

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ



Διαδραστικό Βοήθημα

Θεωρία - VideoΜαθήματα - Ασκήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

2.16 Απλές σχέσεις γωνιών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Τρίγωνα

3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου

3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

3.7 Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος

3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

3.16 Σχετικές θέσεις δυο κύκλων

3.17 Απλές γεωμετρικές κατασκευές

3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Παράλληλες ευθείες

4.1 Εισαγωγή

4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

4.7 Γωνίες με πλευρές κάθετες

4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Παραλληλόγραμμα - Τραπεζίδια

5.1 Εισαγωγή

5.2 Παραλληλόγραμμα

5.3 Ορθογώνιο

5.4 Ρόμβος

5.5 Τετράγωνο

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

5.10 Τραπεζίδιο

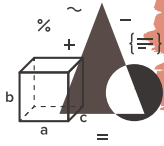
5.11 Ισοσκελές τραπέζιο

2

*τα βασικά γεωμετρικά
σχήματα*



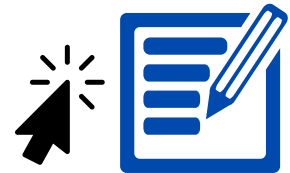
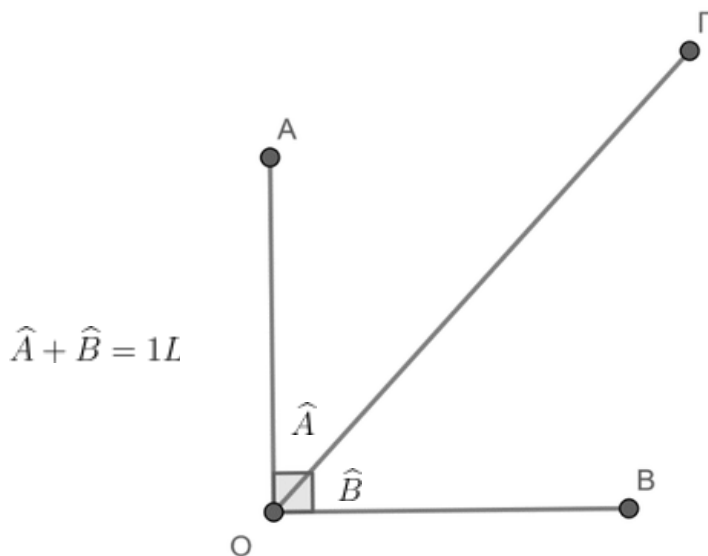
Ενότητα 2η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



16. Απλές σχέσεις γωνιών

1. Τι ονομάζουμε συμπληρωματικές γωνίες;

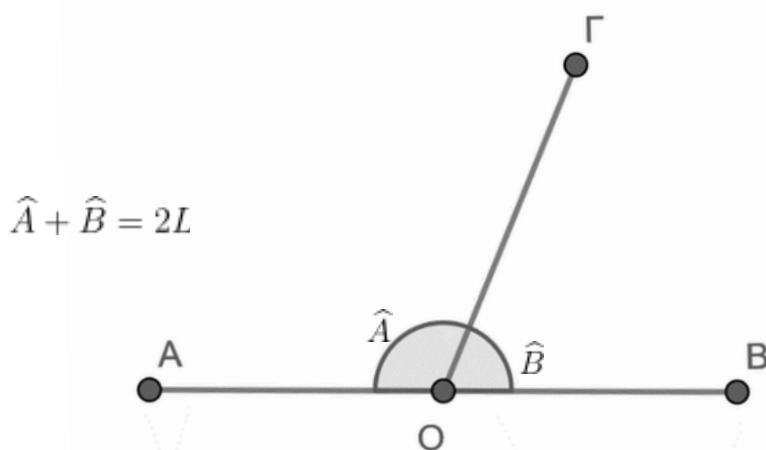
Δύο γωνίες λέγονται συμπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μία ορθή γωνία.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

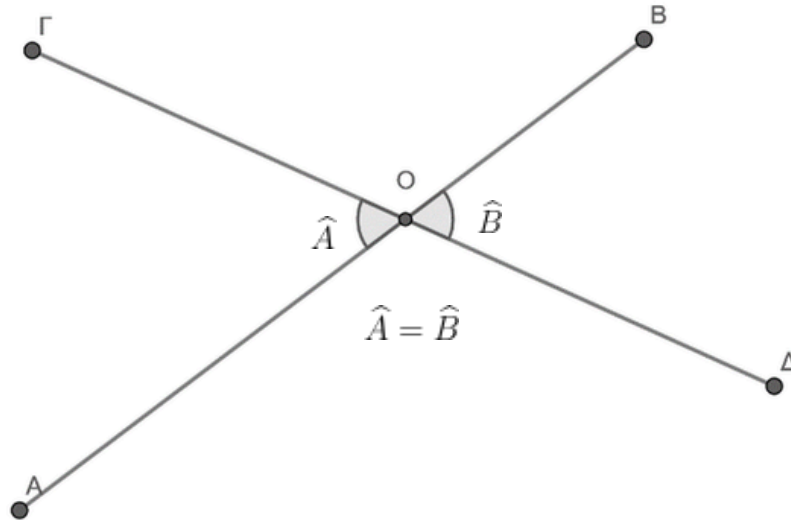
2. Τι ονομάζουμε παραπληρωματικές γωνίες;

Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία. Καθεμία από αυτές λέγεται και παραπλήρωμα της άλλης.



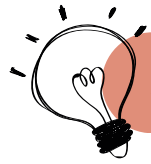
3. Τι ονομάζουμε κατακορυφήν γωνίες;

Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν, αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.



ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. Δύο εφεξής και παραπληρωματικές γωνίες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντίστροφα.
2. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
3. Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος της κατακορυφήν της γωνίας.
4. Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Μπορούμε να βρούμε το συμπλήρωμα μιας αμβλείας γωνίας;

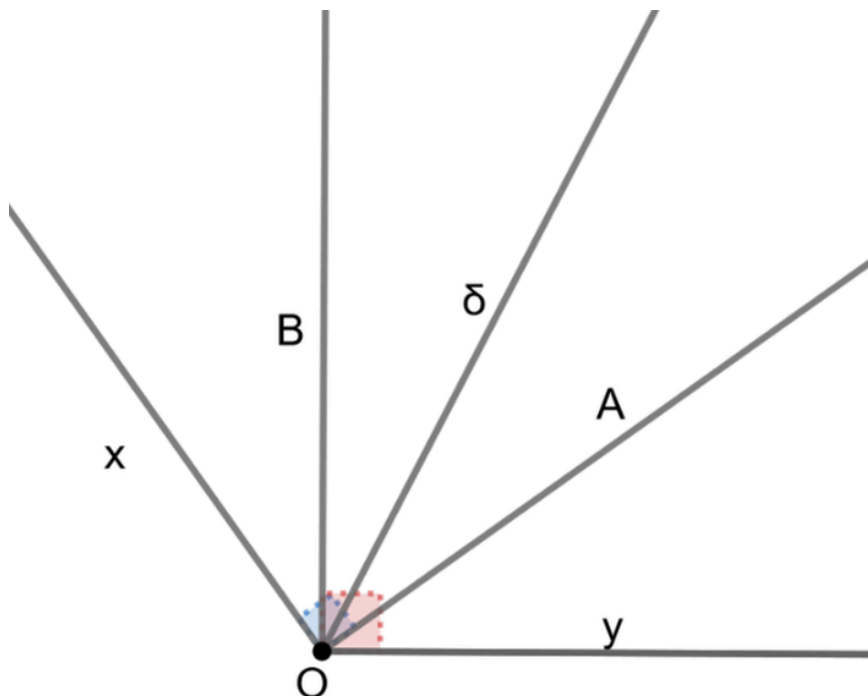
Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα μία ορθή. Συνεπώς δεν μπορούμε να βρούμε το συμπλήρωμα μιας αμβλείας γωνίας γιατί κάθε αμβλεία είναι μεγαλύτερη από την ορθή.

Συμπληρώματα έχουν οι οξείες γωνίες και η ειδική περίπτωση της ορθής με συμπλήρωμα τη μηδενική γωνία.

2. Τι είδους γωνία είναι η παραπληρωματική μίας τυχαίας γωνίας $\hat{\phi}$;

- Μια αμβλεία γωνία $\hat{\phi}$ έχει παραπληρωματική μια οξεία γωνία.
- Μια οξεία γωνία $\hat{\phi}$ έχει παραπληρωματική μια αμβλεία γωνία
- Μια ορθή γωνία $\hat{\phi}$ έχει παραπληρωματική ορθή γωνία.

3. Στην γωνία $x\hat{O}y$ παίρνουμε στο εσωτερικό της ημιευθείας OA και OB τέτοιες ώστε $OA \perp Ox$ και αντίστοιχα $OB \perp Oy$. Τι ισχύει για την διχοτόμο των γωνιών $A\hat{O}B$ και $x\hat{O}y$;



Η O_δ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}O_\delta B$. Άρα θα ισχύει ότι $\delta\hat{O}A = \delta\hat{O}B$. Αντίστοιχα για τις συμπληρωματικές γωνίες των $\delta\hat{O}A$ και $\delta\hat{O}B$ προκύπτει ότι θα είναι ίσες, δηλαδή $\delta\hat{O}y = \delta\hat{O}x$. Όμως $\delta\hat{O}y + \delta\hat{O}x = x\hat{O}y$.

Συνεπώς προκύπτει ότι η ευθεία O_δ είναι επίσης διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$.

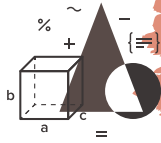


3

τρίγωνα



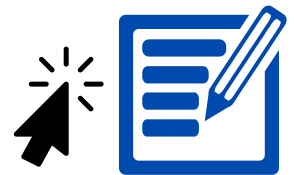
Ενότητα 3η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



1. Στοιχεία και είδη τριγώνων

1. Ποια είναι τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου;

Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου είναι τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου.



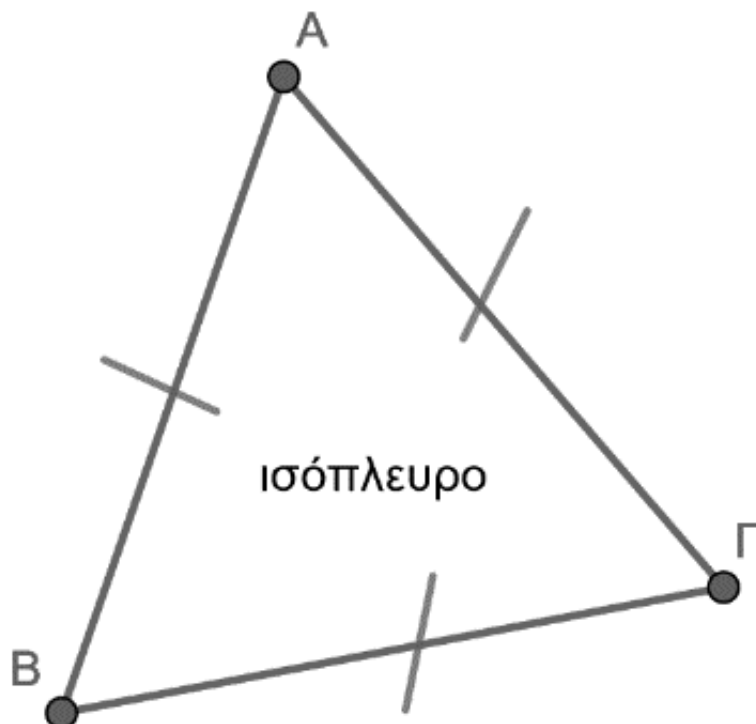
ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

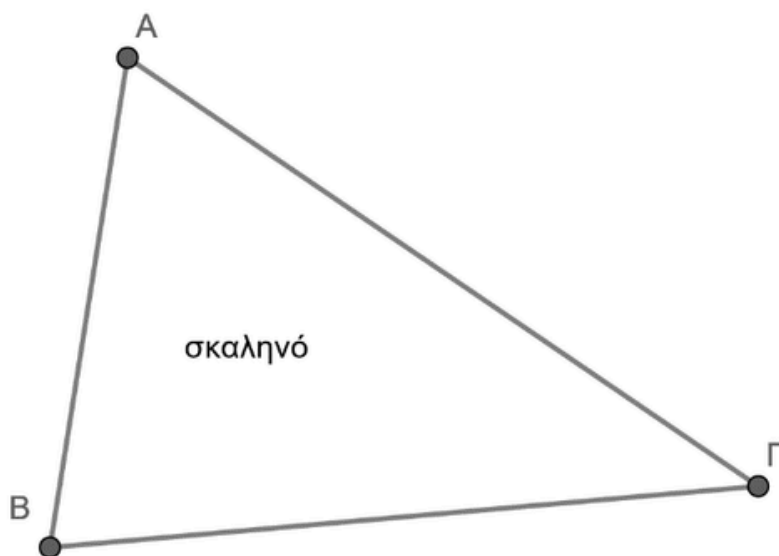
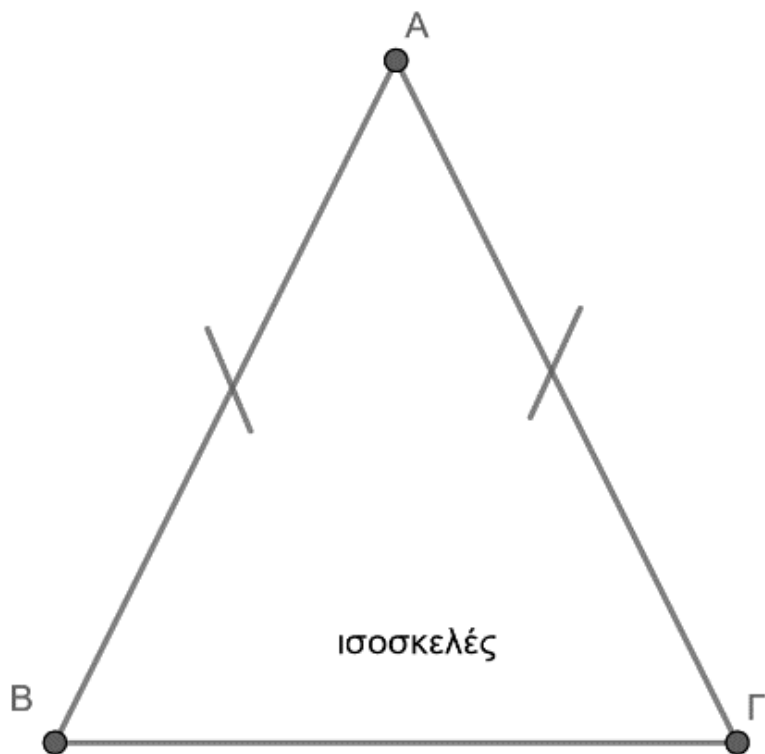
2. Πως διακρίνουμε τα τρίγωνα ανάλογα με τις πλευρές τους;

Σκαληνό → όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες.

Ισοσκελές → όταν έχει δύο πλευρές του ίσες. (Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$ η πλευρά ΒΓ λέγεται βάση του και το Α κορυφή του.)

Ισόπλευρο → όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες.



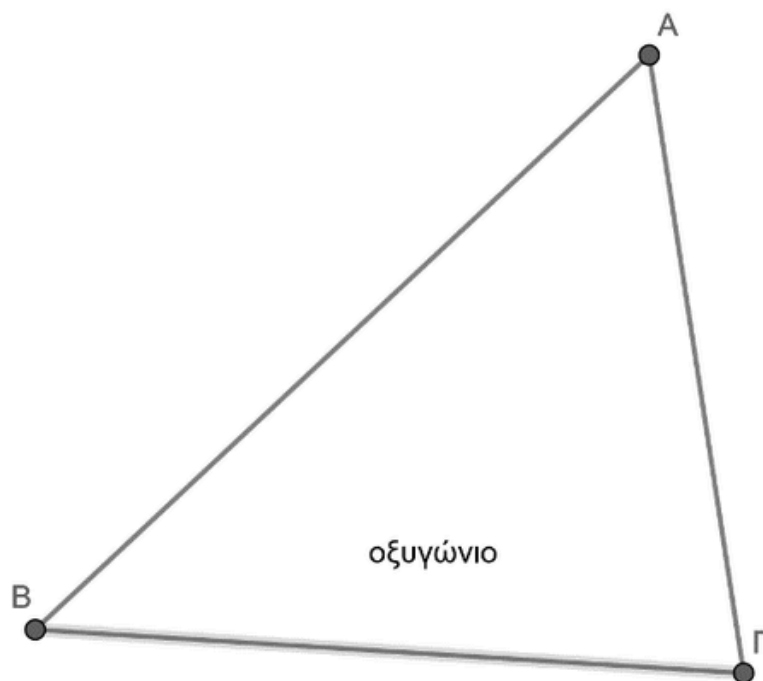
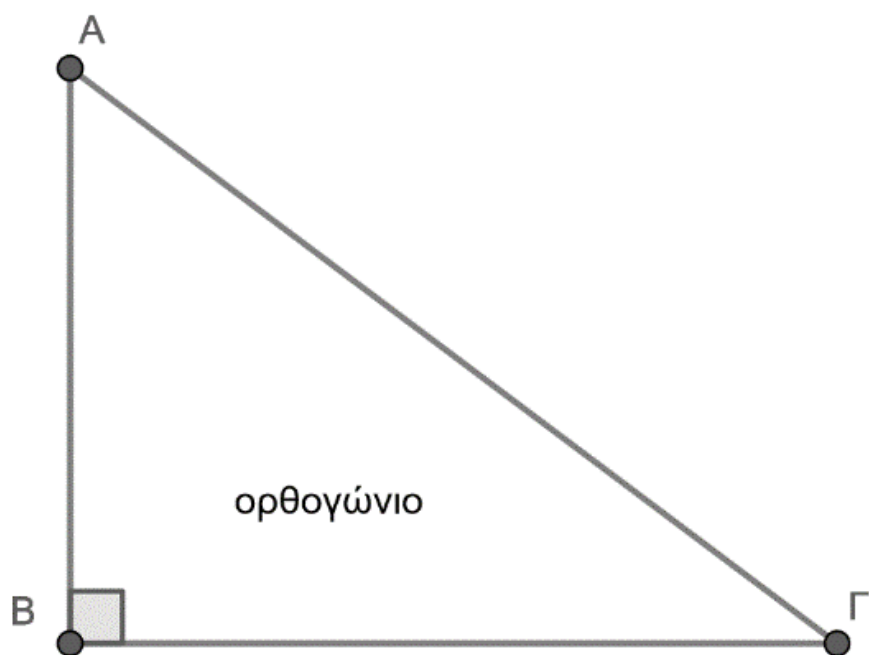
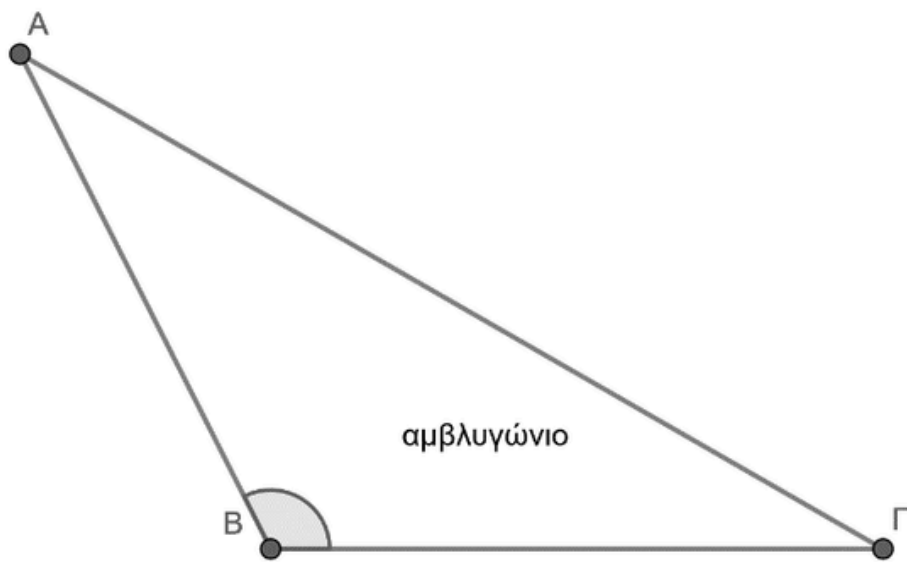


3. Πως διακρίνουμε τα τρίγωνα ανάλογα με τις γωνίες τους;

Οξυγώνιο → όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.

Ορθογώνιο → όταν έχει μια γωνία ορθή. (Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται υποτείνουσα και οι άλλες δύο λέγονται κάθετες πλευρές του τριγώνου.)

Αμβλυγώνιο → όταν έχει μια γωνία αμβλεία.

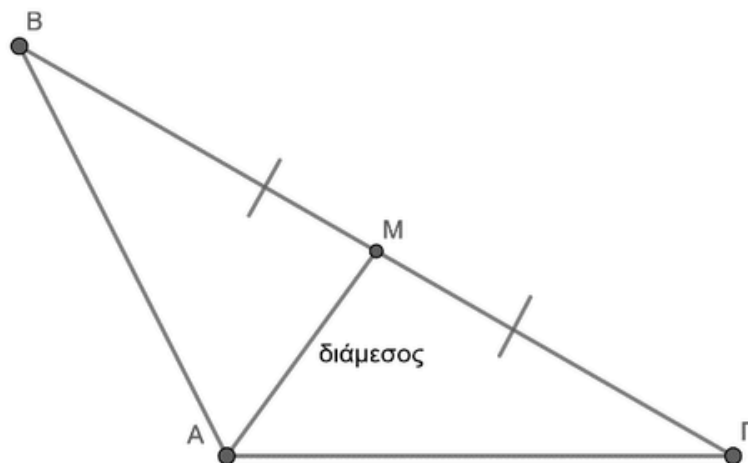


4. Ποια είναι τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου;

Τα δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου είναι η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος.

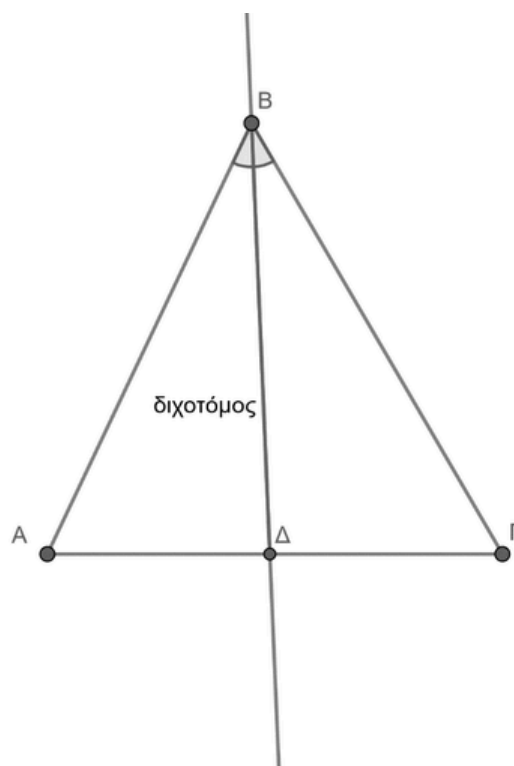
5. Τι ονομάζουμε διάμεσο τριγώνου;

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.



