χ.: } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 2y = 6 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 3x + 4x + 2y - 2y = 6 + 8 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 7x = 14 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ x = \frac{14}{7} = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + 2y = 8 \\ x = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 6 + 2y = 8 \\ x = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2y = 2 \\ x = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2 \end{array} \right\} (x, y) = (2, 1)$$

Για το σύστημα βρήκαμε ότι έχει λύση $(x,y)=(2,1)$





Για να επιβεβαιώσουμε ότι έχουμε λύσει σωστά το σύστημα εξετάζουμε αν το ζευγάρι των αριθμών που βρήκαμε επαληθεύει τις αρχικές εξισώσεις.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να λυθεί το σύστημα με τις δύο μεθόδους:

$$3x - y = 5$$

$$2x - 3y = 1$$

• Με τη μέθοδο αντικατάστασης:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 3x - 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y = 3x - 5 \\ 2x - 3(3x - 5) = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x - 5 \\ 2x - 9x + 15 = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = 3x - 5 \\ -7x = -14 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = 3x - 5 \\ x = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 3 \cdot 2 - 5 \\ x = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2 \end{array} \right\} (x, y) = (2, 1)$$

- Με τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -9x + 3y = -15 \\ 2x - 3y = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 2x - 9x + 3y - 3y = -15 + 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ -7x = -14 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ x = \frac{-14}{-7} = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ x = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 2 - 3y = 1 \\ x = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -3y = 1 - 4 \\ x = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2 \end{array} \right\} (x, y) = (2, 1)$$

2. Σε ένα παιχνίδι κάθε σωστή απάντηση δίνει 3 πόντους στον παίκτη και κάθε λάθος απάντηση του αφαιρεί έναν πόντο. Αν συνολικά γίνονται 50 ερωτήσεις και ο παίκτης έχει συγκεντρώσει 46 πόντους, πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και πόσες λάθος;

Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα θα πρέπει να δημιουργήσουμε ένα σύστημα που ανταποκρίνεται στα δεδομένα της άσκησης.

Υποθέτουμε ότι x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων και y το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων.

Αφού συνολικά είναι 50 ερωτήσεις προκύπτει ότι $x + y = 50$.

Αφού ο παίκτης έχει συγκεντρώσει 46 πόντους προκύπτει ότι $3x - y = 46$.

Συνεπώς έχουμε να λύσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{l} x + y = 50 \\ 3x - y = 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+y=50 \\ 3x-y=46 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x+y=50 \\ 3x+x+y-y=50+46 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x+y=50 \\ 4x=96 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+y=50 \\ x=\frac{96}{4}=24 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 24+y=50 \\ x=24 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y=26 \\ x=24 \end{array} \left\{ (x,y)=(24,26) \right.$$

Δηλαδή ο παίκτης απάντησε σωστά σε 24 ερωτήσεις και λάθος σε 26. Για να είμαστε σίγουροι ότι έχουμε λύσει το σύστημα σωστά θα κάνουμε αντικατάσταση στις αρχικές εξισώσεις το ζεύγος των αριθμών που προέκυψε.

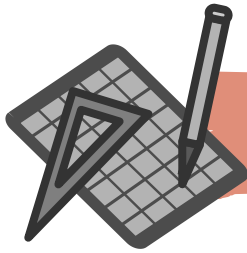
$$\begin{array}{l} x+y=50 \\ 3x-y=46 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 26+24=50 \\ 3 \cdot 24-26=46 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 50=50 \\ 72-26=46 \end{array}$$

Οι τιμές επαληθεύουν το σύστημα άρα είναι σωστή η λύση.

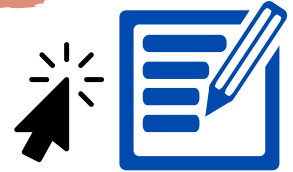


5

πιθανότητες



5.1 Σύνολα



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε σύνολο;

Κάθε ομάδα αντικειμένων τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια ονομάζεται σύνολο. Κάθε αντικείμενο που περιέχεται σ' ένα σύνολο ονομάζεται στοιχείο του συνόλου.