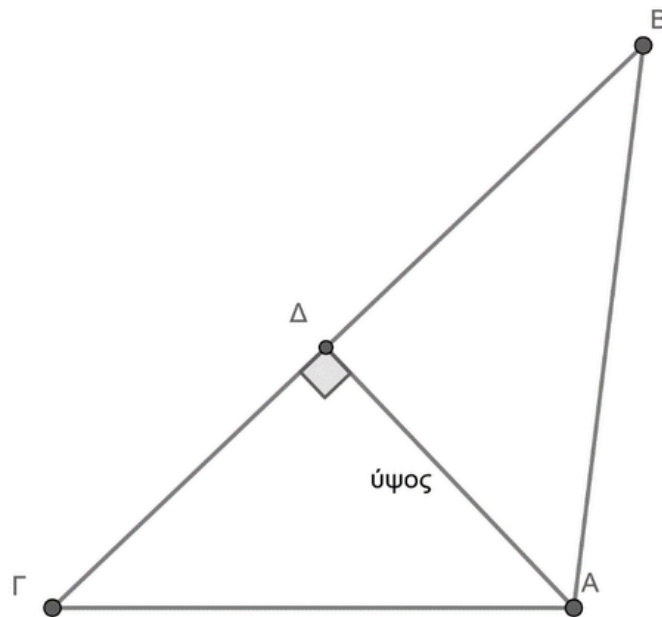
6. Τι ονομάζουμε διχοτόμο τριγώνου;

Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.



7. Τι ονομάζουμε ύψος τριγώνου;

Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Αν το $A\Delta$ είναι το ύψος από την κορυφή A τότε το σημείο Δ λέγεται **προβολή** του A πάνω στην ευθεία της πλευράς $B\Gamma$.



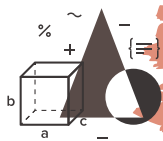
8. Τι ισχύει για ίσα τρίγωνα;

- Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.
- Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.

Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται **αντίστοιχες** ή **ομόλογες**.



Ενότητα 3η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



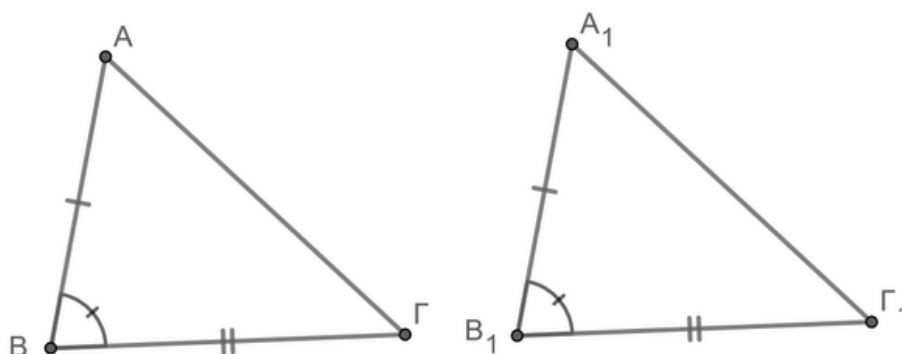
2. 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων



Θεώρημα (1ο Κριτήριο - ΠΓΠ)

ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

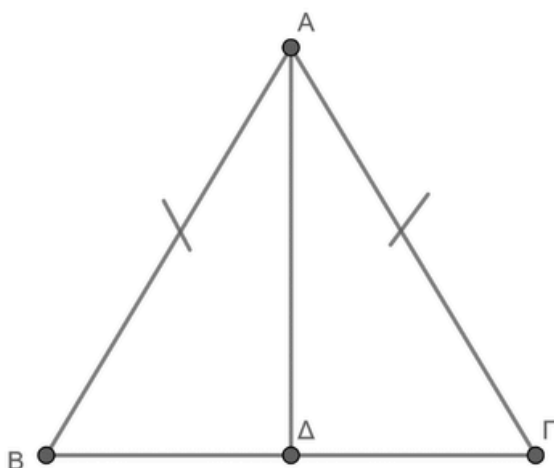


ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB=AG$ φέρνουμε την διχοτόμο ΑΔ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ.

Αυτά έχουν:

→ $AB=AG$

→ ΑΔ κοινή πλευρά

→ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, αφού ΑΔ διχοτόμος

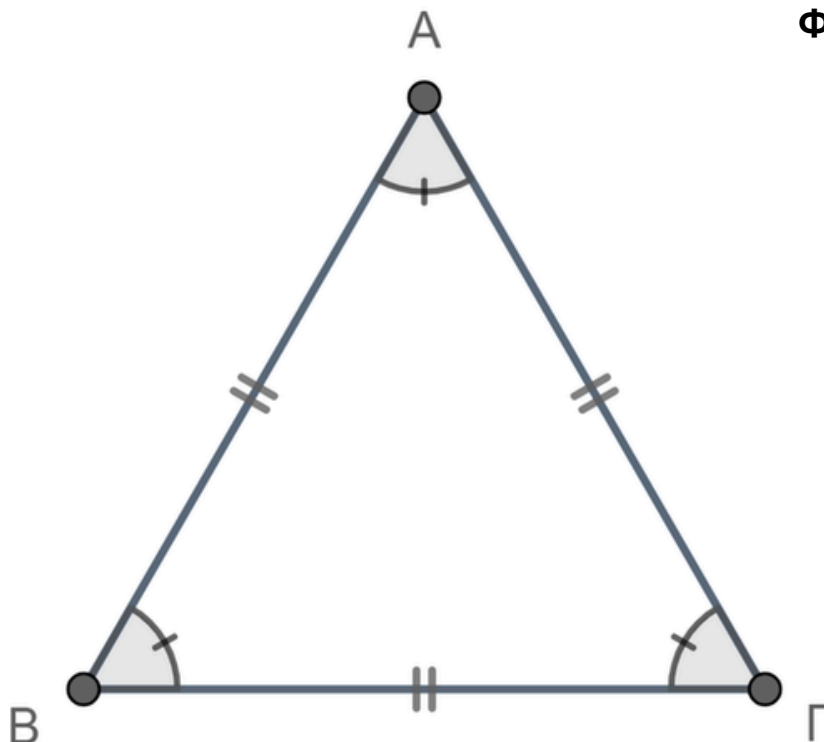
Άρα σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

• Συνεπώς τα δύο τρίγωνα έχουν $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή **οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.**

• Επίσης $BD=ΔΓ$, άρα η ΑΔ είναι και διάμεσος, $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ και $\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2$ παραπληρωματικές άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$ άρα η **ΑΔ είναι και ύψος.**

ΠΟΡΙΣΜΑ

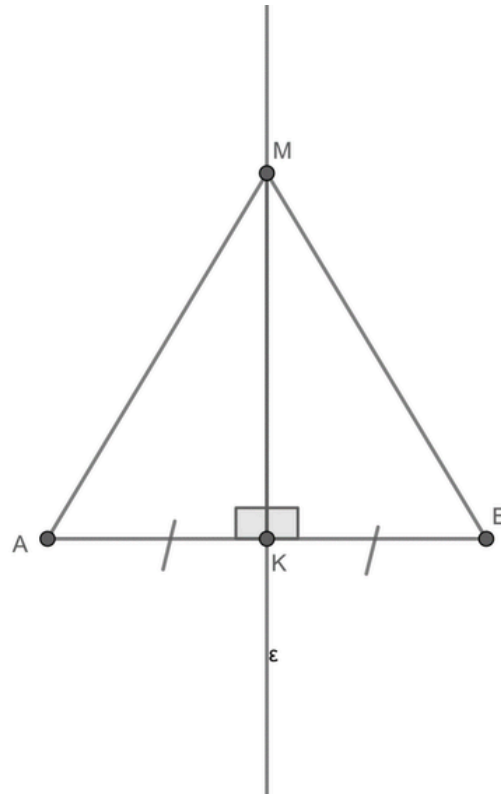
Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.



ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Στο ευθύγραμμο τμήμα AB φέρουμε την μεσοκάθετο ε και επιλέγουμε τυχαίο σημείο της M.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AKM και BKM.

Αυτά έχουν:

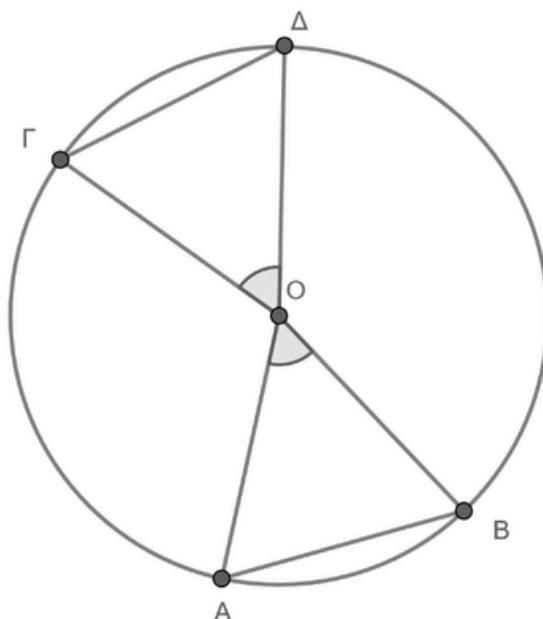
- $AK=KB$ (η ε είναι μεσοκάθετος)
- $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90^\circ$ (η ε είναι μεσοκάθετος)
- KM κοινή πλευρά

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Συνεπώς $AM=BM$, δηλαδή **κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.**

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.



Τα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, άρα οι γωνίες $\Delta\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}B$ θα είναι ίσες.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AOB και AOG.

Αυτά έχουν:

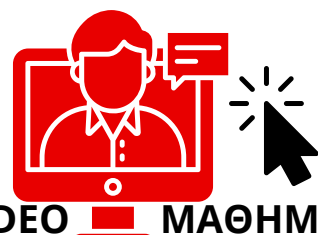
- $OA=OD$ (ακτίνες κύκλου)
- $OB=O\Gamma$ (ακτίνες κύκλου)
- $\Delta\hat{O}\Gamma = A\hat{O}B$ (από υπόθεση)

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Συνεπώς $AB=\Delta\Gamma$ και προκύπτει ότι **όταν τα τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε είναι ίσες και οι αντίστοιχες χορδές.**

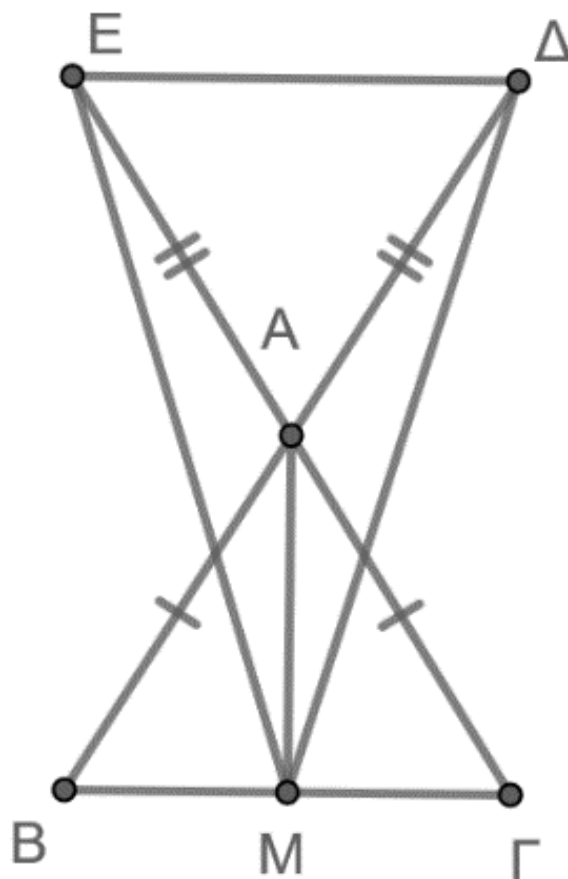


Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) παίρνουμε ίσες προεκτάσεις AD και AE . Αν AM διχοτόμος της κορυφής A , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MDE είναι ισοσκελές.



Για να αποδείξουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αρκεί να βρούμε δυο πλευρές του ίσες.

Στο σχήμα παρατηρούμε ότι στην κορυφή A έχουμε:

$\rightarrow \hat{EAB} = \hat{DAG}$, ως κατακορυφήν $\rightarrow$ οπότε έχουμε $\hat{EAM} = \hat{DAM}$
 $\rightarrow \hat{BAM} = \hat{GAM}$, αφού AM διχοτόμος $\rightarrow$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα EAM και DAM .

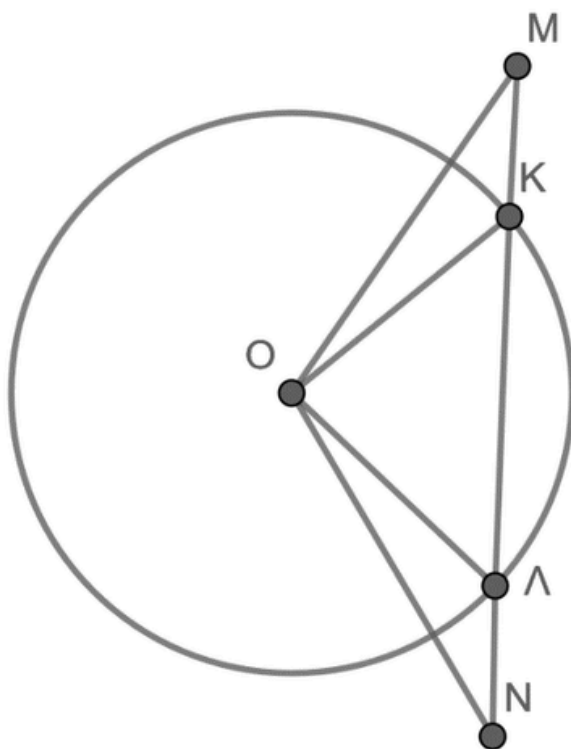
Αυτά έχουν:

$\rightarrow AM$ κοινή
 $\rightarrow EA=DA$ (από υπόθεση)
 $\rightarrow \hat{EAM} = \hat{DAM}$

Άρα σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Συνεπώς $EM=DM$ και το τρίγωνο EMD είναι ισοσκελές.

2. Προεκτείνουμε την χορδή ΚΛ του κύκλου κατά ίσα τμήματα ΚΜ και ΛΝ. Να αποδείξετε τα τρίγωνα ΟΚΜ και ΟΛΝ είναι ίσα.



Στο σχήμα παρατηρούμε ότι το τρίγωνο ΟΚΛ είναι ισοσκελές ($OK=OL$, ακτίνες κύκλου). Συνεπώς οι γωνίες $\hat{ΛΚΟ}$ και $\hat{ΚΛΟ}$ θα είναι ίσες (προσκείμενες γωνίες σε βάση ισοσκελούς τριγώνου).

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΜΚΟ και ΝΛΟ.

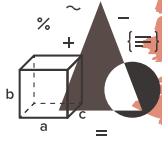
Αυτά έχουν:

- $OK=OL$ (ακτίνες κύκλου)
- $KM=LN$ (υπόθεση)
- $\hat{ΜΚΟ} = \hat{ΝΛΟ}$ (παραπληρωματικές γωνίες ίσων γωνιών)

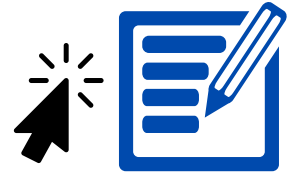
Άρα σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



Ενότητα 3η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



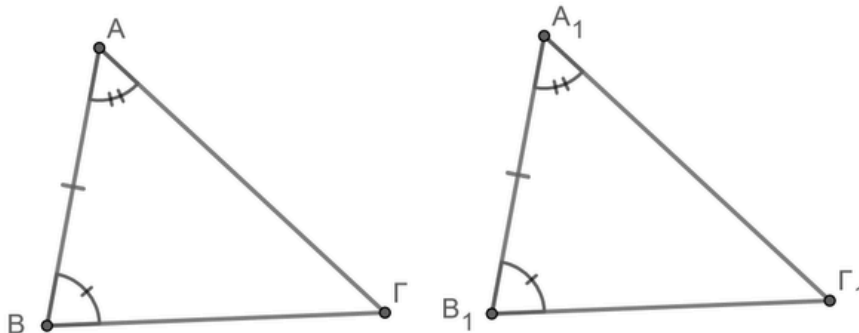
3: 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων -
4: 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

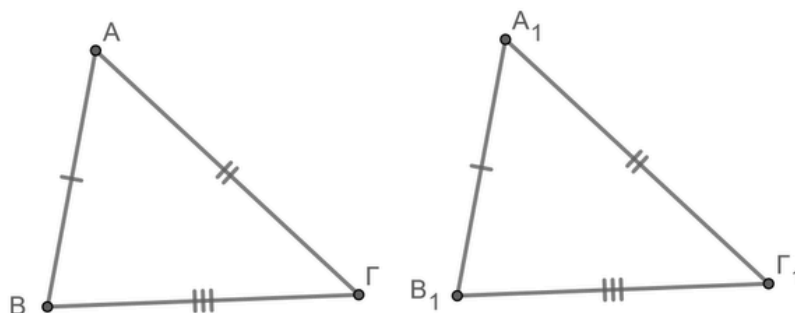
Θεώρημα (2ο Κριτήριο - ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Θεώρημα (3ο Κριτήριο - ΠΠΠ)

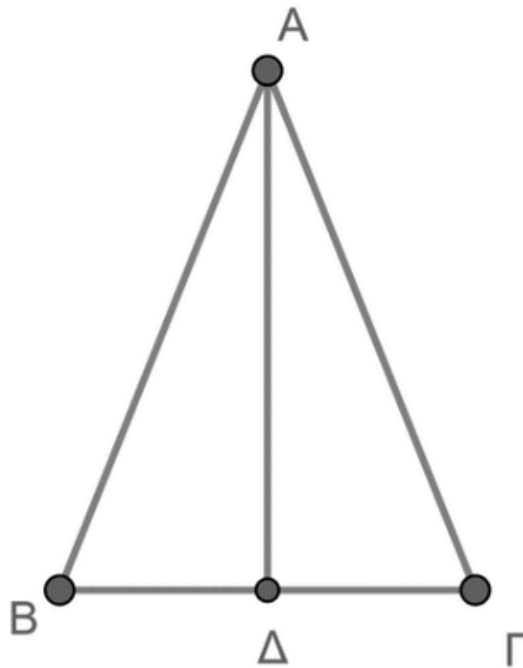
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



ΠΟΡΙΣΜΑ

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Φέρουμε την ΑΔ, διάμεσο του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.

Αυτά έχουν:

→ $AB = AG$ (ΑΒΓ ισοσκελές)

→ $BD = DG$ (ΑΔ διάμεσος)

→ ΑΔ κοινή

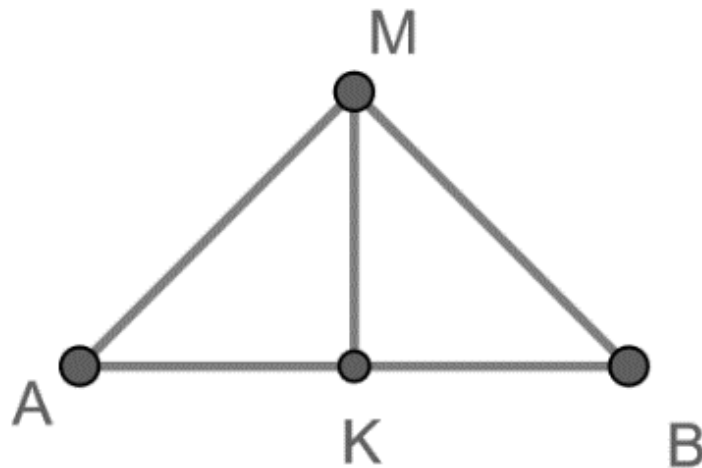
Άρα από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα.

Συνεπώς για τις γωνίες θα έχουμε $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{G}\hat{A}\hat{D}$ άρα **ΑΔ διχοτόμος** και $\hat{A}\hat{D}\hat{B} = \hat{A}\hat{D}\hat{G} = 90^\circ$ άρα **ΑΔ ύψος**.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Στο ευθύγραμμο τμήμα AB παίρνουμε K το μέσο και M ένα σημείο που ισαπέχει από τα A, B.

Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα AMK και BMK.

Αυτά έχουν:

- $AK=KB$ (K μέσο του AB)
- MK κοινή πλευρά
- $AM=BM$ (από υπόθεση)

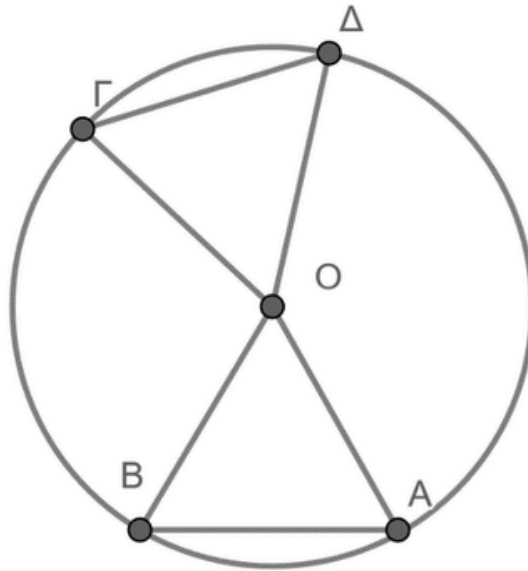
Άρα από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα AKM και BKM είναι ίσα.

Συνεπώς το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές με $AM=MB$ και MK διάμεσο. Όμως ξέρουμε ήδη ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και ύψος. Δηλαδή **η MK είναι ύψος και διάμεσος, δηλαδή είναι μεσοκάθετος.**

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $OΔΓ$ και OAB .

Αυτά έχουν:

- $OD=OB$ (ακτίνες κύκλου)
- $OA=OΓ$ (ακτίνες κύκλου)
- $AB=ΔΓ$ (ίσες χορδές από υπόθεση)

Άρα από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα OAB και $OΔΓ$ είναι ίσα.

Συνεπώς για τις γωνίες θα έχουμε $\widehat{ΓΟΔ} = \widehat{ΑΟΒ}$ και **τα αντίστοιχα τόξα $\widehat{ΔΓ}, \widehat{ΑΒ}$ θα είναι ίσα.**

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

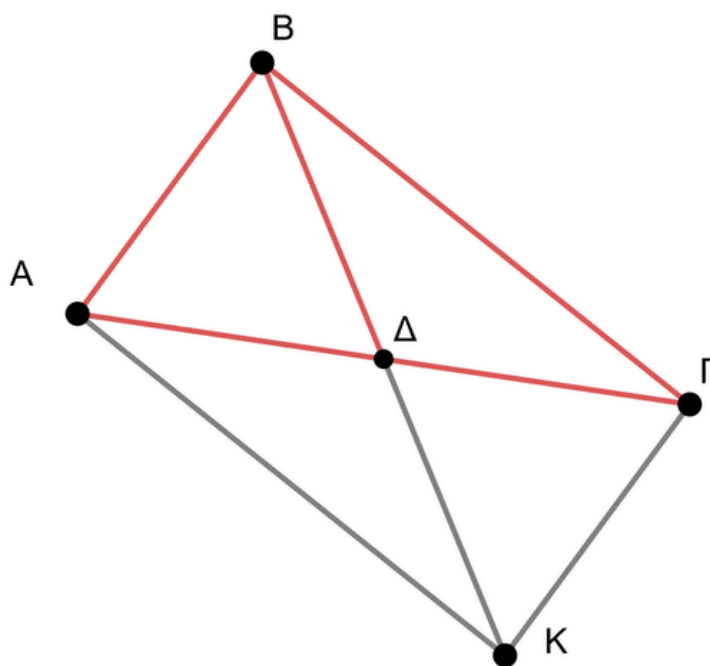


Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε την διάμεσο $B\Delta$ κατά ίσο τμήμα ΔK . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma K$ είναι ίσα.



Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε απευθείας τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AK\Gamma$ γιατί δεν έχουμε αρκετές πληροφορίες.

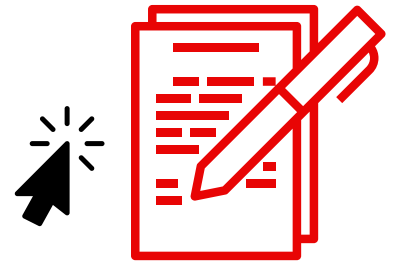
Θα συγκρίνουμε πρώτα τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $K\Gamma\Delta$.

Αυτά έχουν:

→ $A\Delta = \Delta\Gamma$ ($B\Delta$ διάμεσος)

→ $B\Delta = \Delta\Gamma$ (από υπόθεση)

→ $\hat{A}\hat{\Delta}B = \hat{K}\hat{\Delta}\Gamma$ (κατακορυφήν γωνίες)



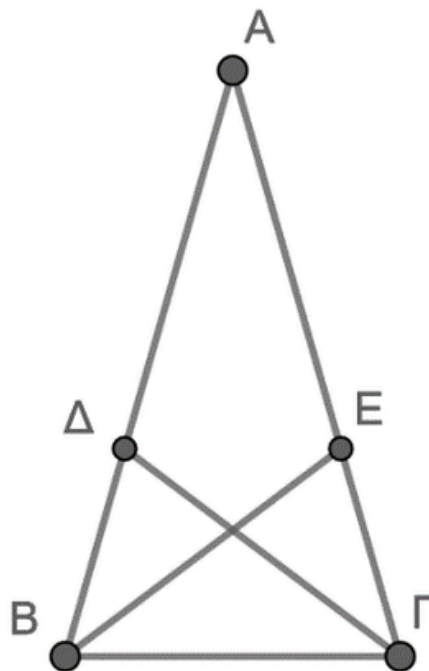
ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Άρα από το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τρίγωνα $B\Gamma\Delta = \Delta\Delta\Gamma$.

Πλέον μπορούμε να συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$. Από το κριτήριο ΠΠΠ προκύπτει ότι είναι ίσα.

2. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.



Οι ΒΕ και ΓΔ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ.

Αυτά έχουν:

- ΒΓ κοινή πλευρά
- $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ισοσκελές τρίγωνο)
- $\Delta\hat{\Gamma}B = E\hat{B}\Gamma$ (μισά ίσων γωνιών)



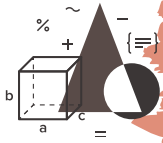
Άρα από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Συνεπώς αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες πλευρές, δηλαδή $\Gamma\Delta = \text{ΒΕ}$, άρα **οι διχοτόμοι γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.**





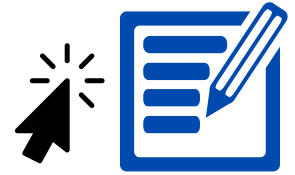
Ενότητα 3η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



- 5. Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου -
- 6. Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ

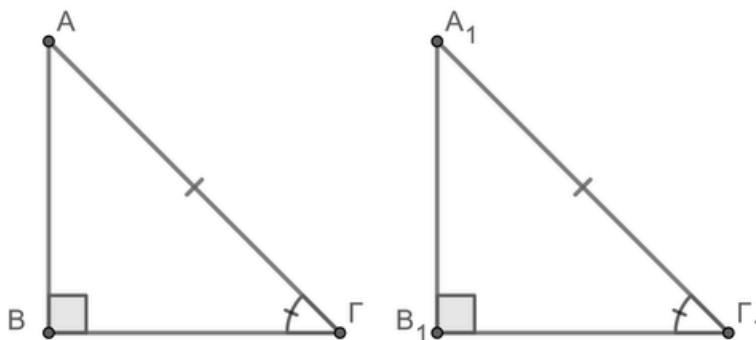
Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.



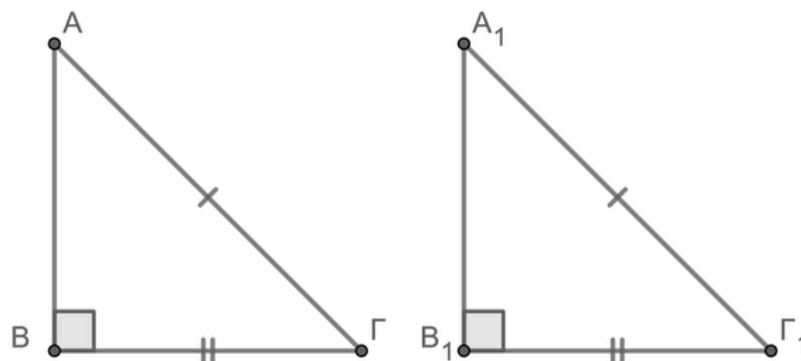
ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

1. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



2. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



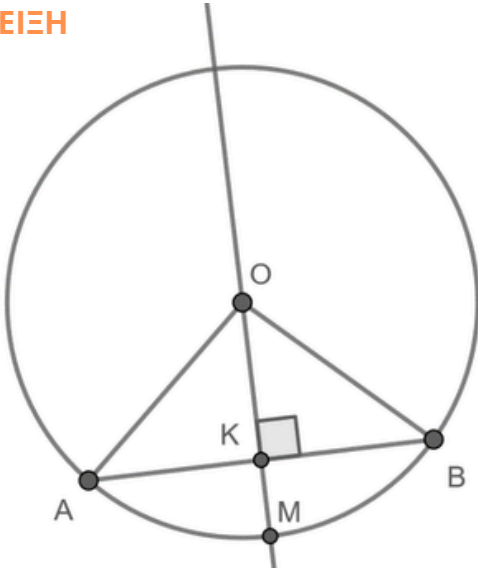
ΠΟΡΙΣΜΑ

Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Θα μελετήσουμε το τρίγωνο OAB . Αυτό είναι ισοσκελές, $OA=OB$ (ακτίνες) και OK ύψος.

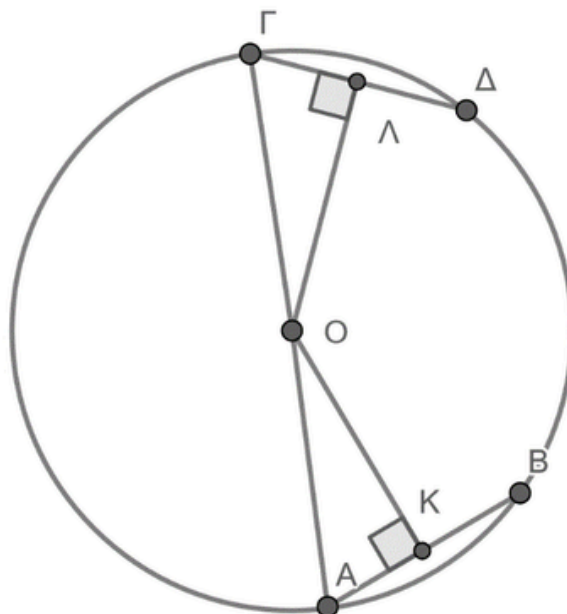
Γνωρίζουμε ότι OK πέρα από ύψος θα είναι διάμεσος της βάσης και διχοτόμος της κορυφής.

Συνεπώς για τις γωνίες παίρνουμε $\widehat{AOK} = \widehat{BOK}$, οπότε και για τα τόξα θα έχουμε: τόξο $\widehat{AM} = \widehat{MB}$.

Για την χορδή AB παίρνουμε ότι **K μέσο και $AK=KB$** .

ΘΕΩΡΗΜΑ

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.



Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα θα χρειαστεί να δείξουμε τόσο τον ευθύ όσο και τον αντίστροφο ισχυρισμό.

- Αν υποθέσουμε ότι οι χορδές AB και $\Delta\Gamma$ είναι ίσες. Τότε θα συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα OAK και $OL\Gamma$.

Αυτά έχουν:

- $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$
- $OA=O\Gamma$ (ακτίνες κύκλου)
- $AK=\Gamma\Delta$ (μισά ίσων ευθύγραμμων τμημάτων)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και $OK=OL$.

Δηλαδή σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα αποστήματα.

- Αν υποθέσουμε ότι τα αποστήματα OL και OK είναι ίσα. Τότε θα συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα OAK και $OL\Gamma$.

Αυτά έχουν:

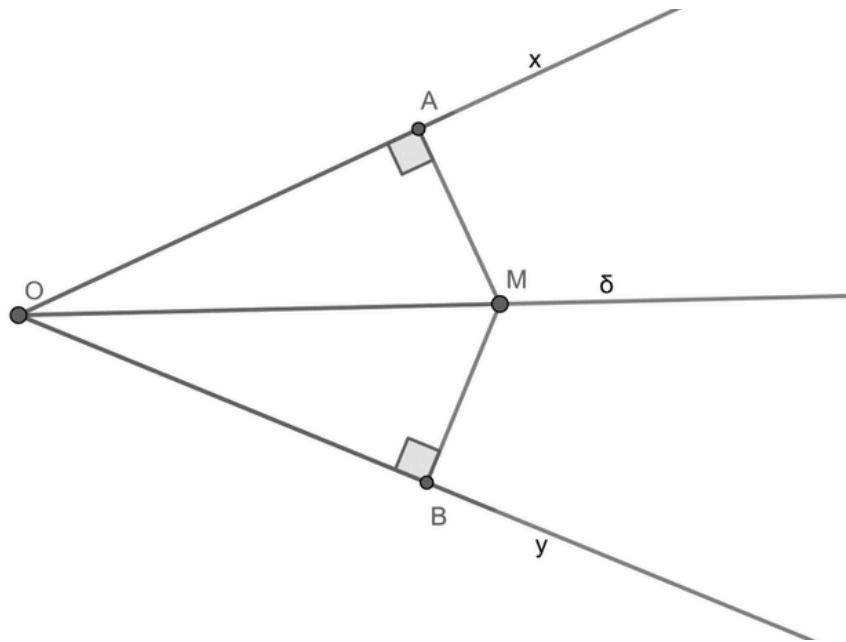
- $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$
- $OK=OL$
- $OA=O\Gamma$ (ακτίνες κύκλου)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και $AK=\Lambda\Gamma$ και επειδή K και Λ μέσα, $AB=\Delta\Gamma$.

Δηλαδή σε ίσα αποστήματα αντιστοιχούν ίσες χορδές.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.



- Αν υποθέσουμε ότι το σημείο M είναι σημείο της διχοτόμου O_δ , θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα AOM και BOM.

Αυτά έχουν:

- $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$
- OM κοινή πλευρά
- $\hat{AOM} = \hat{BOM}$, αφού O_δ διχοτόμος.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και $AM=MB$, δηλαδή το **σημείο M ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας**.

- Αν υποθέσουμε ότι το σημείο M ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας, θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα AOM και BOM.

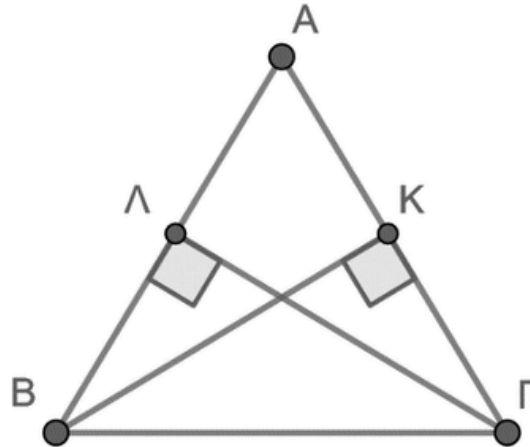
Αυτά έχουν:

- OM κοινή
- $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$
- $AM=MB$ (το M ισαπέχει)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και ισχύει $\hat{AOM} = \hat{BOM}$, δηλαδή η O_δ **διχοτόμος της γωνίας**.



1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και τα ύψη του BK και GL . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $BK\Gamma$ και GLB είναι ίσα και $AK=AL$.



Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $BK\Gamma$ και GLB .

Αυτά έχουν:

$$\rightarrow \hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$$

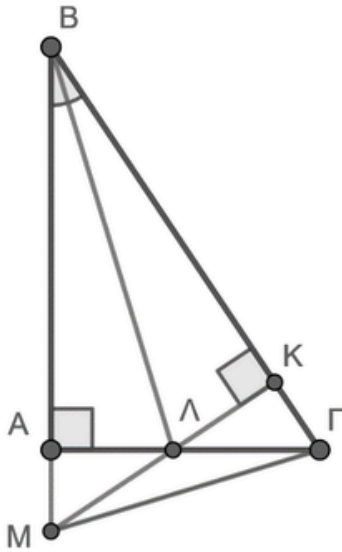
$\rightarrow B\Gamma$ κοινή πλευρά

$$\rightarrow \hat{B} = \hat{G} \text{ (γωνίες ισοσκελούς τριγώνου)}$$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

Συνεπώς $BL=GK$ και επειδή $AB=AG$ βρίσκουμε ότι $AL=AK$.

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, φέρουμε τη διχοτόμο BL . Από το σημείο L σχεδιάζουμε $LK \perp B\Gamma$, που τέμνει την AB στο M . Να αποδείξετε ότι $BM\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο.



Για να αποδείξουμε ότι $AB\Gamma$ ισοσκελές αρκεί να δείξουμε ότι $BM = B\Gamma$.

- Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABL και $B\Lambda K$.

Αυτά έχουν:

- $\hat{A} = \hat{K} = 90^\circ$
- BL κοινή πλευρά
- $\hat{A}\hat{B}L = \hat{L}\hat{B}K$ (BL διχοτόμος)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και $AB = BK$, $AL = LK$.

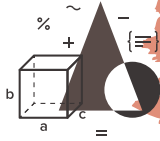
- Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα AML και $K\Gamma L$.

Αυτά έχουν:

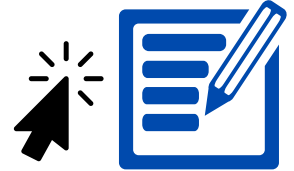
- $\hat{A} = \hat{K} = 90^\circ$
- $\hat{A}\hat{L}M = \hat{K}\hat{L}\Gamma$ (κατακορυφήν γωνίες)
- $AL = LK$ (από το προηγούμενο ερώτημα)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και $AM = K\Gamma$

- Τελικά παίρνουμε $BA + AM = BK + K\Gamma$, δηλαδή $BM = B\Gamma$ και $BM\Gamma$ ισοσκελές.



7. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι: Κύκλος - Μεσοκάθετος - Διχοτόμος



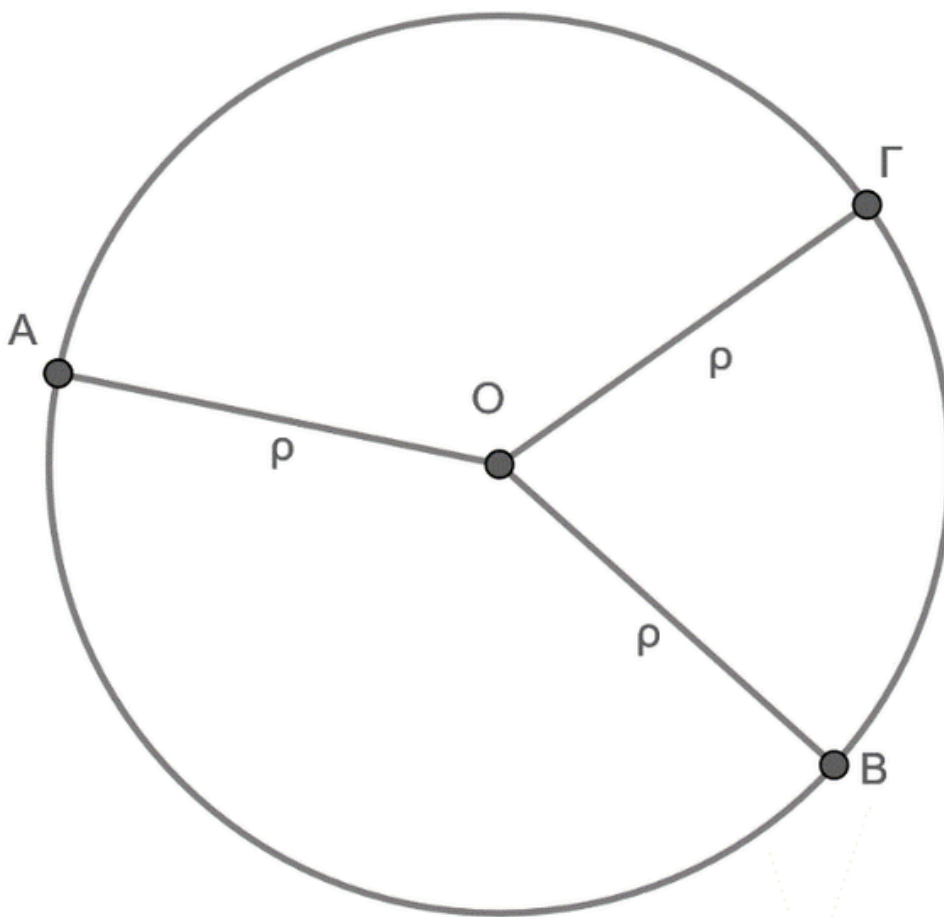
ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε γεωμετρικό τόπο;

Γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα.

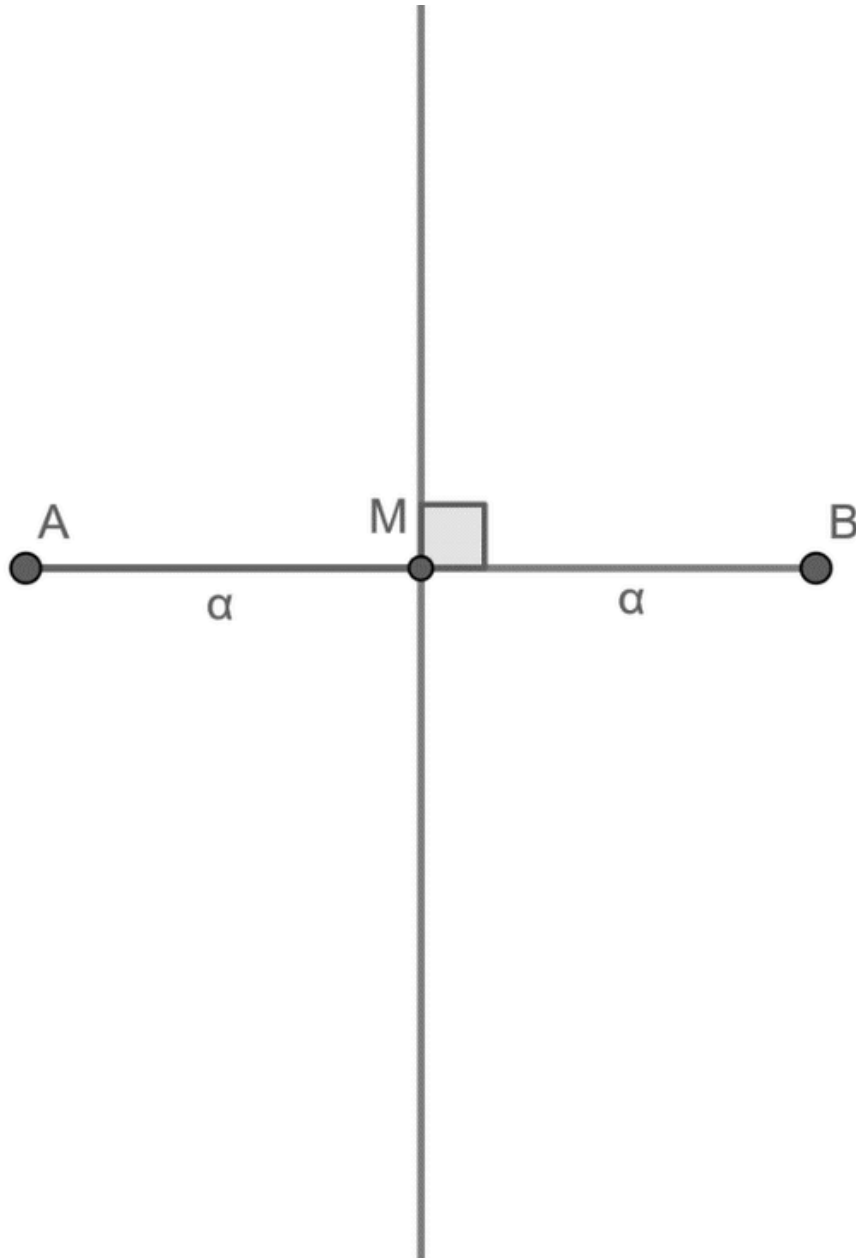
2 Είναι ο κύκλος γεωμετρικός τόπος;

Ο κύκλος είναι γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνο αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.



3. Είναι η μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος γεωμετρικός τόπος;

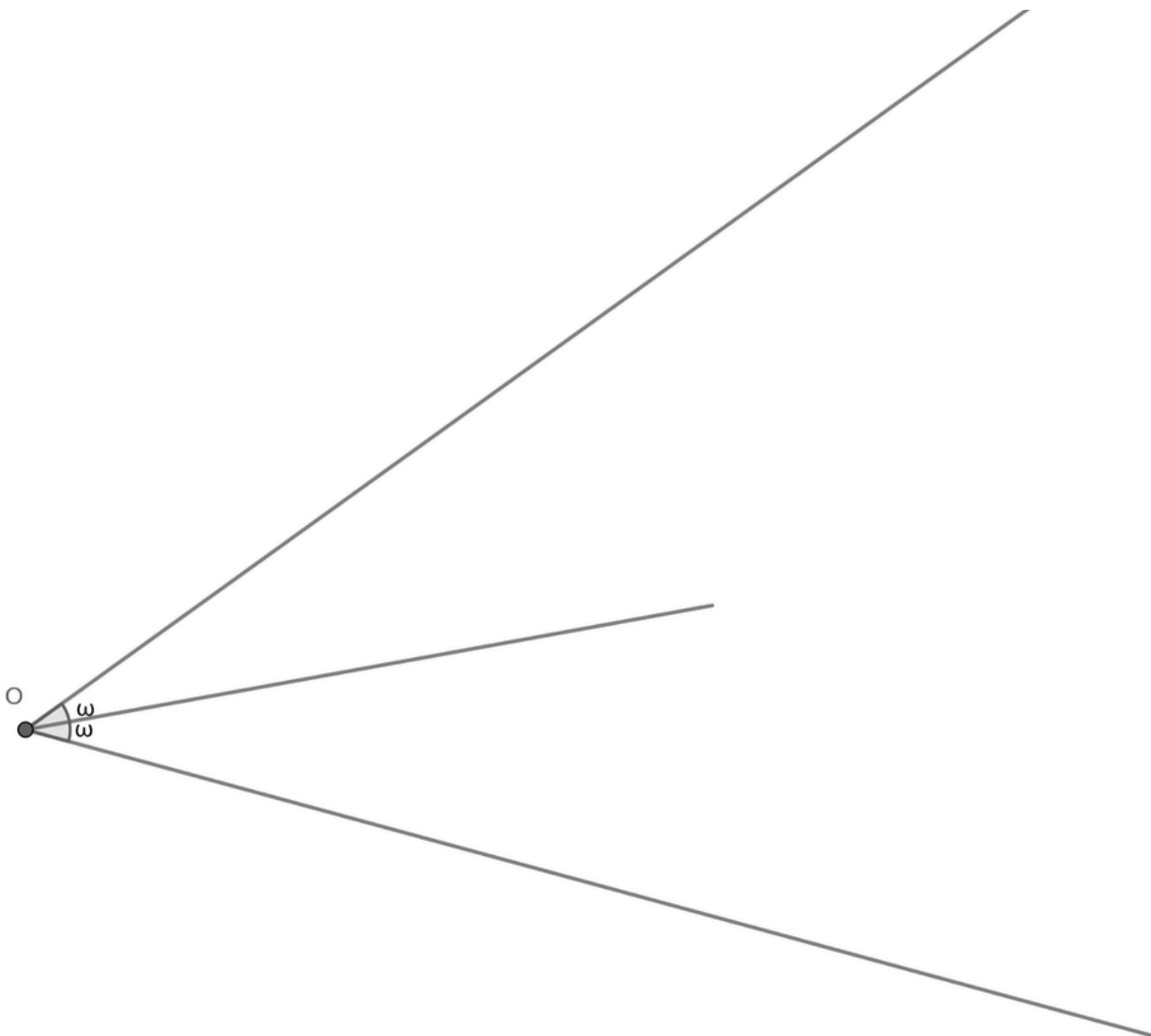
Η μεσοκάθετος ενός τμήματος είναι γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνο αυτά έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

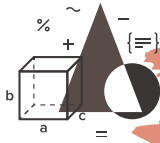


ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

4. Είναι η διχοτόμος γωνίας γεωμετρικός τόπος;

Η διχοτόμος μίας γωνίας είναι γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνο αυτά ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

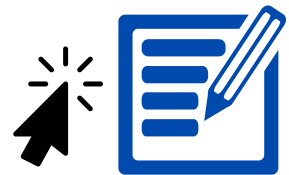
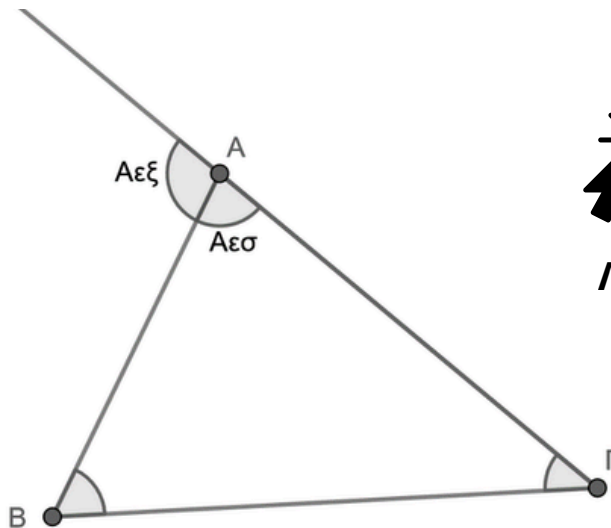




10. Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

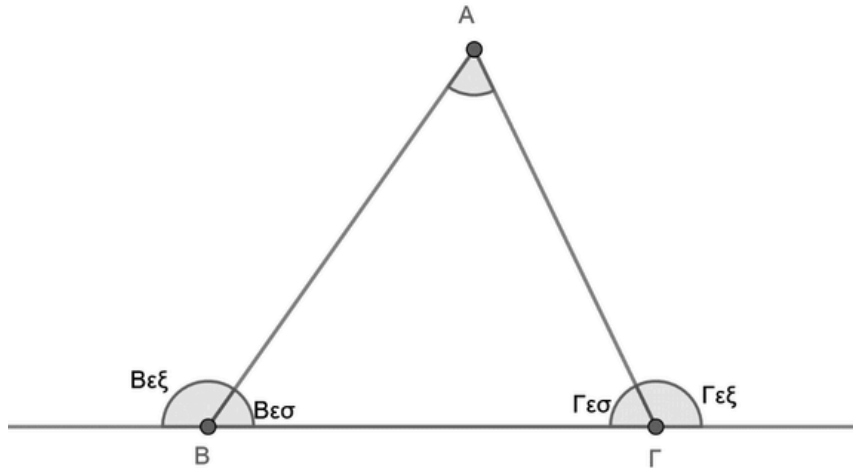
π.χ. Για τη γωνία $\widehat{A_{εξ}}$ έχουμε $\widehat{A_{εξ}} > \widehat{B}$ και $\widehat{A_{εξ}} > \widehat{\Gamma}$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- i. Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.
- ii. Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180° .