2. Πώς μπορούμε να παραστήσουμε ένα σύνολο;

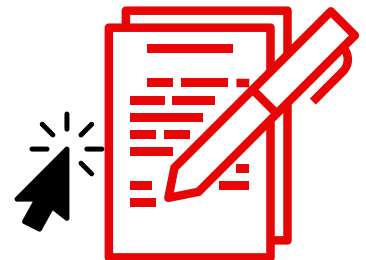
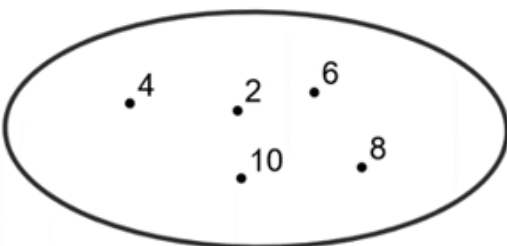
1. Με αναγραφή των στοιχείων του
2. Με περιγραφή των στοιχείων του
3. Με διάγραμμα Venn

π.χ. Για το ίδιο σύνολο Α έχουμε:

1. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

2. $A = \{\text{τα πέντε πρώτα πολλαπλάσια του } 2\}$ ή $A = \{2 \cdot \kappa, \kappa = 1, 2, 3, 4, 5\}$

3. $A =$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

3. Ποιον συμβολισμό χρησιμοποιούμε για να δείξουμε ότι ένα στοιχείο ανήκει ή δεν ανήκει σε ένα σύνολο;

- Ο συμβολισμός $a \in B$ σημαίνει ότι το στοιχείο a ανήκει στο σύνολο B .
- Ο συμβολισμός $\delta \notin E$ σημαίνει ότι το στοιχείο δ δεν ανήκει στο σύνολο E .

4. Πότε δύο σύνολα είναι ίσα;

Δύο σύνολα είναι ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

π.χ.: Τα σύνολα $A=\{\alpha, \epsilon, \eta, \iota, \omicron, \upsilon, \omega\}$ και $B=\{\text{τα φωνήεντα της αλφάβητου}\}$ είναι ίσα σύνολα γιατί περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

5. Πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο άλλου συνόλου;

Ένα σύνολο A ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου B , όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B .

π.χ. Το σύνολο $\Phi = \{\text{φωνήεντα της αλφάβητου}\}$ είναι υποσύνολο του συνόλου $A = \{\text{όλη η αλφάβητος}\}$

Για να δείξουμε ότι ένα σύνολο K είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου Λ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$K \subseteq \Lambda$$

6. Ποιο σύνολο ονομάζεται κενό σύνολο;

Κενό σύνολο ονομάζεται το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται $\emptyset$.

π.χ. το σύνολο $K = \{\text{περιττοί αριθμοί πολλαπλάσια του 2}\}$ είναι κενό σύνολο γιατί δεν υπάρχουν πολλαπλάσια του 2 που είναι περιττοί αριθμοί. Δηλαδή $K = \emptyset$.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να αναπαραστήσετε τα σύνολα με αναγραφή στοιχείων.

$A = \{x \in \mathbb{R}, \text{ με } (x-1)^2 = 0\}$ είναι το σύνολο $A = \{1\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \text{ με } -3 \leq x < 2\}$ είναι το σύνολο $B = \{-3, -2, -1, -0, 1\}$