1. Αν γνωρίζετε ότι $\widehat{B_{\varepsilon\xi}} > \widehat{\Gamma_{\varepsilon\xi}}$, να αποδείξετε ότι $\widehat{B_{\varepsilon\xi}} > 90^\circ$



Θα υποθέσουμε ότι $\widehat{B_{\varepsilon\xi}} \leq 90^\circ$.

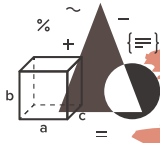
Τότε $\widehat{B_{\varepsilon\sigma}} \geq 90^\circ$, δηλαδή $\widehat{B_{\varepsilon\sigma}}$ αμβλεία ή ορθή γωνία.

Γνωρίζουμε επίσης ότι $\widehat{\Gamma_{\varepsilon\xi}} < \widehat{B_{\varepsilon\xi}} < 90^\circ$. Όπως πριν παίρνουμε $\widehat{\Gamma_{\varepsilon\sigma}} \geq 90^\circ$, δηλαδή $\widehat{\Gamma_{\varepsilon\sigma}}$ επίσης ορθή ή αμβλεία γωνία.

Όμως ξέρουμε ότι κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία, άρα καταλήξαμε σε άτοπο αποτέλεσμα και πρέπει $\widehat{B_{\varepsilon\xi}} > 90^\circ$.



Ενότητα 3η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



11. Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών - 12. Τριγωνική ανισότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ

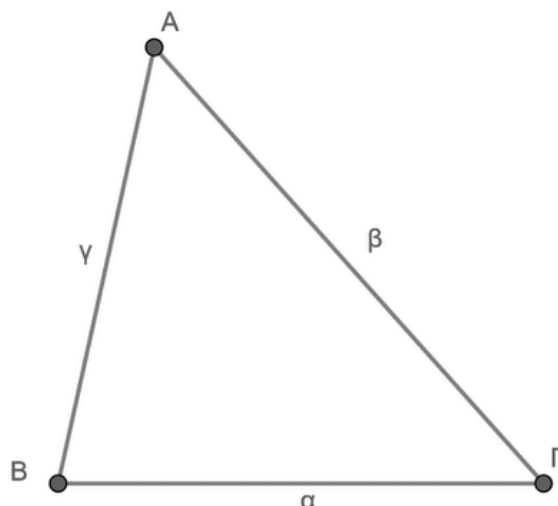
Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- i. Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
- ii. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
- iii. Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

ΘΕΩΡΗΜΑ - ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

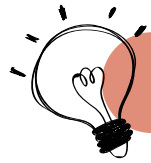


ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Στο παραπάνω τρίγωνο έχουμε $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$, για $\beta > \gamma$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Μπορεί ένα τρίγωνο να έχει πλευρές γ , $\alpha = \frac{\gamma}{4}$, $\beta = \frac{2\gamma}{3}$;

Για να έχει αυτές τις πλευρές αρκεί να ισχύει η τριγωνική ανισότητα. Για την πλευρά γ παίρνουμε:

$$\beta - \alpha < \gamma < \beta + \alpha$$

$$\frac{2\gamma}{3} - \frac{\gamma}{4} < \gamma < \frac{2\gamma}{3} + \frac{\gamma}{4}$$

$$\frac{5\gamma}{12} < \gamma < \frac{11\gamma}{12}$$

Δηλαδή βρήκαμε $1 < \frac{11}{12}$ άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τρίγωνο με τις πλευρές που αναγράφονται στην εκφώνηση της άσκησης.

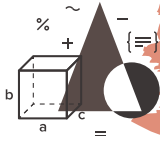
2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$.

Τι είδους γωνία είναι η γωνία $\hat{B}$;

Τι σχέση προκύπτει για την πλευρά α , αν γνωρίζουμε ότι $AG=4$;

- Η $\hat{B}$ είναι οξεία γωνία αφού είναι ίση με τη $\hat{\Gamma}$ (ισοσκελές τρίγωνο) και γνωρίζουμε ότι κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια ορθή ή αμβλεία γωνία.
- Αφού $AG=4$, καταλαβαίνουμε ότι $AB=AG=4$ και $0 < \alpha < 8$, δηλαδή για την πλευρά α έχουμε $\alpha < 8$.



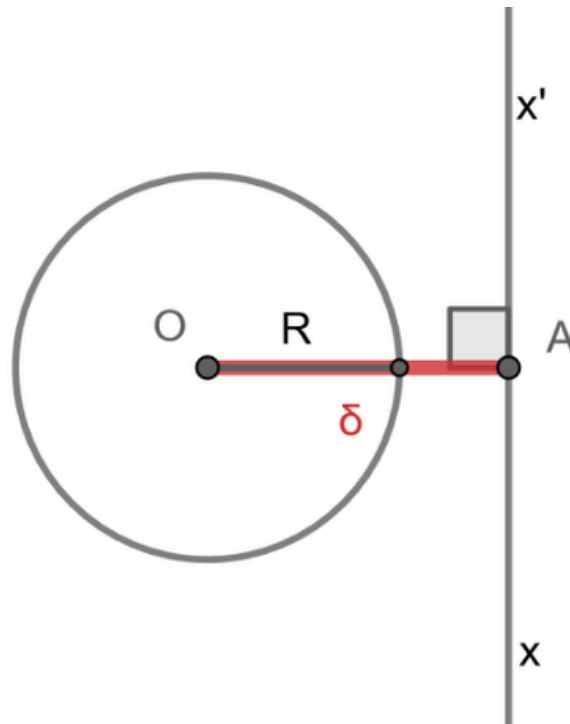


14. Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

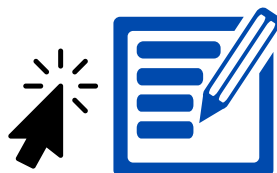
1. Ποιες σχετικές θέσεις μπορεί να έχει ένας κύκλος και μία ευθεία;

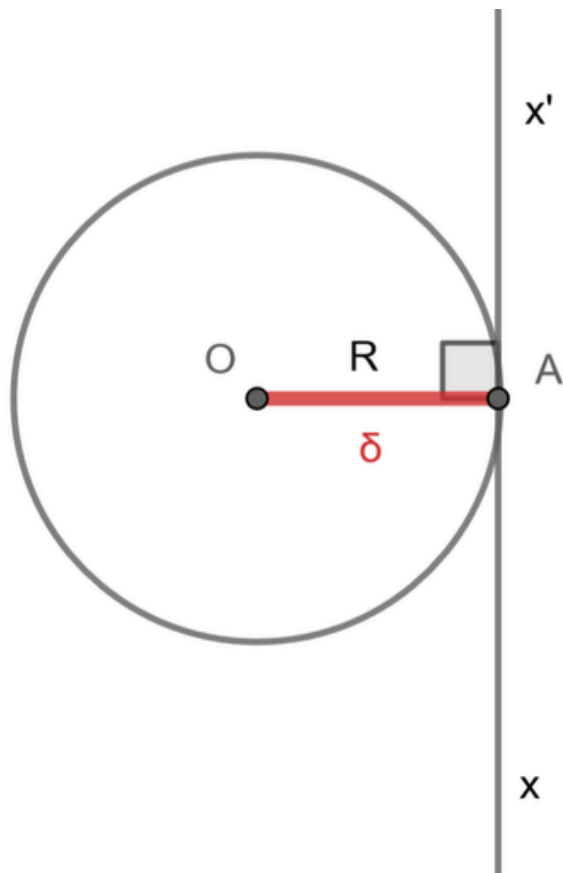
Θεωρούμε έναν κύκλο (O, R) μία ευθεία $X'X$ και την απόσταση $\delta = OA$ του κέντρου O από την ευθεία $X'X$.

- Αν $\delta > R$ η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο. Λέμε ότι η **ευθεία** είναι **εξωτερική** του κύκλου.

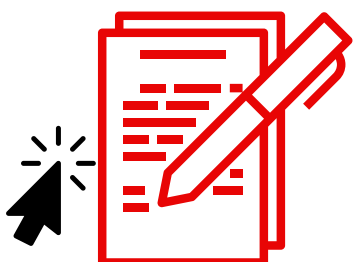
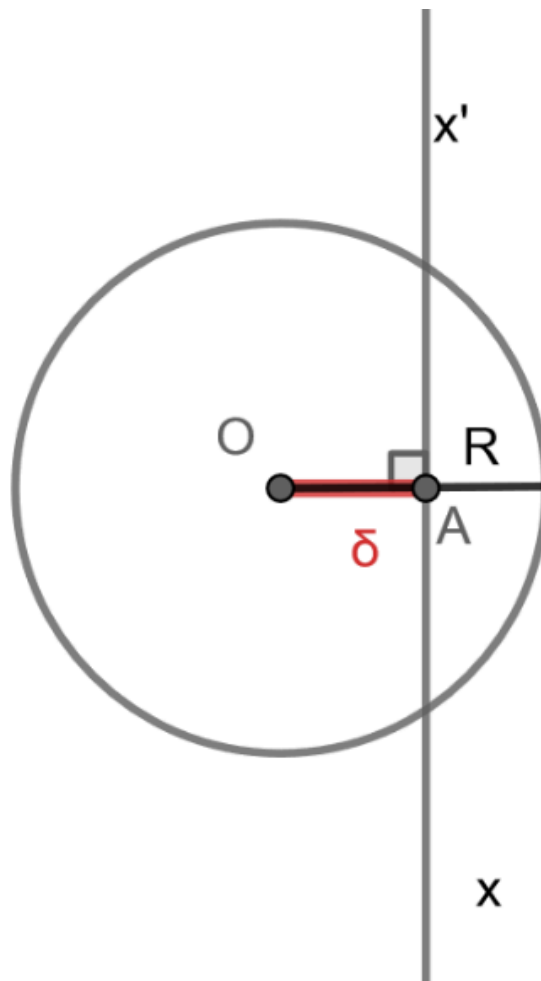


- Αν $\delta = R$ η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο. Λέμε ότι η **ευθεία εφάπτεται** του κύκλου.



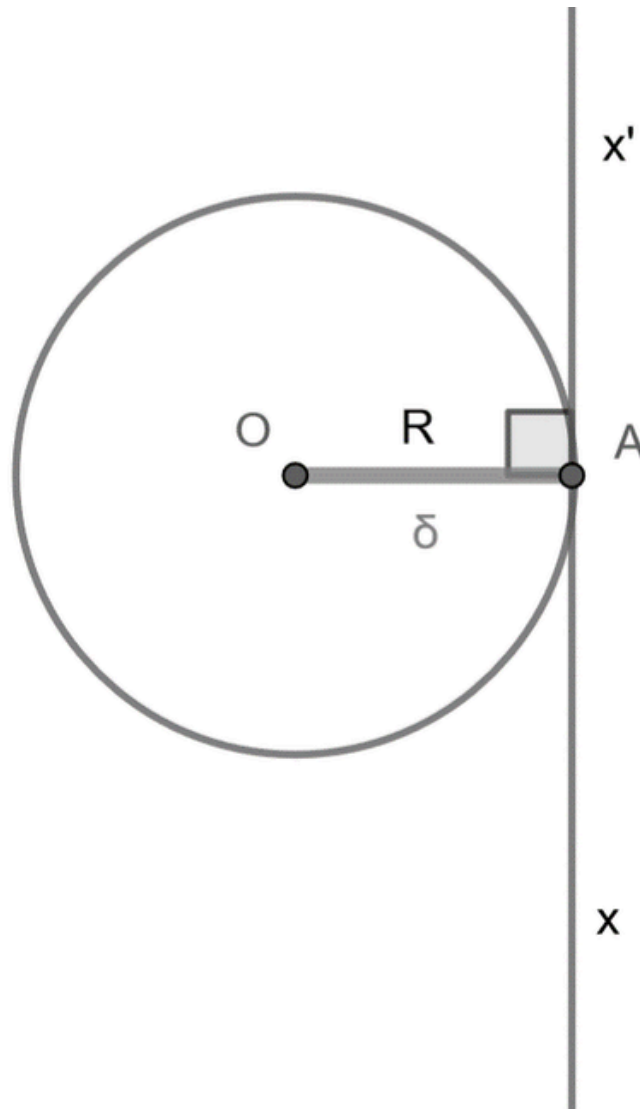


- Αν $\delta < R$, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Λέμε ότι η **ευθεία** είναι **τέμνουσα** του κύκλου.



2. Τι προκύπτει από τις σχετικές θέσεις κύκλου – ευθείας;

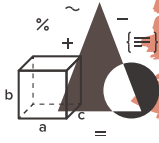
- Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη ευθεία.



- Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.

Βασισμένοι σε όλες τις παραπάνω προτάσεις μπορούμε να καταλήξουμε στο παρακάτω θεώρημα:

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

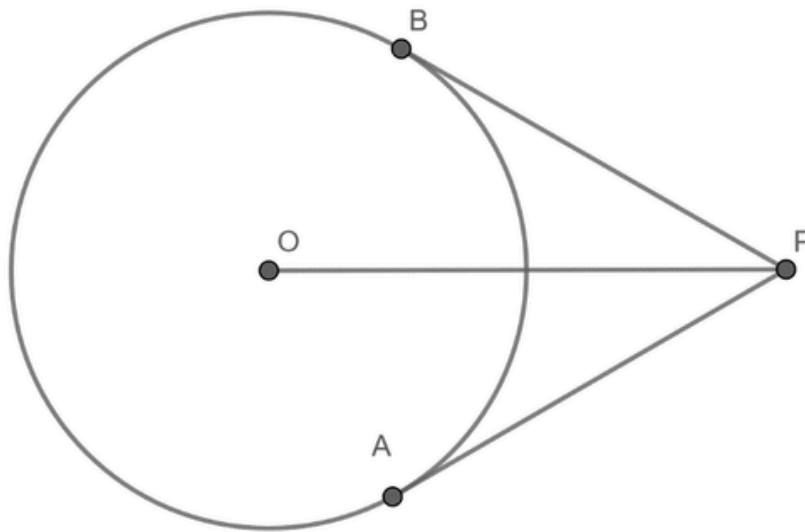


15. Εφαπτόμενα τμήματα

1. Τι ονομάζουμε εφαπτόμενα τμήματα και διακεντρική ευθεία σε κύκλο;

Έστω ένας κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο P .

Φέρουμε από το P εφαπτόμενες στον κύκλο ευθείες. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής με τον κύκλο, τότε τα τμήματα PA και PB λέγονται εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου από το σημείο P και η ευθεία PO διακεντρική ευθεία του σημείου P .

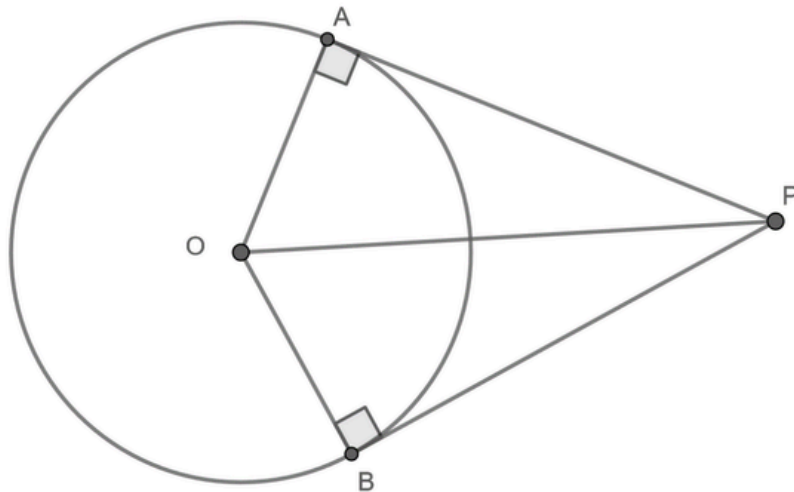


**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

Τα ευθύγραμμα τμήματα PA και PB είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου από το εξωτερικό σημείο P και η ευθεία - φορέας του PO είναι η διακεντρική ευθεία.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.



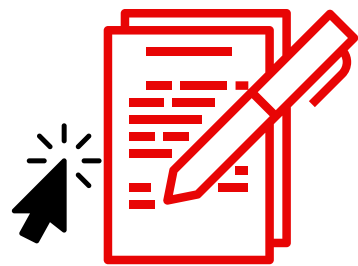
Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα AOP και BOP.

Αυτά έχουν:

→ OP κοινή πλευρά

→ $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

→ $OA = OB$ (ακτίνες κύκλου)



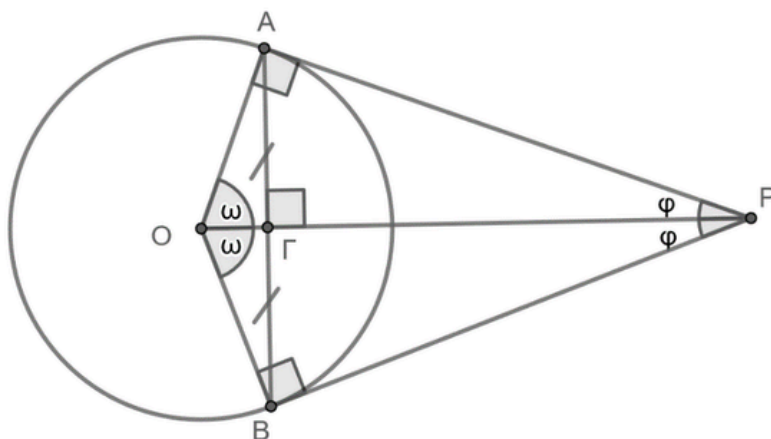
ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

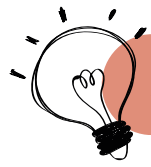
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και $PA = PB$, δηλαδή **τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που ágονται από το ίδιο σημείο είναι ίσα μεταξύ τους.**

ΠΟΡΙΣΜΑ

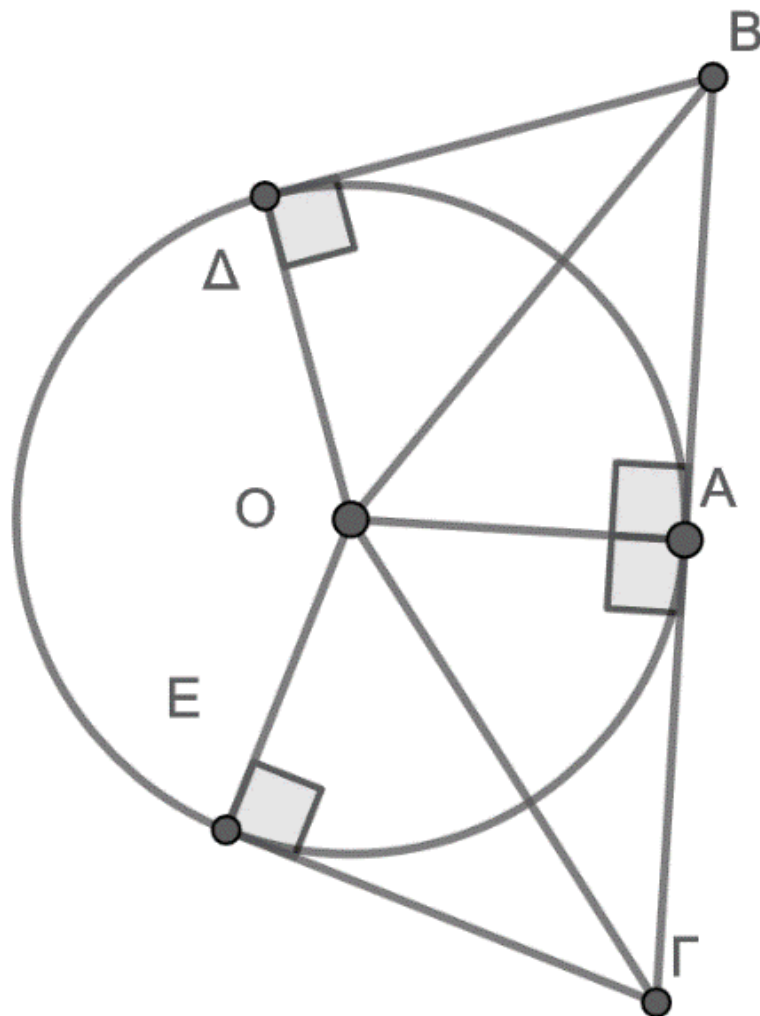
Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

- i. είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής.
- ii. διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτινών που καταλήγουν στα σημεία επαφής.





1. Το σημείο A είναι ένα σημείο του κύκλου. Στην εφαπτόμενη του ευθεία παίρνουμε σημεία B και Γ , που απέχουν ίδια απόσταση από το A . Αν από τα B και Γ φέρουμε εφαπτόμενες ευθείες προς το κύκλο, που τον τέμνουν στα σημεία Δ και E , να αποδείξετε ότι $E\Gamma = \Delta B$.



- Αρχικά θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $OA\Gamma$ και OAB .

Αυτά έχουν:

- $\hat{A} = 90^\circ$
- OA κοινή πλευρά
- $AB = A\Gamma$ (από εκφώνηση)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα.

- Τώρα θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΕΓ και ΟΔΒ.

Αυτά έχουν:

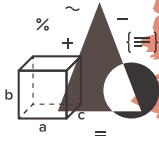
→ $OE=OD$ (ακτίνες κύκλου)

→ $\hat{E} = \hat{D} = 90^\circ$

→ $OB=OG$ (από προηγούμενο συμπέρασμα)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και $EG=ΔB$.

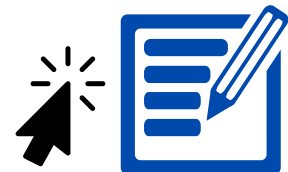
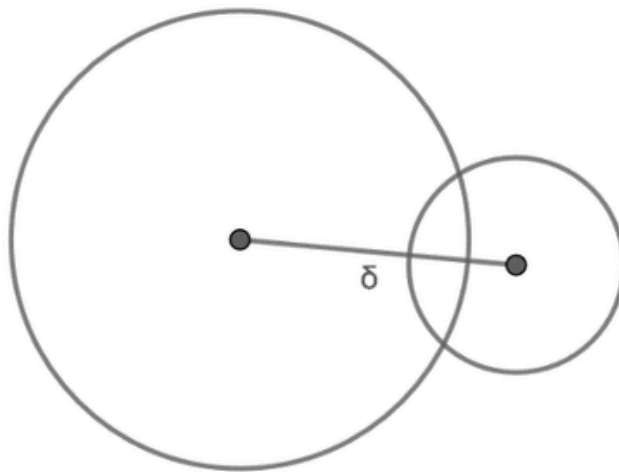




16. Σχετικές θέσεις δυο κύκλων

1. Τι ονομάζεται διάκεντρος δύο κύκλων;

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται **διάκεντρος** των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ .

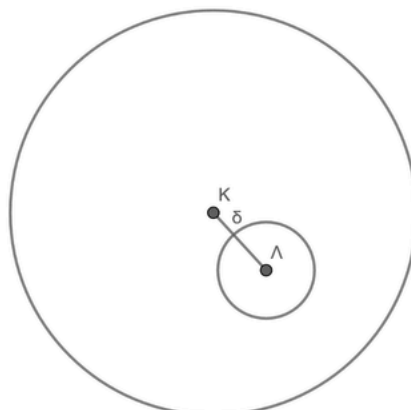


ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

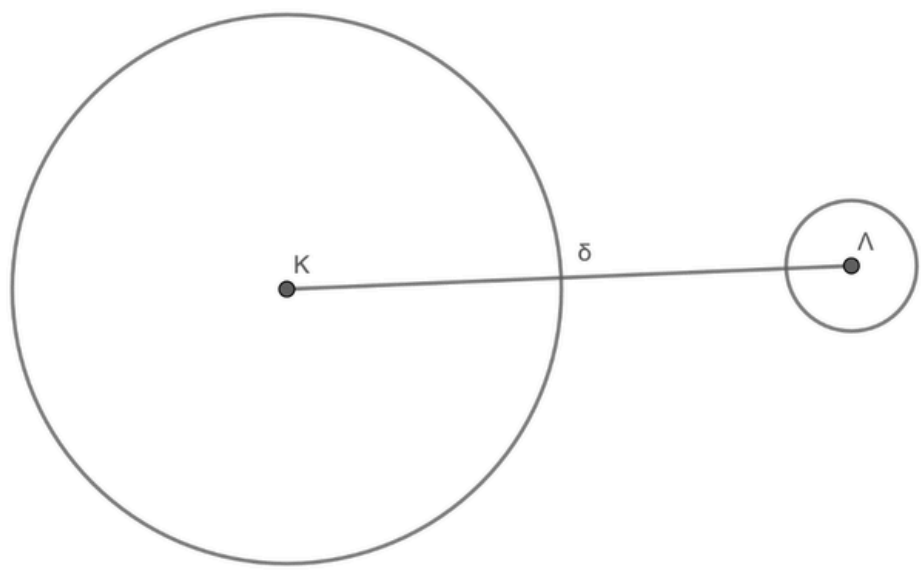
2. Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων;

Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία

→ Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (K, R) , αν και μόνο αν $\delta < R - \rho$

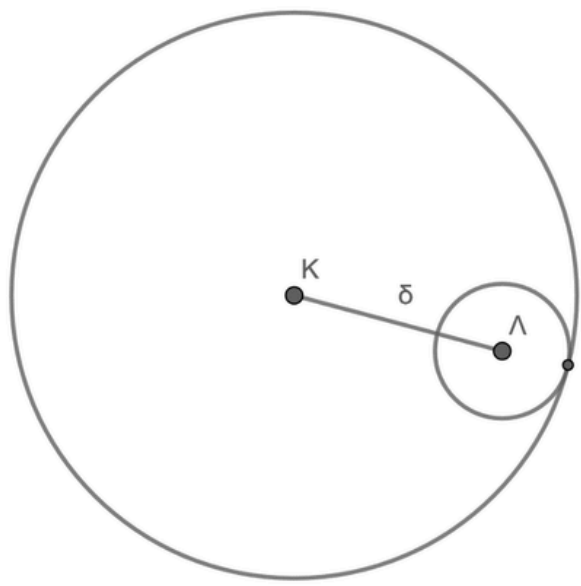


→ Οι κύκλοι (K,R) και (Λ,ρ) βρίσκονται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν $\delta > R + \rho$



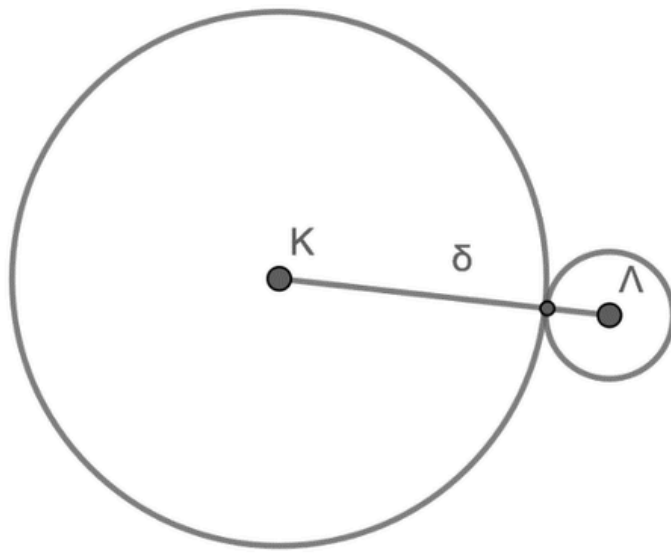
Εφαπτόμενοι κύκλοι

→ Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ,ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (K,R) , αν και μόνο αν $\delta = R - \rho$.



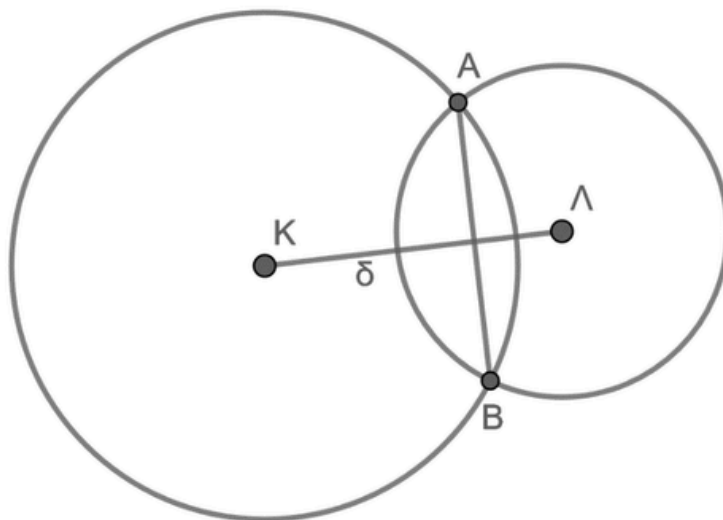
→ Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν $\delta = R + \rho$.

Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται **σημείο επαφής** και είναι σημείο της διακέντρου.



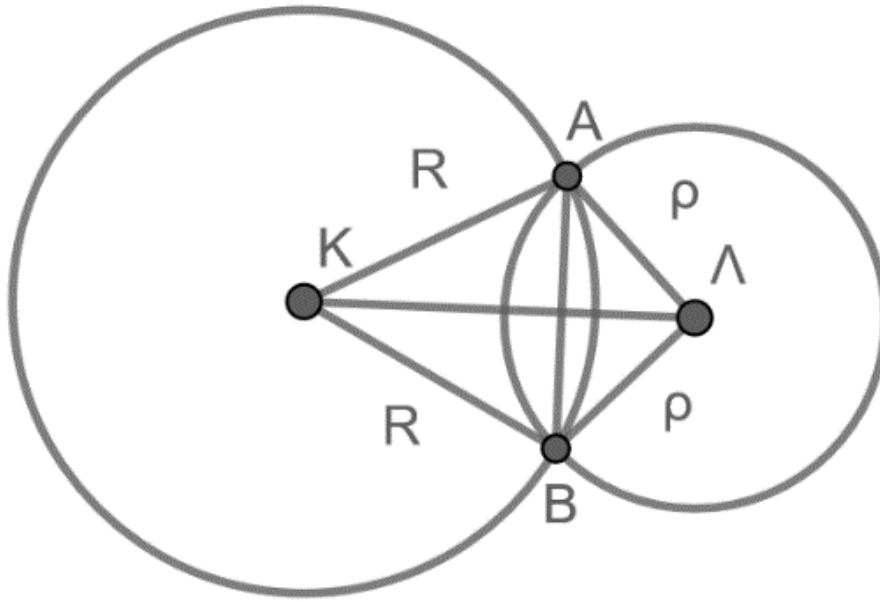
Τεμνόμενοι κύκλοι

- Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο κοινά σημεία**, αν και μόνο αν $R - \rho < \delta < R + \rho$.
 Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται **κοινή χορδή** των δύο κύκλων.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.



Έχουμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) και A, B τα σημεία τομής τους, που ορίζουν την κοινή χορδή AB.

→ Έχουμε $KA = KB = R$ οπότε το K ισαπέχει από τα άκρα A, B και ανήκει στην μεσοκάθετο του AB.

→ Έχουμε $LA = LB = \rho$ οπότε το Λ ισαπέχει από τα άκρα A, B και ανήκει στην μεσοκάθετο του AB.

Άρα το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής AB των δύο τεμνόμενων κύκλων.



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

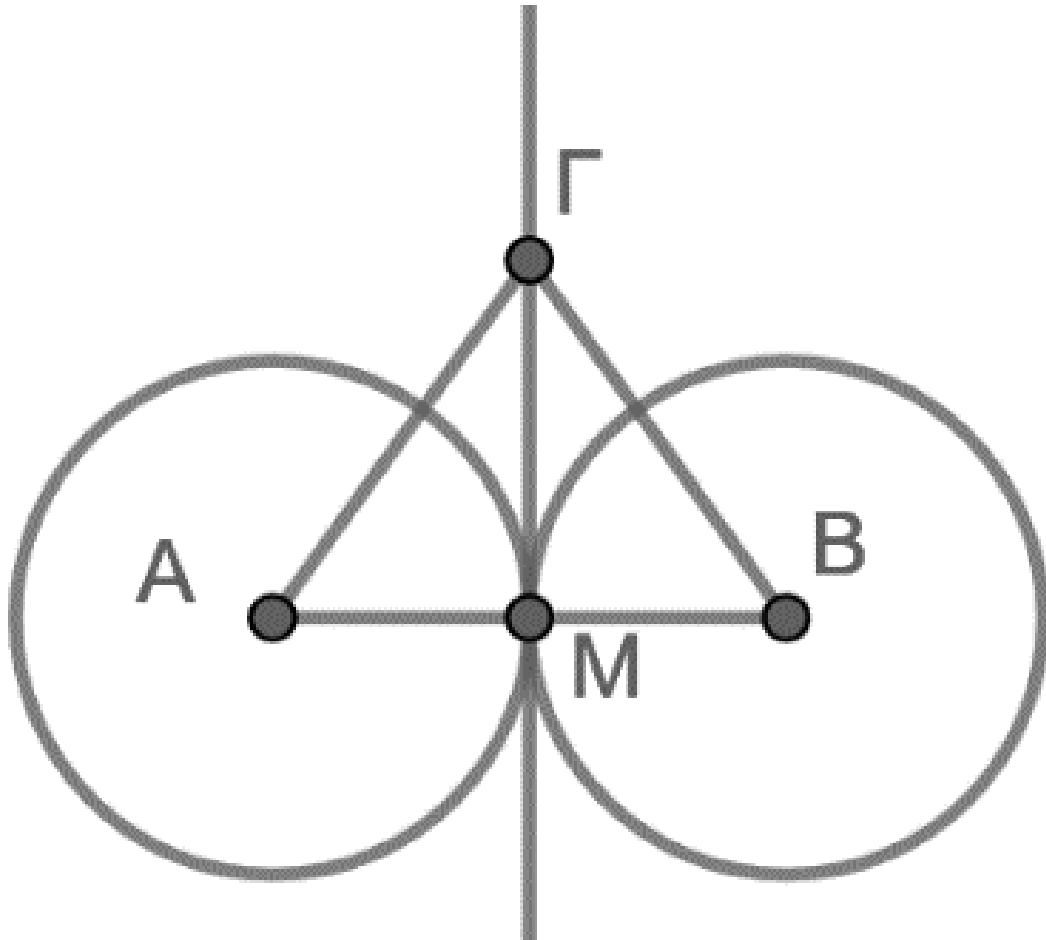


Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Θεωρούμε δύο κύκλους (A, ρ) και (B, ρ) οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι $AG = BG$, όπου G τυχαίο σημείο της κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων.



Γνωρίζουμε ότι η κοινή εφαπτομένη είναι κάθετη στην διάκεντρο AB , δηλαδή $GM \perp AB$.

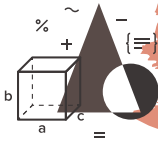
Επίσης αφού οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες, το M θα είναι μέσο της AB .

Άρα η κοινή εφαπτομένη είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB και αφού το σημείο G ανήκει στην κοινή εφαπτομένη (μεσοκάθετο) θα ισαπέχει από τα άκρα, δηλαδή $AG = BG$.





Ενότητα 3η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ

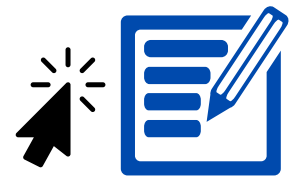
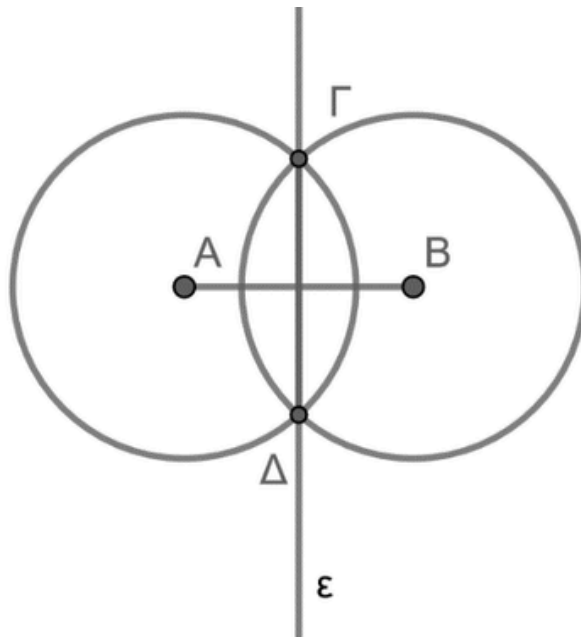


17. Απλές γεωμετρικές κατασκευές - 18. Βασικές κατασκευές τριγώνων

1. Να κατασκευασθεί η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος.

• Κατασκευή

Έστω τμήμα AB . Με κέντρα τα άκρα του A, B και ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$ γράφουμε δύο ίσους κύκλους. Αν Γ, Δ είναι τα κοινά σημεία των κύκλων αυτών, η ευθεία ε που ορίζουν τα Γ, Δ είναι η ζητούμενη.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

• Απόδειξη

Η ευθεία ε είναι κοινή χορδή ίσων κύκλων, επομένως είναι κάθετη στη διάκεντρο AB και από κατασκευή $A\Gamma = A\Delta = B\Gamma = B\Delta$.

• Διερεύνηση

Για να έχει το πρόβλημα λύση θα πρέπει οι κύκλοι (A, ρ) και (B, ρ) να τέμνονται. Αυτό όμως ισχύει, αφού η διάκεντρός τους AB ικανοποιεί την σχέση $\rho - \rho < AB < \rho + \rho$, δηλαδή $0 < AB < 2\rho$.

Με την παραπάνω κατασκευή βρίσκουμε και το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος.

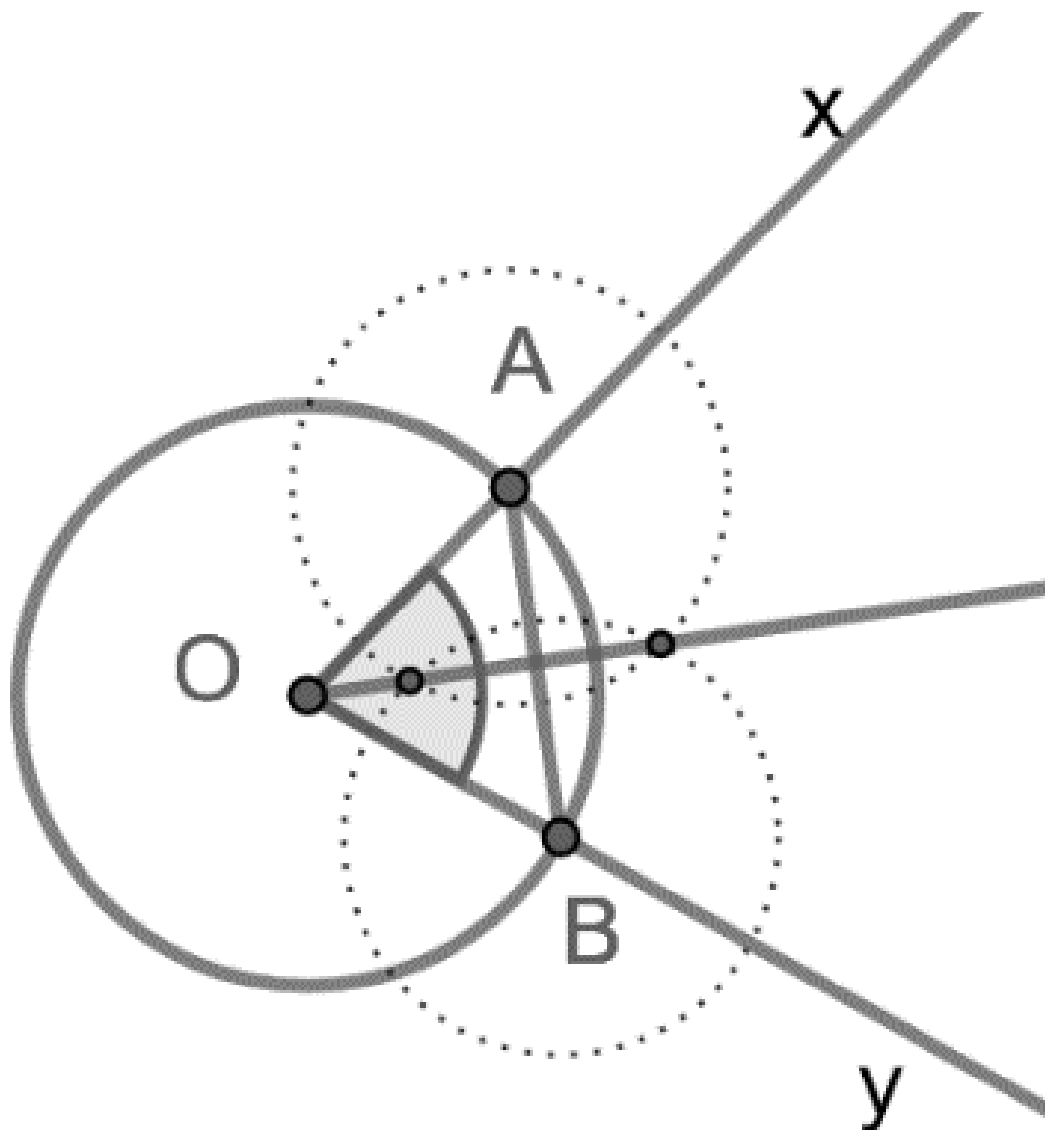
2. Να κατασκευασθεί η διχοτόμος μιας γωνίας.

Έστω γωνία $\angle XOY$.

Με κέντρο το O και τυχαία ακτίνα, γράφουμε κύκλο, που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα A , B αντίστοιχα. Φέρουμε τη μεσοκάθετο δ της χορδής AB .

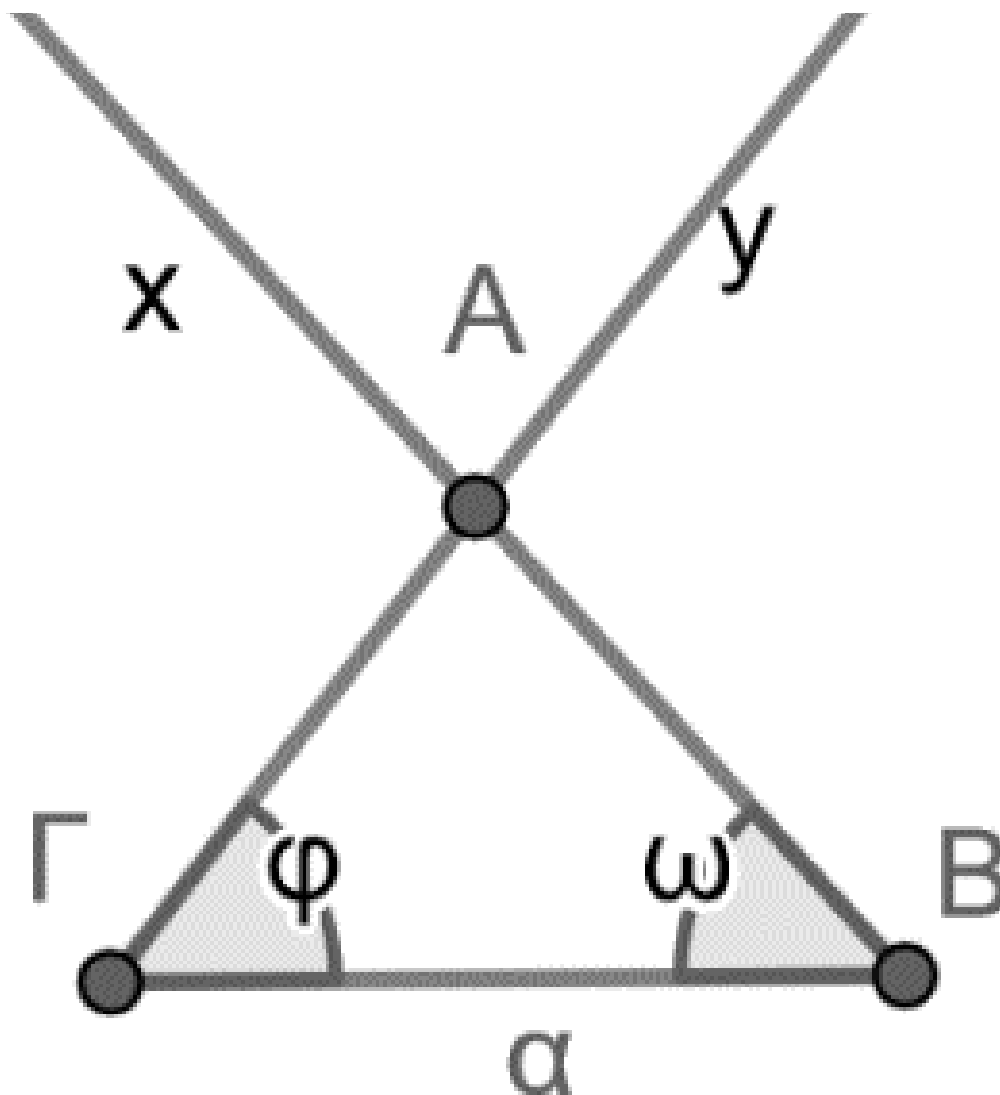
Η ευθεία δ , ως μεσοκάθετος χορδής κύκλου, διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο $\widehat{AB}$ της γωνίας $\angle XOY$.