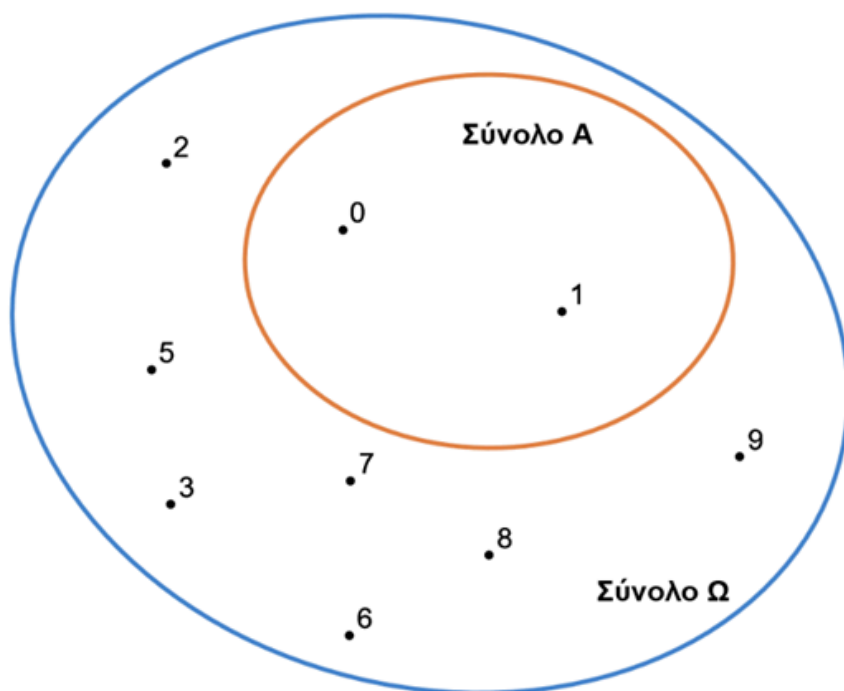
$\Gamma = \{\text{Τα κεφαλαία γράμματα της ελληνικής αλφάβητου}\}$ είναι το σύνολο

$\Gamma = \{A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda, M, N, \Xi, O, \Pi, P, \Sigma, T, Y, \Phi, X, \Psi, \Omega\}$

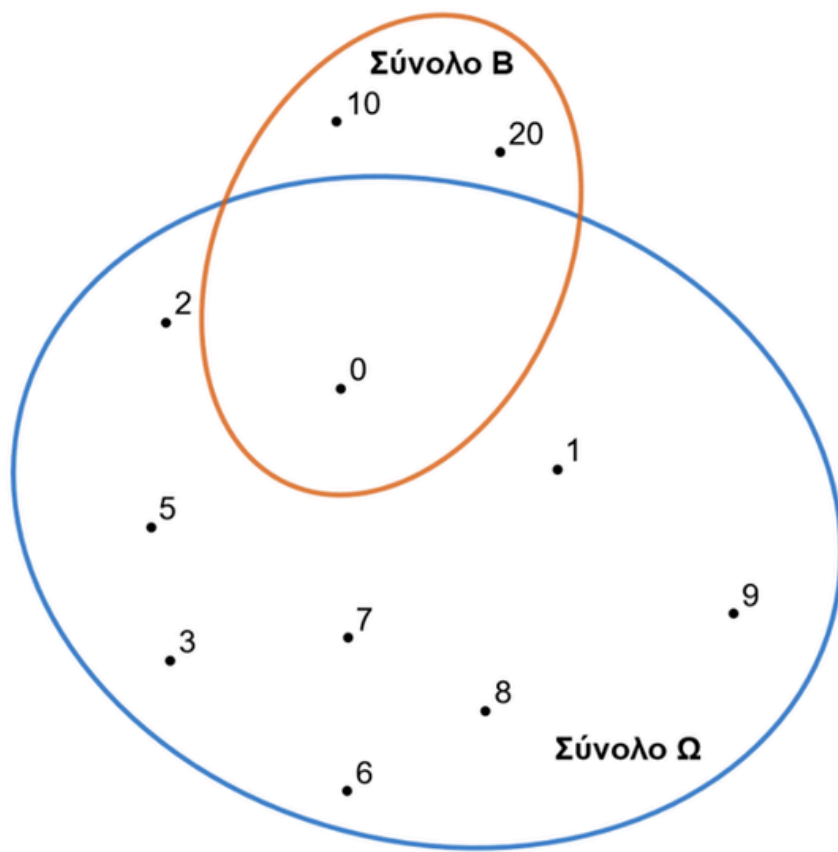
Γενικά παρατηρούμε ότι κάθε φορά μπορούμε να γράφουμε κάθε σύνολο με την μορφή που μας εξυπηρετεί καλύτερα.

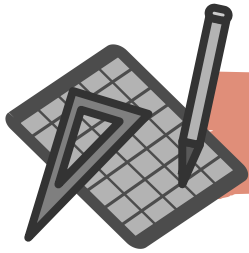
2. Είναι το σύνολο $A = \{0, 1\}$ υποσύνολο του $\Omega = \{9, 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1, 0\}$; Τί ισχύει για το σύνολο $B = \{0, 10, 20\}$;

Παρατηρούμε ότι όλα τα στοιχεία του συνόλου A είναι και στοιχεία του συνόλου Ω δηλαδή το A είναι υποσύνολο του Ω , η $A \subseteq \Omega$.

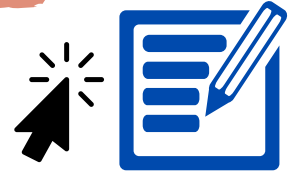


Για το σύνολο B παρατηρούμε ότι υπάρχουν στοιχεία του που δεν ανήκουν στο σύνολο Ω . Επομένως το B δεν είναι υποσύνολο του Ω .





5.2 Δειγματικός χώρος - Ενδεχόμενα



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

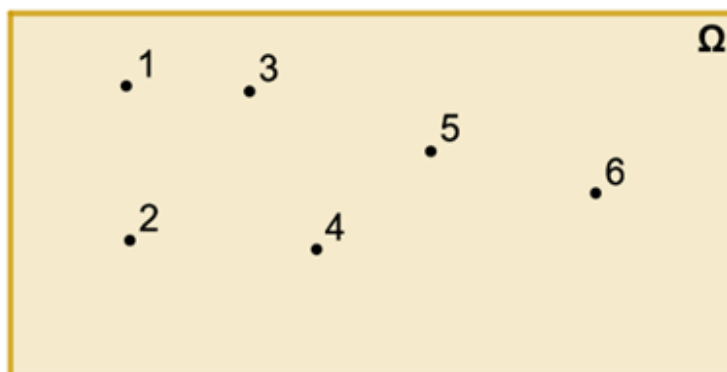
1. Τι ονομάζουμε πείραμα τύχης;

Τα πειράματα, τα οποία όσες φορές και αν τα επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα τους με απόλυτη βεβαιότητα ονομάζονται πειράματα τύχης.

2. Τι ονομάζεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του και συμβολίζεται με Ω .

π.χ. Ο δειγματικός χώρος Ω της ρίψης ενός ζαριού είναι $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.



π.χ. Ο δειγματικός χώρος Ω της ρίψης ενός κέρματος είναι $\Omega=\{\text{κορώνα, γράμματα}\}$

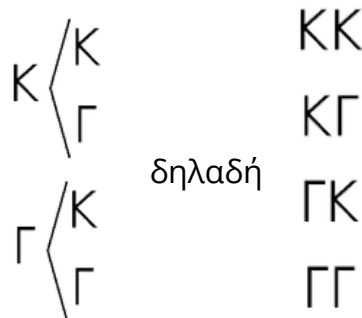
3. Με ποιους τρόπους μπορούμε να βρούμε τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης;

1. Με απλή αναγραφή

π.χ. Ο δειγματικός χώρος ρίψης ενός ζαριού είναι $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

2. Με αναγραφή αξιοποιώντας δέντροδιαγράμματα

π.χ. Ο δειγματικός χώρος ρίψης ενός κέρματος δύο φορές είναι:



Άρα $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$

3. Με αναγραφή αξιοποιώντας πίνακες τιμών

π.χ. Ο δειγματικός χώρος διασταύρωσης 2 ομάδων A,B με άλλες δύο είναι Γ,Δ:

Ω	Γ	Δ
A	A Γ	A Δ
B	B Γ	B Δ

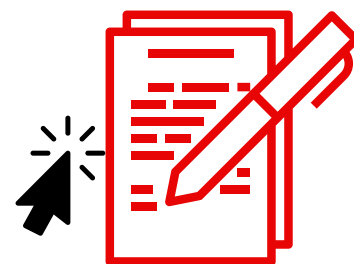
Άρα $\Omega = \{A\Gamma, A\Delta, B\Gamma, B\Delta\}$

4. Τι ονομάζουμε ενδεχόμενο;

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω .

π.χ. Το $A=\{1\}$ είναι ενδεχόμενο του $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Δηλαδή όταν ρίχνουμε το ζάρι υπάρχει το ενδεχόμενο να έρθει 1. Αντίθετα το $\{20\}$ δεν είναι ενδεχόμενο του Ω , αφού δεν υπάρχει ο αριθμός 20 στο ζάρι, $20 \notin \Omega$.

5. Ποιο ενδεχόμενο ονομάζεται βέβαιο και πιο αδύνατο;



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται σε οποιαδήποτε εκτέλεση του πειράματος ονομάζεται βέβαιο ενδεχόμενο.

π.χ. Αν επιλέξω στην τύχη έναν μήνα του έτους, το ενδεχόμενο ο μήνας που διάλεξα να έχει τουλάχιστον 25 μέρες είναι βέβαιο. (Όλοι οι μήνες έχουν πάνω από 27 μέρες.)

Το ενδεχόμενο που δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο.

π.χ. Αν επιλέξω στην τύχη μια μέρα της εβδομάδας, το ενδεχόμενο η μέρα που διάλεξα να έχει το γράμμα ω είναι αδύνατο. (Καμία μέρα της εβδομάδας δεν γράφεται με ω .)

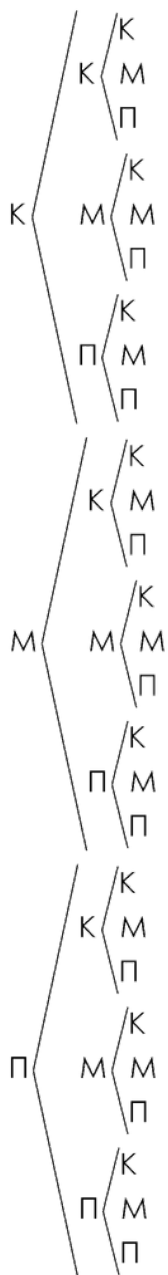


Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Σε ένα παιχνίδι με 3 φάσεις μπορούμε να τραβήξουμε τρεις κάρτες με χρώμα: κόκκινο, μπλε και πράσινο. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος που σχηματίζεται;



Οπότε ο δειγματικός χώρος που σχηματίζεται είναι:

$\Omega = \{ \text{ΚΚΚ, ΚΚΜ, ΚΚΠ, ΚΜΚ, ΚΜΠ, ΚΜΜ, ..., ΠΠΠ} \}$

2. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 4 φορές. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος που σχηματίζεται; Ποιο είναι το ενδεχόμενο να φέρω τουλάχιστον τρεις φορές γράμματα;

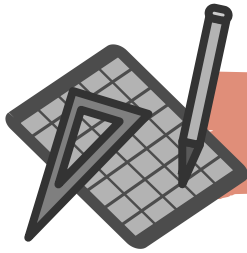


Ο δειγματικός χώρος που σχηματίζεται είναι:

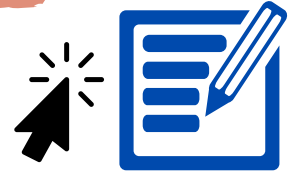
$\Omega = \{ \text{ΚΚΚΚ, ΚΚΚΓ, ΚΚΓΚ, ΚΚΓΓ, ΚΓΚΚ, ΚΓΚΓ, ΚΓΓΚ, ΚΓΓΓ, ΓΚΚΚ, ΓΚΚΓ, ΓΚΓΚ, ΓΚΓΓ, ΓΓΚΚ, ΓΓΓΚ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΓ} \}$.