Επομένως η ευθεία δ είναι διχοτόμος της γωνίας.



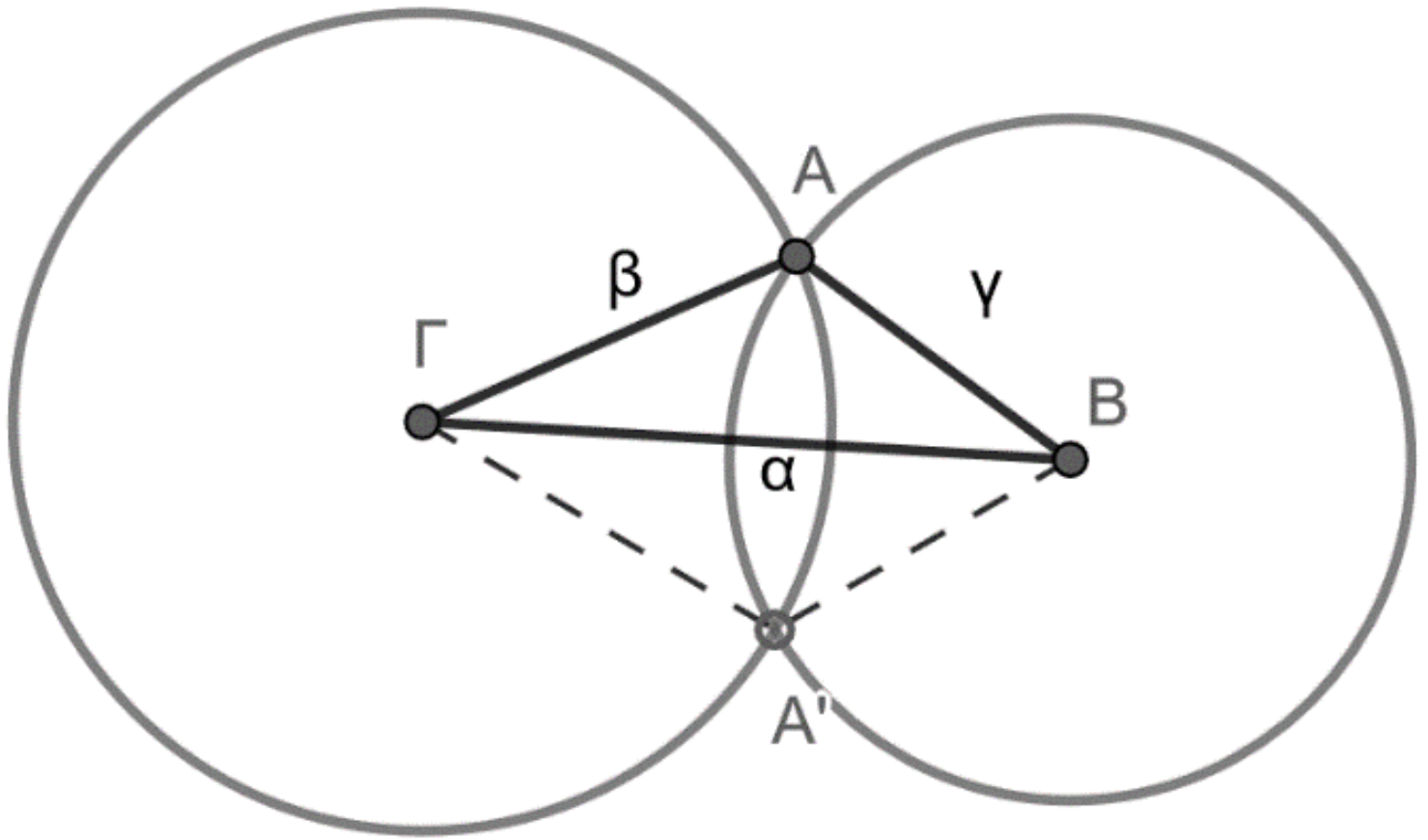
3. Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου δίνεται η πλευρά $B\Gamma = \alpha$ και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες $\hat{B} = \hat{\omega}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\phi}$.

Θεωρούμε τμήμα $B\Gamma = \alpha$ και με κορυφές τα B, Γ κατασκευάζουμε γωνίες $\Gamma\hat{B}x = \hat{\omega}$ και $B\hat{\Gamma}y = \hat{\phi}$. Οι πλευρές $Bx, \Gamma y$ των γωνιών αυτών τέμνονται στο σημείο A . Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο.



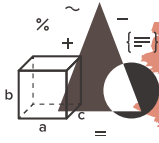
4. Να κατασκευασθεί τρίγωνο $AB\Gamma$, του οποίου δίνονται οι πλευρές $B\Gamma = \alpha$, $A\Gamma = \beta$ και $AB = \gamma$.

Θεωρούμε τμήμα $B\Gamma = \alpha$ και γράφουμε τους κύκλους (B, γ) και (Γ, β) . Αν οι κύκλοι τέμνονται και A είναι το ένα από τα σημεία τομής τους, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο. Αν A' είναι το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (Γ, β) και (B, γ) , το τρίγωνο $A'B\Gamma$ είναι ίσο με το $AB\Gamma$, επομένως δεν αποτελεί νέα λύση του προβλήματος, αφού τα τρίγωνα είναι ίσα.



4

παράλληλες ευθείες

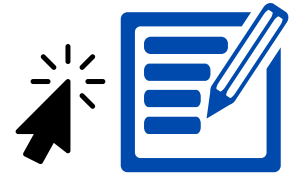


1. Εισαγωγή

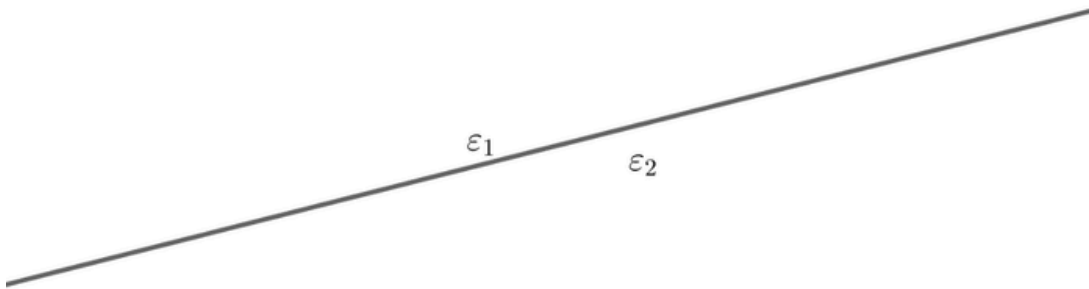
1. Τι γνωρίζουμε για τη σχετική θέση δύο ευθειών;

Δύο διαφορετικές ευθείες:

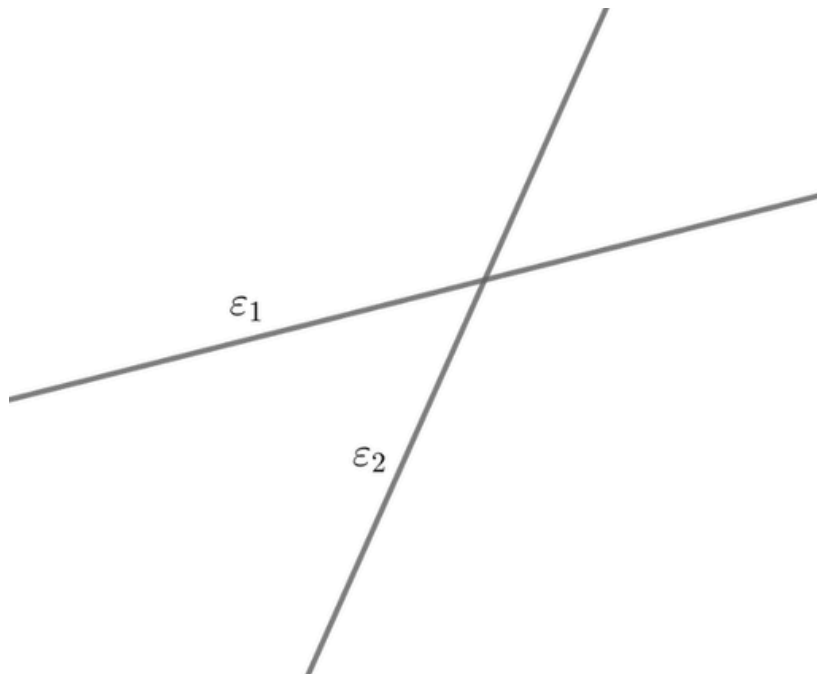
i. ταυτίζονται



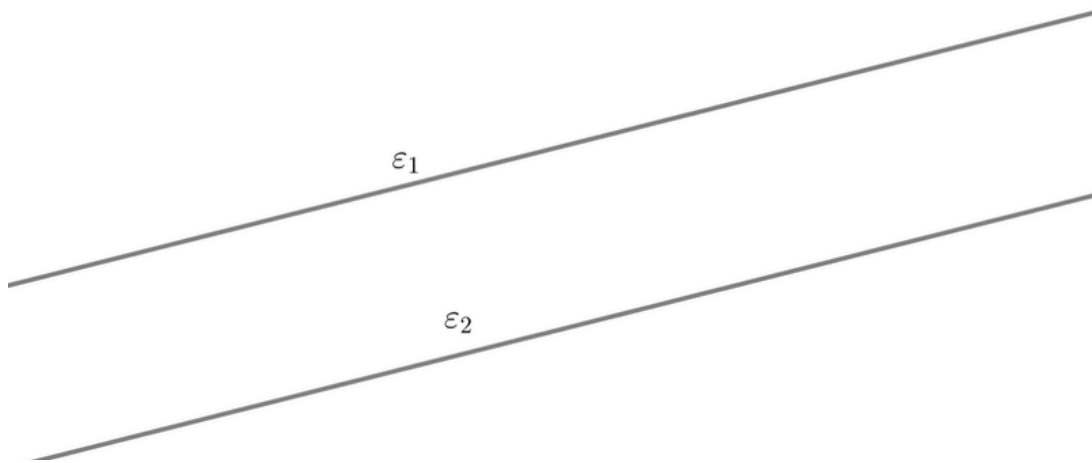
ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ



ii. τέμνονται

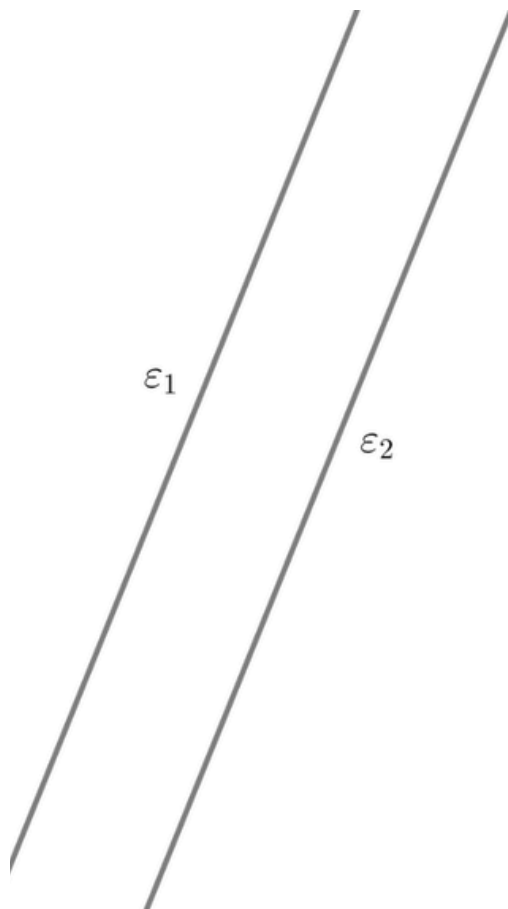


iii. δεν τέμνονται



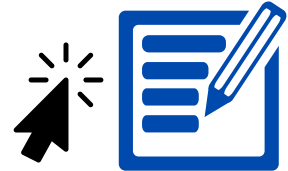
2. Πότε δύο ευθείες λέγονται παράλληλες;

Δυο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες. Για να δηλώσουμε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, γράφουμε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.





2. Τέμνουσα δυο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

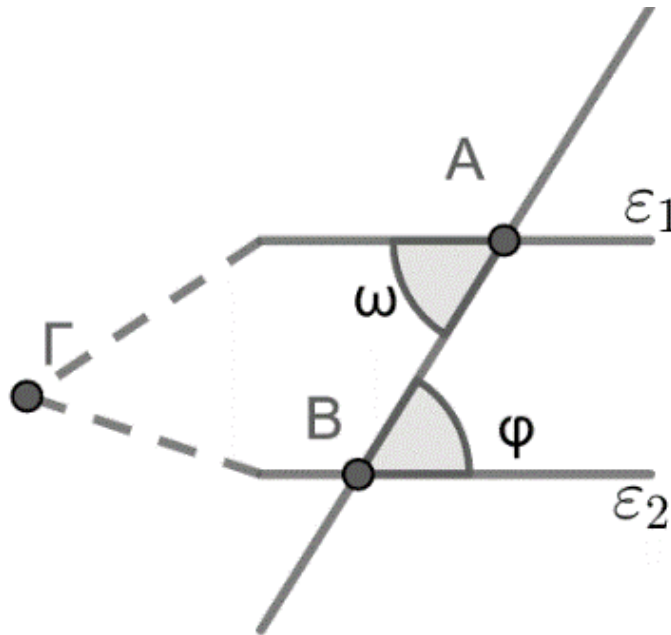


ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Παίρνουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 για τις οποίες γνωρίζουμε ότι σχηματίζουν εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, δηλαδή $\hat{\omega} = \hat{\phi}$.

Υποθέτουμε ότι οι ευθείες δεν είναι παράλληλες, άρα θα τέμνονται σε ένα σημείο (έστω σημείο Γ).

Μελετάμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ και παρατηρούμε ότι η εξωτερική γωνία $\hat{\phi}$ είναι ίση με την εσωτερική γωνία $\hat{\omega}$.

Όμως γνωρίζουμε ότι σε κάθε τρίγωνο η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από την απέναντι εσωτερική.

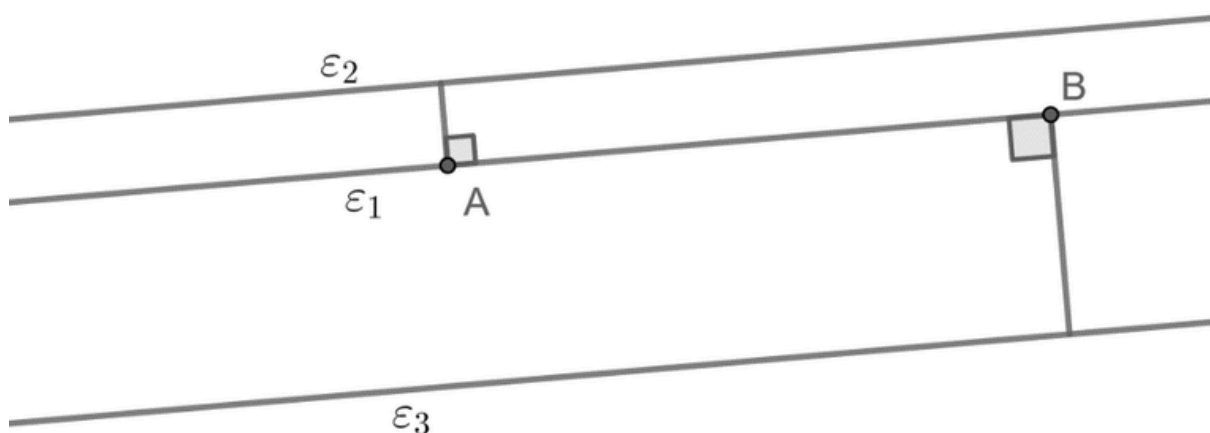
Άρα καταλήξαμε σε άτοπο συμπέρασμα, δηλαδή οι ευθείες είναι παράλληλες.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.



Αίτημα παραλληλίας

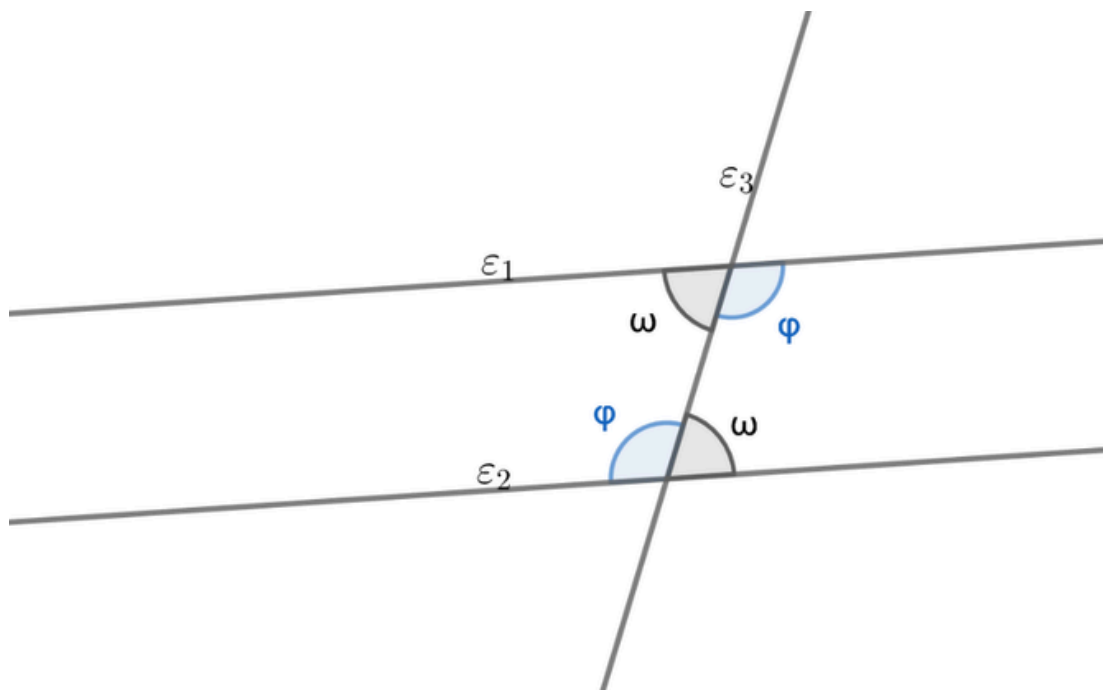
Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

Πρόταση: Αν δυο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη τότε σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν:

1. τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
2. τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.



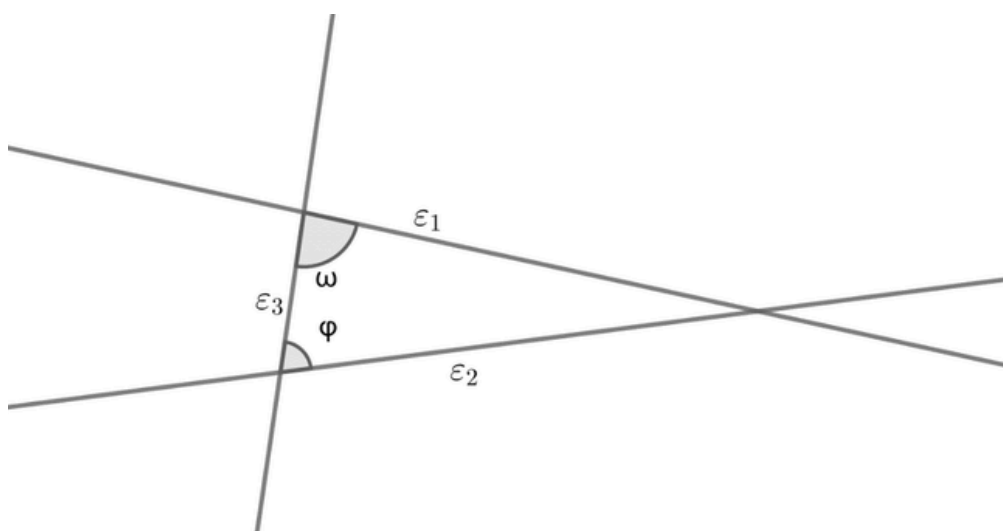
Πρόταση: Αν δυο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon$ και $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon$, τότε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

Πρόταση: Αν δυο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

Πρόταση: Αν δυο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν άθροισμα στις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.



ΠΟΡΙΣΜΑ

Η κατασκευή τριγώνου με δοσμένη μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες σε αυτή γωνίες έχει λύση, αν και μόνο αν το άθροισμα των δύο γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών.

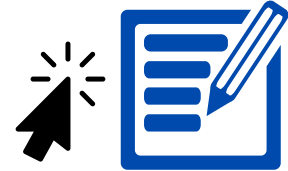




Ενότητα 4η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



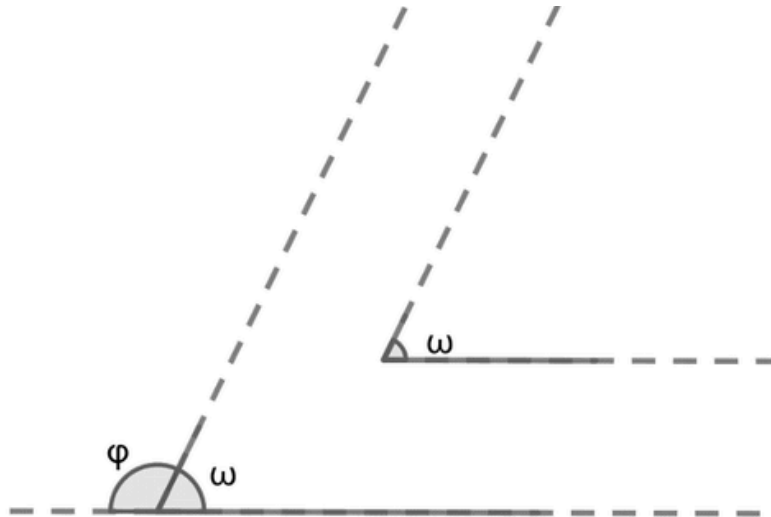
4. Γωνίες με πλευρές παράλληλες - 5. Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ισχύει για γωνίες με πλευρές παράλληλες;

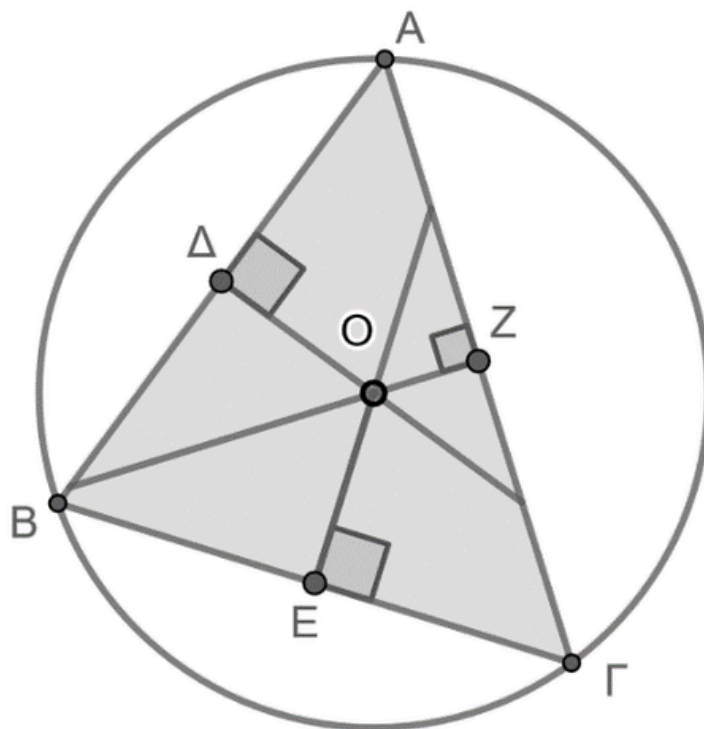
Δυο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δυο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.