Το ενδεχόμενο να φέρω τουλάχιστον 3 φορές γράμματα είναι:

$A = \{ \text{ΚΓΓΓ, ΓΚΓΓ, ΓΓΓΚ, ΓΓΚΓ, ΓΓΓΓ} \}$.



5.3 Έννοια της πιθανότητας



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποια ενδεχόμενα ονομάζονται ισοπίθανα;

Αν σε ένα πείραμα τύχης κάθε ενδεχόμενο εμφανίζεται τυχαία, χωρίς να έχει κανένα πλεονέκτημα έναντι των άλλων, λέμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα του δειγματικού χώρου που προκύπτει από αυτό το πείραμα είναι ισοπίθανα.

2. Ποιον αριθμό ορίζουμε ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου A;

Σε κάθε πείραμα τύχης, με ισοπίθανα ενδεχόμενα, πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ονομάζεται ο αριθμός $P(A)$:

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοικών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

π.χ. Η πιθανότητα να φέρω 1 όταν ρίξω το ζάρι είναι $P(1) = \frac{1}{6}$.

3. Ποια είναι η πιθανότητα να ικανοποιηθεί το ενδεχόμενο όλου του δειγματικού χώρου Ω και ποια η πιθανότητα για ένα αδύνατο ενδεχόμενο;

$$P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$$

$$P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(\Omega)} = 0$$

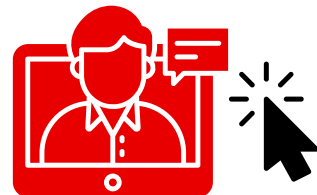
4. Τί τιμές μπορεί να πάρει η πιθανότητα ενός ενδεχομένου;

Όπως καταλαβαίνουμε για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει ότι:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Επιλέγουμε στην τύχη μια μέρα της εβδομάδας. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου:

A: «η μέρα ξεκινάει από φωνήεν»

B: «η μέρα έχει 7 γράμματα»

Γ: «το τελευταίο γράμμα της μέρας δεν είναι η (ήτα)»

Για να βρούμε την πιθανότητα κάθε ενδεχομένου αρχικά θα βρούμε πόσα στοιχεία έχει κάθε ενδεχόμενο.

$$A = \{\emptyset\}$$

$$B = \{\text{Δευτέρα, Τετάρτη, Σάββατο, Κυριακή}\}$$

$$\Gamma = \{\text{Δευτέρα, Σάββατο}\}$$

Δηλαδή $N(A)=0$, $N(B)=4$, $N(\Gamma)=2$ και εύκολα καταλαβαίνουμε ότι $N(\Omega)=7$.

Οπότε έχουμε:

$$P(A) = \frac{0}{7} = 0$$

$$P(B) = \frac{4}{7}$$

$$P(\Gamma) = \frac{2}{7}$$



2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Ποια η πιθανότητα οι δυο ρίψεις να έχουν άθροισμα 8;

Για να βρούμε το ζητούμενο αρχικά θα βρούμε τον δειγματικό χώρο Ω .

Ω	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ο δειγματικός χώρος Ω έχει $N(\Omega)=36$.

Για το ενδεχόμενο A με άθροισμα 8 έχουμε $N(A)=5$.

Οπότε παίρνουμε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{36}$$



ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΚΔΟΣΗΣ:
Πρόδρομος Μιχαλάκης

© ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΛΥΣΑΡΙ | LISARI.GR
& Πρόδρομος Μιχαλάκης



Πανόρμου 14 & Σμύρνης,
12242, Αιγάλεω
τηλ.: 210 5982 614
e-mail: info@lisari.gr
www.lisari.gr

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται από τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και από τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η χωρίς γραπτή άδεια του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή οποιοδήποτε μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