Οι γωνίες $\hat{\omega}$ είναι ίσες ενώ οι γωνίες $\hat{\phi}$ και $\hat{\omega}$ είναι παραπληρωματικές.

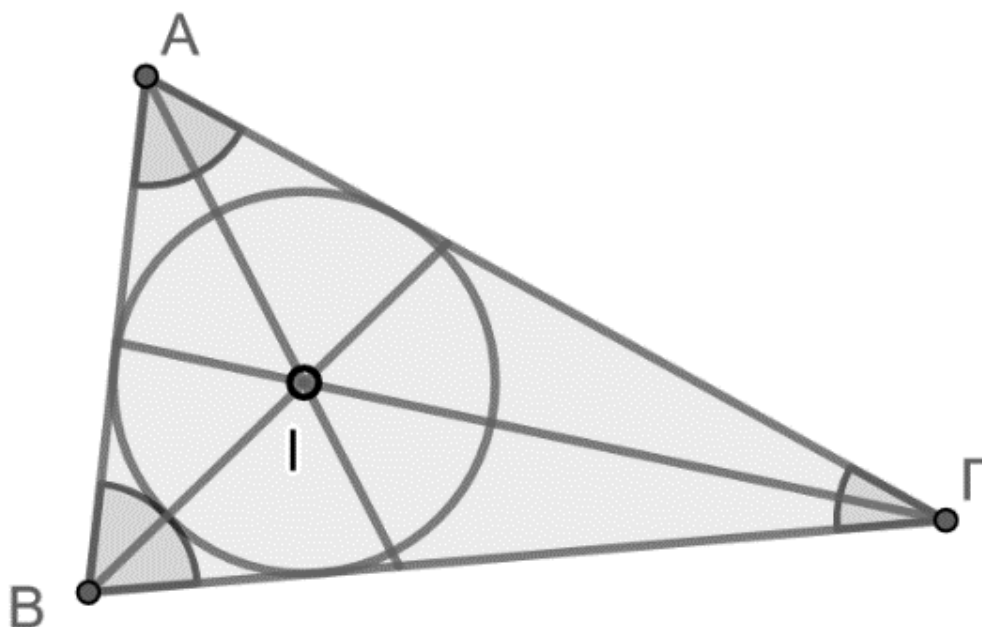
2. Τι ονομάζουμε περιγεγραμμένο κύκλο σε τρίγωνο;

Ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου είναι ο κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του. Ο κύκλος αυτός λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου και ισχύει ότι το κέντρο του είναι ένα σημείο στο οποίο συντρέχουν και οι τρεις μεσοκάθετοι του τριγώνου και λέγεται περίκεντρο.



3. Τι ονομάζουμε εγγεγραμμένο κύκλο σε τρίγωνο;

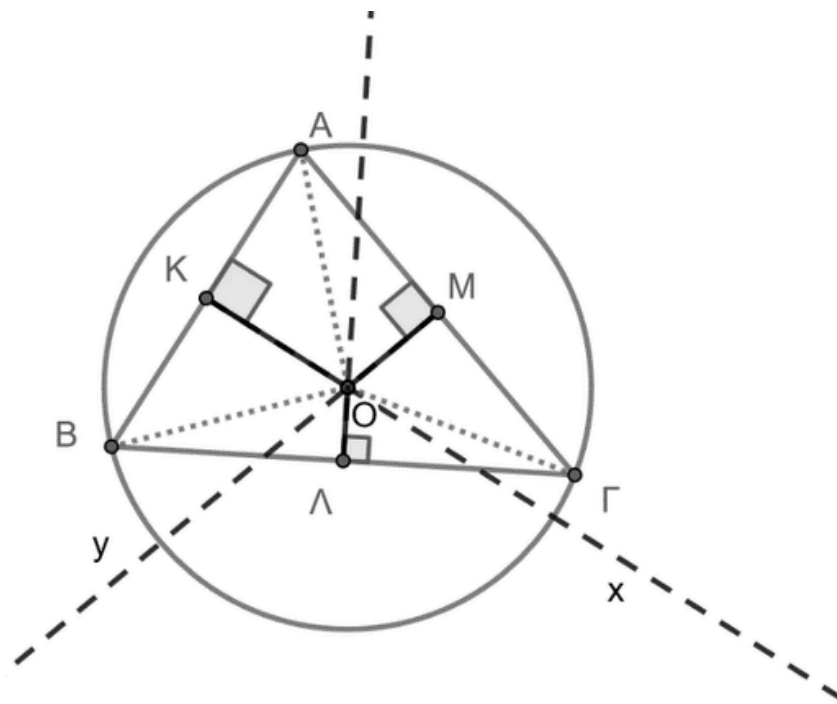
Ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου είναι ο κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του. Το κέντρο του, το οποίο λέγεται έγκεντρο, είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε τα μέσα K, Λ, M των πλευρών.

Φέρουμε τις μεσοκάθετους K_x και Λ_y , που τέμνονται σε ένα σημείο O , αφού τέμνονται οι κάθετες πλευρές τους AB και $A\Gamma$.

Το O ανήκει στη μεσοκάθετο της AB , άρα $OA=OB$.

Το O ανήκει στη μεσοκάθετο της $B\Gamma$, άρα $OB=O\Gamma$.

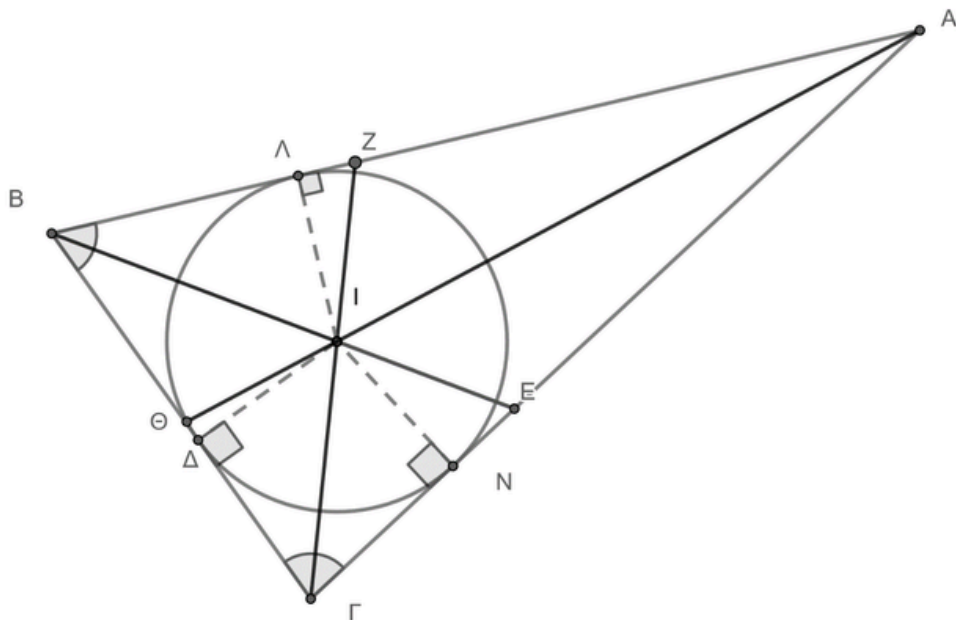
Τελικά $OA=O\Gamma$, δηλαδή το O ανήκει στην μεσοκάθετο της $A\Gamma$.

Ο κύκλος με κέντρο O και ακτίνα OA διέρχεται από τις 3 κορυφές του τριγώνου και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου. Το σημείο O είναι το περίκεντρο του κύκλου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Στο τρίγωνο ABΓ φέρουμε τις διχοτόμους BE και ΓΖ των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Οι BE και ΓΖ θα τέμνονται στο σημείο I, αφού:

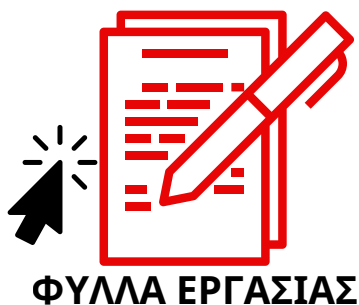
$$\angle E\hat{B}\Gamma + \angle Z\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} < 2L$$

Το σημείο I ισαπέχει από τις πλευρές BA και BΓ, δηλαδή $IL=IO$.

Το σημείο I ισαπέχει από τις πλευρές BΓ και AG, δηλαδή $IO=IN$.

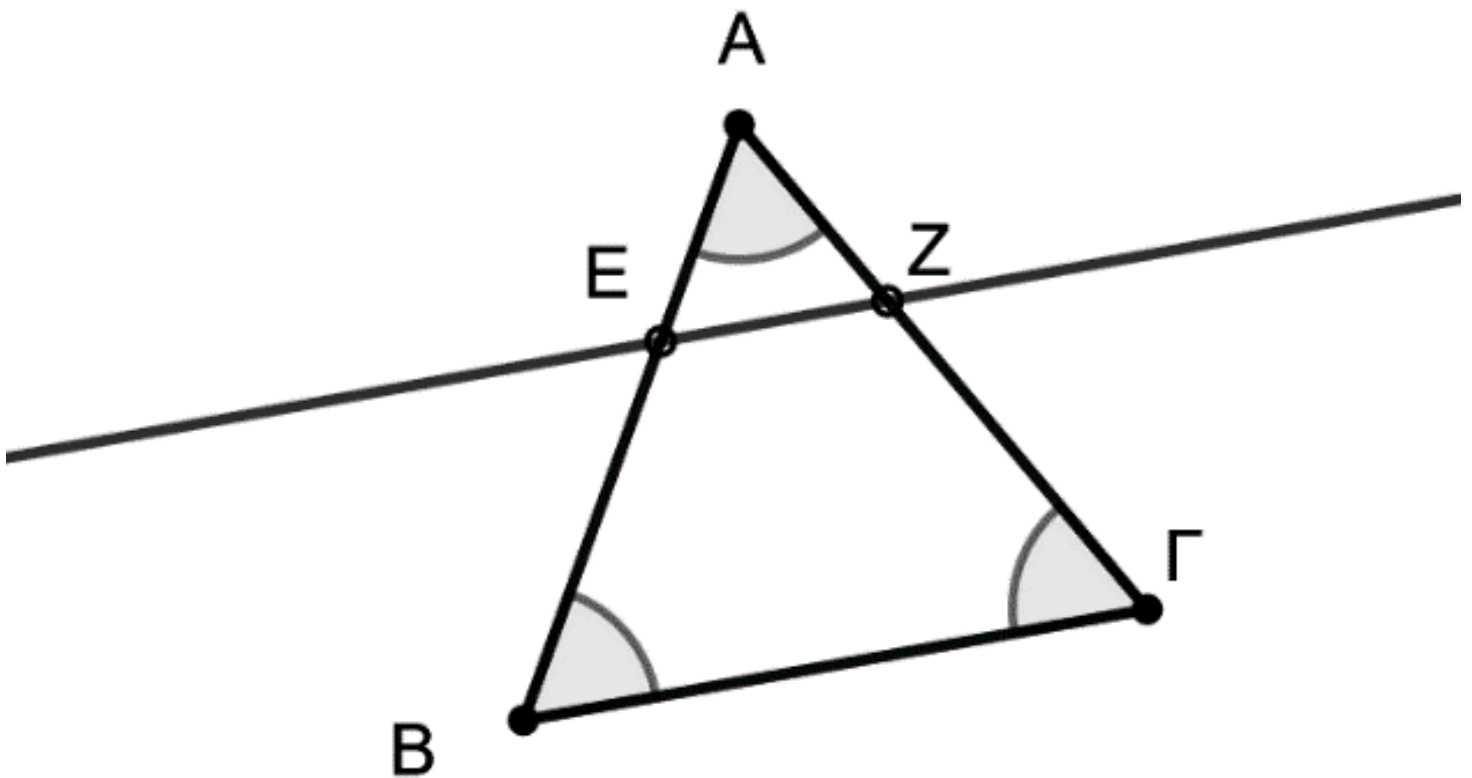
Τελικά το I ισαπέχει από τις AB και AG, άρα ανήκει στην διχοτόμο της γωνίας A.

Με κέντρο το I και ακτίνα ΙΛ φέρουμε κύκλο που εφάπτεται στις 3 πλευρές του κύκλου. Ο κύκλος ονομάζεται εγγεγραμμένος και το σημείο I έγκεντρο του κύκλου.





1. Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ σε σημεία E και Z . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισόπλευρο.

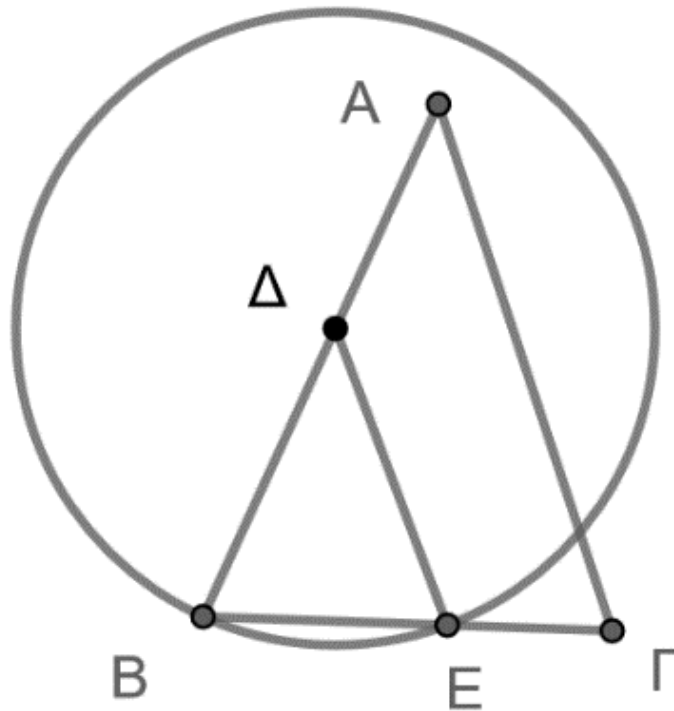


Αφού οι ευθείες EZ και $B\Gamma$ είναι παράλληλες, θα σχηματίζουν ίσες εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες. Βρίσκουμε ότι $\hat{B} = \hat{E}$ και $\hat{Z} = \hat{\Gamma}$ γωνία.

Αφού $AB\Gamma$ ισόπλευρο, ξέρουμε ότι $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Τελικά στο τρίγωνο AEZ έχουμε $\hat{A} = \hat{E} = \hat{Z}$ και το τρίγωνο AEZ ισόπλευρο.

2. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ πάνω στην πλευρά AB . Με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα ΔB σχεδιάζουμε κύκλο που τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι DE και AG είναι παράλληλες.



Αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές συμπεραίνουμε ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Για το τρίγωνο $B\Delta E$ γνωρίζουμε ότι $\Delta B = \Delta E$ (ακτίνες κύκλου), άρα το ΔBE ισοσκελές και $\hat{B} = \hat{E}$.

Τελικά παίρνουμε $\hat{B} = \hat{E} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες $\hat{E}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες.

Άρα οι ευθείες DE και AG είναι παράλληλες.





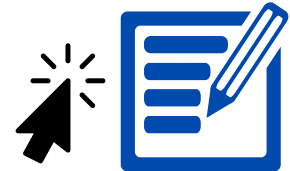
Ενότητα 4η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



6. Άθροισμα γωνιών τριγώνου - 8. Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

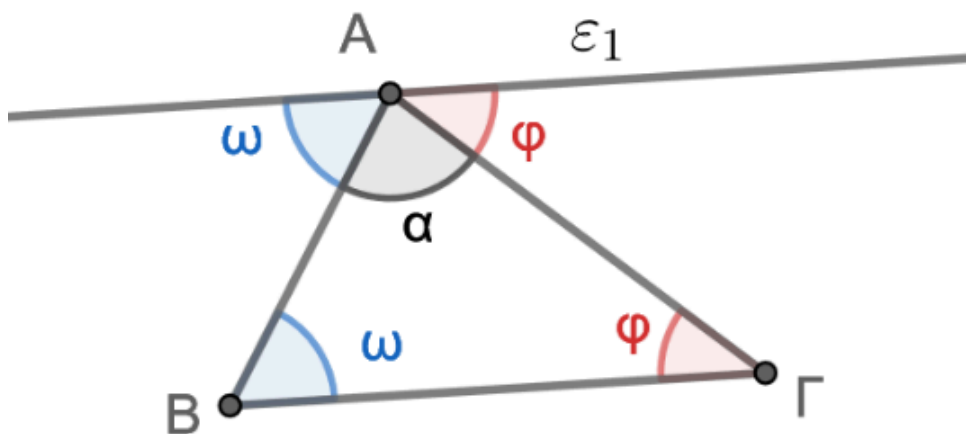
ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές ($2L$) .



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Από μία κορυφή του τριγώνου, έστω την Α, παίρνουμε ευθεία ϵ_1 παράλληλη στην απέναντι πλευρά, ΒΓ.

Έχουμε:

→ $\hat{B} = \hat{\omega}$ ως εντός εναλλάξ των παράλληλων ευθειών ϵ_1 , ΒΓ και τέμνουσα την ευθεία ΑΒ

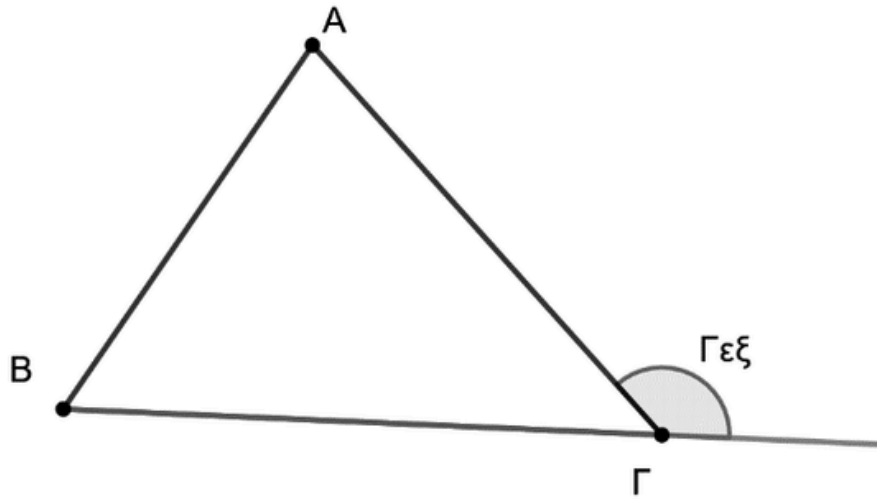
→ $\hat{\Gamma} = \hat{\phi}$ ως εντός εναλλάξ των παράλληλων ευθειών ϵ_1 , ΒΓ και τέμνουσα την ευθεία ΑΓ.

Ξέρουμε ότι $\hat{\omega} + \hat{\alpha} + \hat{\phi} = 2L$ άρα $\hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 2L$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

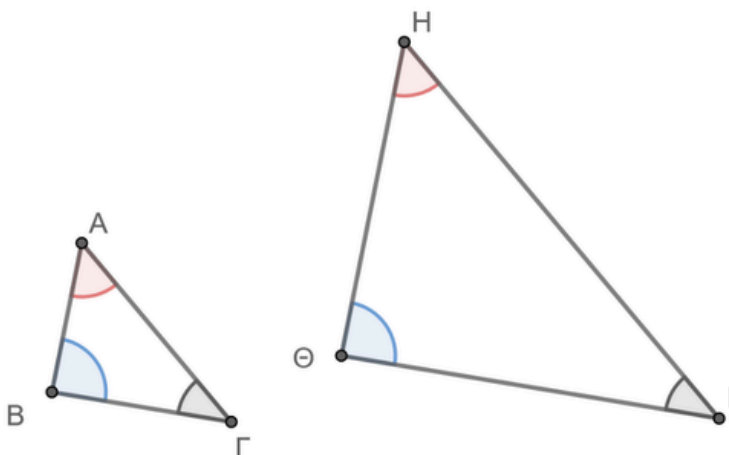


Στο τρίγωνο ABΓ γνωρίζουμε για τις γωνίες ότι $\hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 2L$.

Επίσης για τη $\hat{\Gamma}$ γνωρίζουμε ότι $\widehat{\Gamma_{\epsilon\chi}} + \hat{\Gamma} = 2L$.

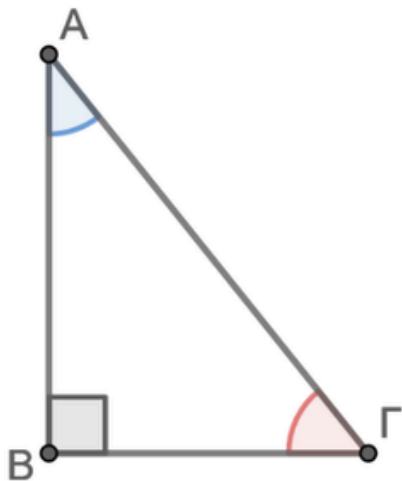
Οπότε παίρνουμε ότι $\hat{B} + \hat{A} = \widehat{\Gamma_{\epsilon\chi}}$.

2. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.



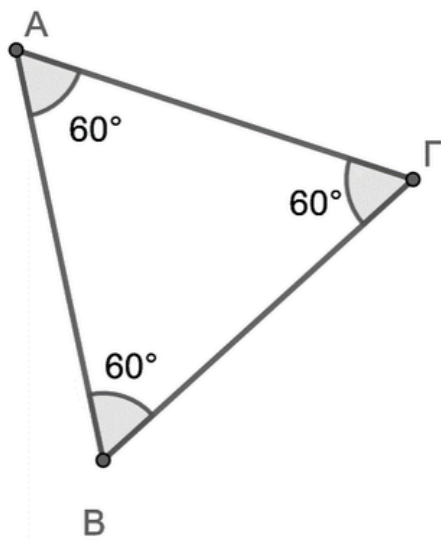
Προκύπτει εύκολα αν σκεφτούμε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

3. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

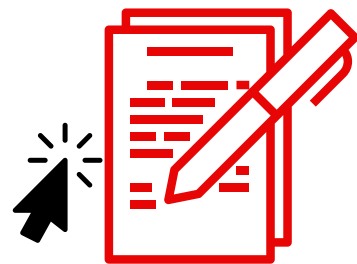


Αφού η μία γωνία είναι ορθή, **οι άλλες δύο γωνίες πρέπει να έχουν άθροισμα μία ορθή, δηλαδή να είναι συμπληρωματικές.**

4. Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° .



Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει 3 ίσες γωνίες. Αφού οι γωνίες κάθε τριγώνου έχουν άθροισμα 2 ορθές, κάθε γωνία θα είναι 60° .

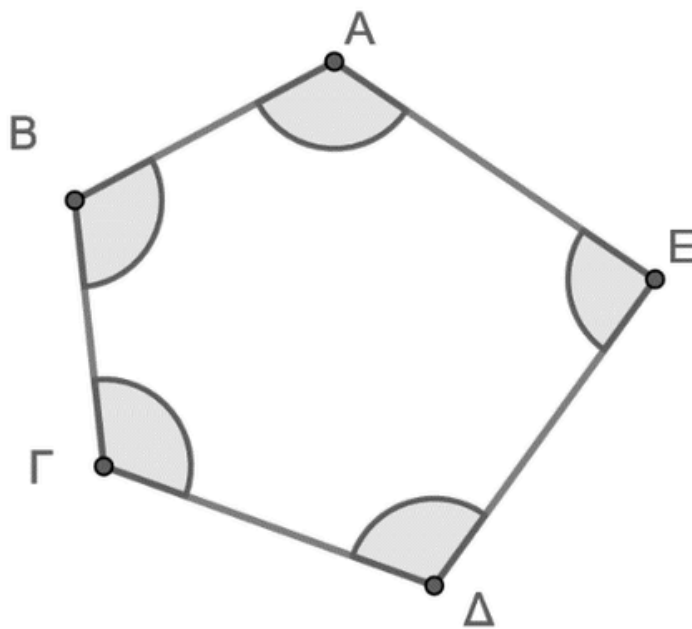


ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1. Τι ισχύει για το άθροισμα γωνιών ενός κυρτού n -γώνου;

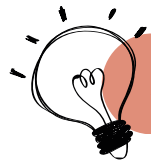
Το άθροισμα των γωνιών κυρτού n -γώνου να είναι $(2n-4)$ ορθές.

π.χ. Σε ένα πεντάγωνο, το άθροισμα των γωνιών του είναι $(2 \cdot 5 - 4)$ ορθές = 6 ορθές.



ΠΟΡΙΣΜΑ

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού n -γώνου είναι 4 ορθές.

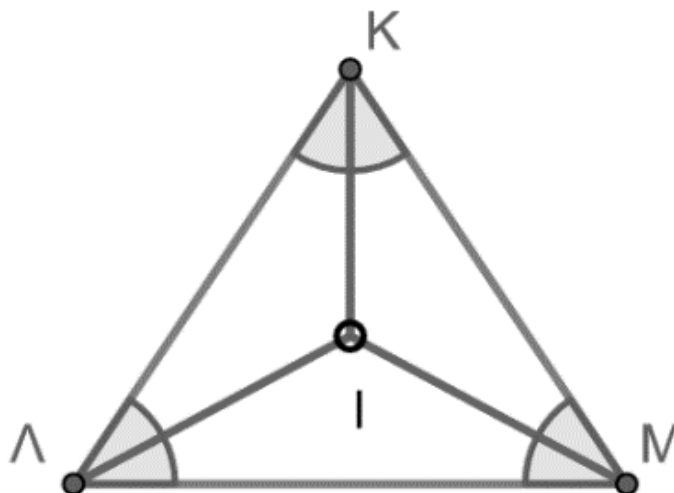


Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Στο ισοσκελές τρίγωνο $KΛΜ$ ($KΛ=ΛΜ$), φέρουμε τις διχοτόμους των γωνιών M και $Λ$. Αν I είναι το σημείο τομής των διχοτόμων να αποδείξετε ότι $ΛΙΜ$ ισοσκελές τρίγωνο και να εξετάσετε αν η KI είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος $ΜΛ$.



Αφού ΛΙ και ΜΙ διχοτόμοι και ΚΛΜ ισοσκελές με ΚΛ=ΚΜ, συμπεραίνουμε ότι $\widehat{ΙΛΜ} = \widehat{ΙΜΛ}$ (ως μισά ίσων γωνιών). Το τρίγωνο ΛΙΜ έχει δύο ίσες γωνίες, άρα είναι ισοσκελές.

Το σημείο Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των δύο γωνιών του τριγώνου ΚΛΜ. Γνωρίζουμε ότι και η τρίτη διχοτόμος θα περνάει από το Ι, άρα η ΚΙ είναι διχοτόμος του τριγώνου. Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, η διχοτόμος της κορυφής είναι επίσης ύψος και διάμεσος της βάσης. Συνεπώς η ΚΙ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΛΜ.

2. Για ένα τρίγωνο ΚΛΜ γνωρίζουμε ότι $\widehat{Κ_{εξ}} = 90^\circ + \frac{\widehat{Λ}}{2}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Για να είναι ένα τρίγωνο ισοσκελές αρκεί να έχει δύο ίσες γωνίες.

Έχουμε:

$$\widehat{Κ_{εξ}} = 90^\circ + \frac{\widehat{Λ}}{2}$$

$$\widehat{Μ} + \widehat{Λ} = 90^\circ + \frac{\widehat{Λ}}{2}$$

$$\widehat{Μ} + \frac{\widehat{Λ}}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{\widehat{Λ}}{2} = 90^\circ - \widehat{Μ}$$

Επίσης:

$$\widehat{Κ_{εξ}} = 180^\circ - \widehat{Κ}$$

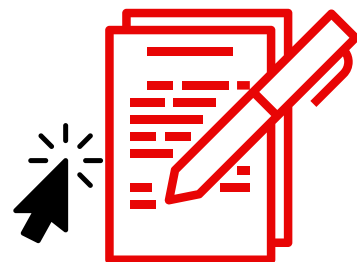
$$90^\circ + \frac{\widehat{Λ}}{2} = 180^\circ - \widehat{Κ}$$

$$\frac{\widehat{Λ}}{2} = 90^\circ - \widehat{Κ}$$

Τελικά παίρνουμε:

$$90^\circ - \widehat{Μ} = 90^\circ - \widehat{Κ}$$

$$\widehat{Μ} = \widehat{Κ}$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Άρα το τρίγωνο έχει δύο ίσες γωνίες και είναι ισοσκελές με ΚΛ=ΛΜ.

3. Υπάρχει κυρτό πολύγωνο με άθροισμα γωνιών 900° ;

Για να υπάρχει το παραπάνω πολύγωνο, πρέπει να ικανοποιείται η σχέση $(2n-4) \cdot 90^\circ = 900^\circ$, με n να παίρνει μόνο ακέραιες τιμές.

Λύνουμε την εξίσωση:

$$(2n - 4) \cdot 90^\circ = 900^\circ$$

$$2n - 4 = 10$$

$$2n = 14$$

$$n = 7$$

Άρα ένα κυρτό επτάγωνο έχει άθροισμα εσωτερικών γωνιών 900° .

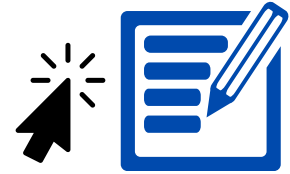


5

*παραλληλόγραμμα
τραπέζια*



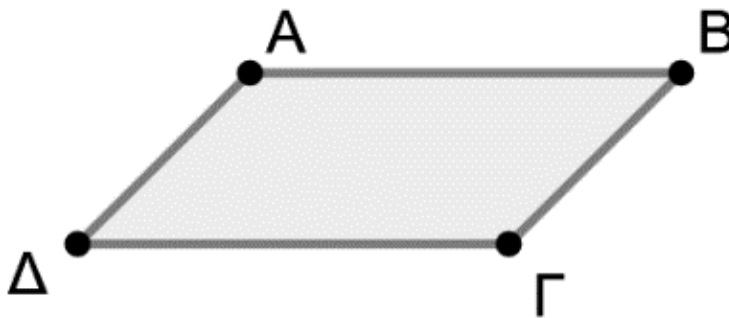
1. Εισαγωγή - 2. Παραλληλόγραμμα



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ορισμός Παραλληλογράμμου

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



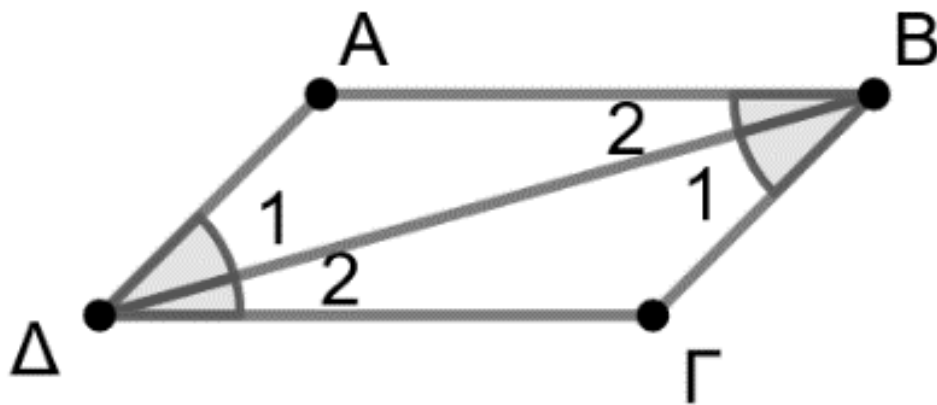
$$AB \parallel \Delta\Gamma \text{ και } A\Delta \parallel B\Gamma$$

Ιδιότητες παραλληλογράμμων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο άρα $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $\Delta B\Gamma$.

Αυτά έχουν:

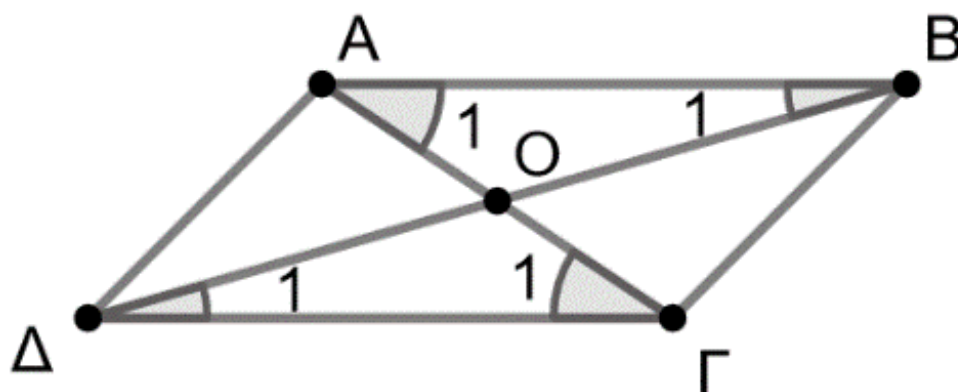
- $\widehat{\Delta_1} = \widehat{B_1} = \hat{\varphi}$ (εντός εναλλάξ παράλληλων ευθειών)
- ΔB κοινή πλευρά
- $\widehat{\Delta_2} = \widehat{B_2} = \hat{\omega}$ (εντός εναλλάξ παράλληλων ευθειών)

Συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα με:

- $AB = \Delta\Gamma$ και $A\Delta = B\Gamma$
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και γωνία $\hat{\Delta} = \hat{B} = \hat{\varphi} + \hat{\omega}$

- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο με $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΔΟΓ.

Αυτά έχουν:

→ $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_1 = \widehat{\Phi}$ (εντός εναλλάξ παράλληλων ευθειών)

→ $AB = \Gamma\Delta$

→ $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{\Omega}$ (εντός εναλλάξ παράλληλων ευθειών)

Συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα με:

→ $OA = O\Gamma$ και $OB = O\Delta$, δηλαδή οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το σημείο τομής των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

ΠΟΡΙΣΜΑ

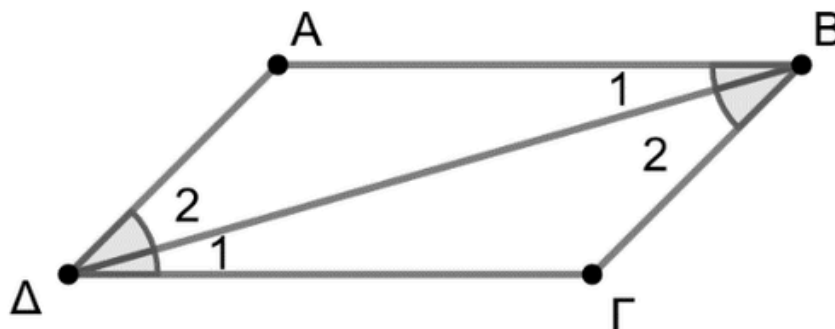
Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα.

Κριτήρια για παραλληλόγραμμο

Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

→ Οι απέναντι πλευρές ανά δυο είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Στο τετράπλευρο ABΓΔ γνωρίζουμε ότι $AB = ΔΓ$ και $AD = BΓ$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AΔB και ΔΓB.

Αυτά έχουν:

$$\rightarrow AD = BΓ$$

$$\rightarrow AB = ΔΓ$$

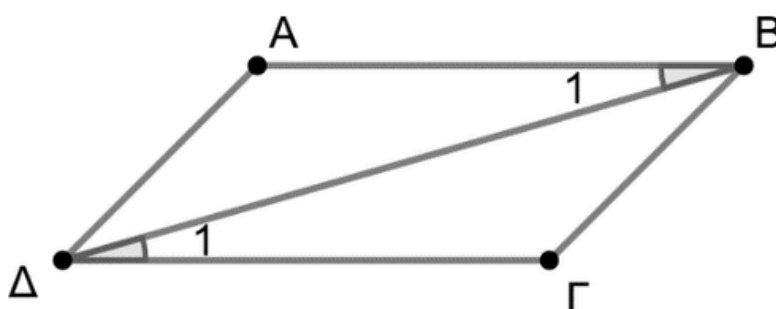
$\rightarrow$ BΔ κοινή πλευρά

Συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα:

$\rightarrow \widehat{\Delta_1} = \widehat{B_1}$ και $\widehat{\Delta_2} = \widehat{B_2}$, άρα $AB \parallel ΔΓ$ και $AD \parallel BΓ$, οπότε το ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

$\longrightarrow$ Δυο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Γνωρίζουμε ότι $AB \parallel \Delta\Gamma$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma B$.

Αυτά έχουν:

→ $AB = \Gamma\Delta$

→ $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1$

→ ΔB κοινή πλευρά

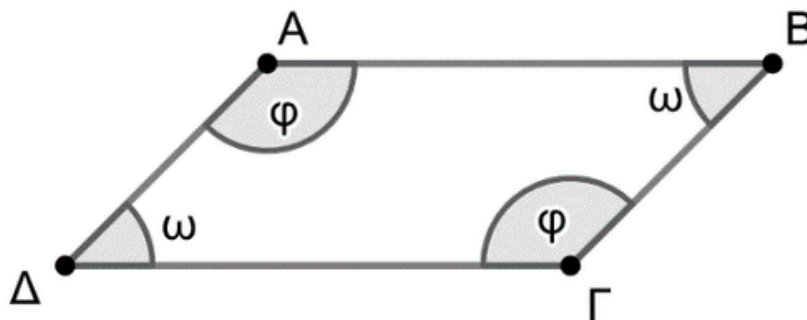


Συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα:

→ παίρνουμε ίσες πλευρές και γωνίες οπότε όπως και πριν το $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο.

→ Οι απέναντι γωνίες ανά δυο είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Γνωρίζουμε ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών είναι 4 ορθές.

Παίρνουμε:

$$\hat{\omega} + \hat{\phi} + \hat{\omega} + \hat{\phi} = 4L$$

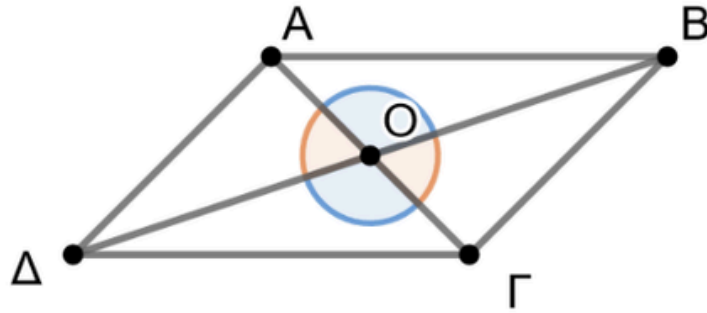
$$2\hat{\omega} + 2\hat{\phi} = 4L$$

$$\hat{\phi} + \hat{\omega} = 2L$$

Συνεπώς οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

→ Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Στο τετράπλευρο οι διαγώνιοι διχοτομούνται άρα $OA=OG$ και $OB=OD$.

Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα AOB και $ΔOG$.

Αυτά έχουν:

→ $OA=OG$

→ $\hat{AOB} = \hat{ΔOG}$ (κατακορυφήν γωνίες)

→ $OB=OD$

Συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι τα τρίγωνα $AOΔ$ και $BOΓ$ είναι ίσα.

Τελικά παίρνουμε ίσες γωνίες, δηλαδή $AB \parallel ΔΓ$ και $ΑΔ \parallel ΒΓ$ και $ABΓΔ$ παραλληλόγραμμο.

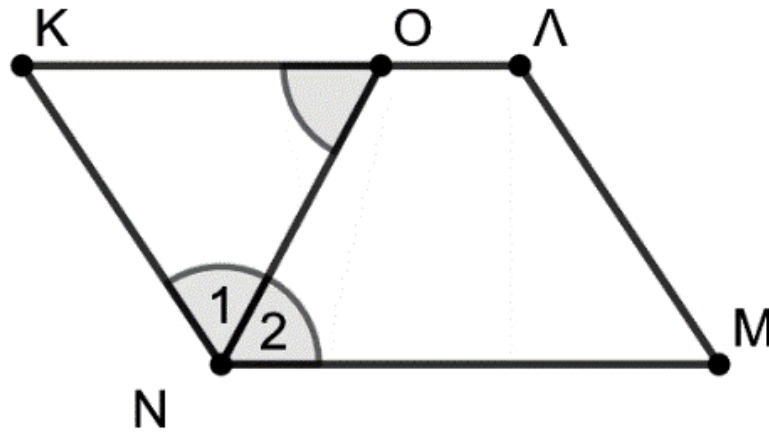


Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Σε παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Ν που τέμνει την πλευρά ΚΛ στο σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι $KO=ΛΜ$.



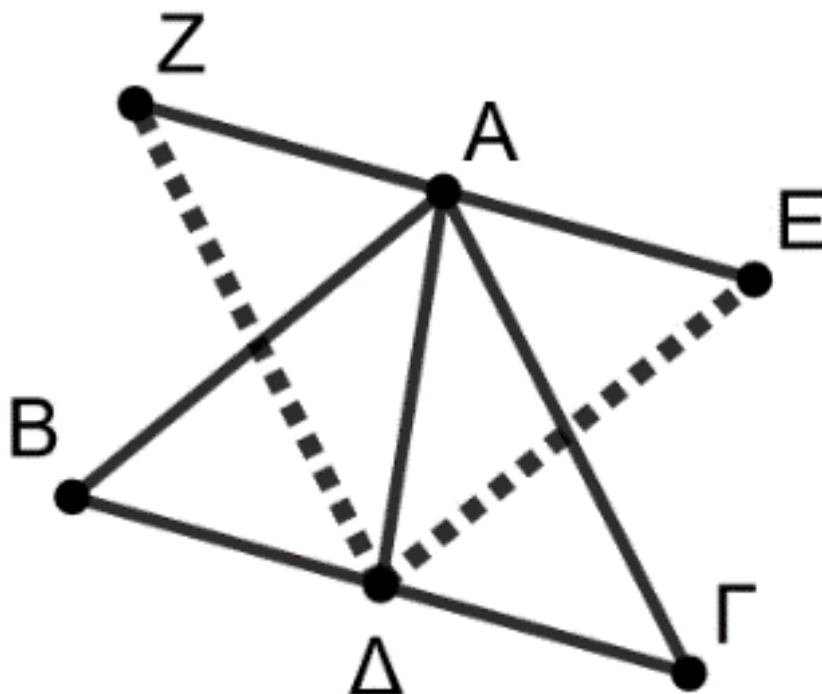
Προφανώς οι γωνίες $\widehat{N}_1$ και $\widehat{N}_2$ είναι ίσες, αφού ΝΟ διχοτόμος. Επίσης γωνία $\widehat{N}_2 = \widehat{O}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες παράλληλων ευθειών.

Παίρνουμε τελικά ότι $\widehat{N}_1 = \widehat{O}$ και τρίγωνο ΟΚΝ ισοσκελές με $KO=KN$.

Το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο οπότε $KN=ΛΜ$.

Τελικά έχουμε $OK=KN=ΛΜ$ και αποδείξαμε το ζητούμενο.

2. Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε διάμεσο ΑΔ και σχηματίζουμε $\Delta Z \parallel= ΑΓ$ και $\Delta Ε \parallel= ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι $AZ=AE$.



- Αρχικά θα μελετήσουμε το τετράπλευρο ΑΕΔΒ.

Αυτό έχει $\Delta E \parallel AB$, συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

Προκύπτει άμεσα ότι $\Delta B \parallel AE$.

Θα μελετήσουμε το τετράπλευρο ΑΓΔΖ.

Αυτό έχει $\Delta \Gamma \parallel Z\Delta$, συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο.

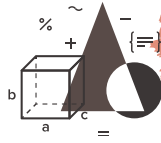
Προκύπτει ότι $\Delta \Gamma \parallel AZ$.

- Το Δ είναι διάμεσος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ. Συνεπώς $B\Delta = \Delta \Gamma$.

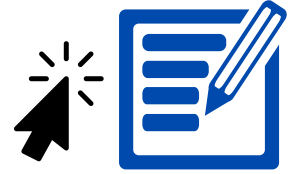
Τελικά $AE = B\Delta = \Delta \Gamma = AZ$.

- Δηλαδή $AE = AZ$.





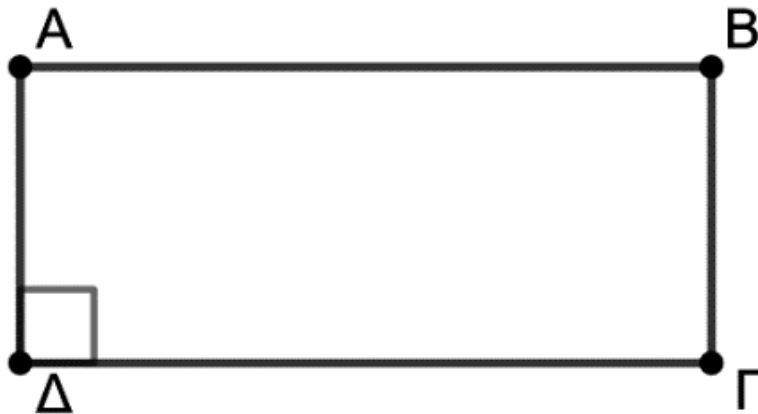
3. Ορθογώνιο



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ορισμός Ορθογωνίου

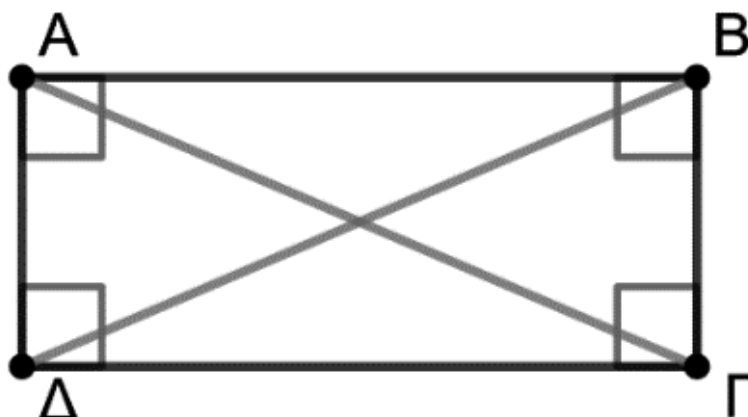
Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.



Ιδιότητες ορθογωνίου:

- Το ορθογώνιο έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου και
- Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle A\Delta\Gamma$ και $\triangle A\Delta B$.

Αυτά έχουν:

$$\rightarrow \hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$$

$\rightarrow$ $A\Delta$ κοινή πλευρά

$\rightarrow AB = \Delta\Gamma$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου

Συνεπώς τα τρίγωνα είναι ίσα και $A\Gamma = \Delta B$.

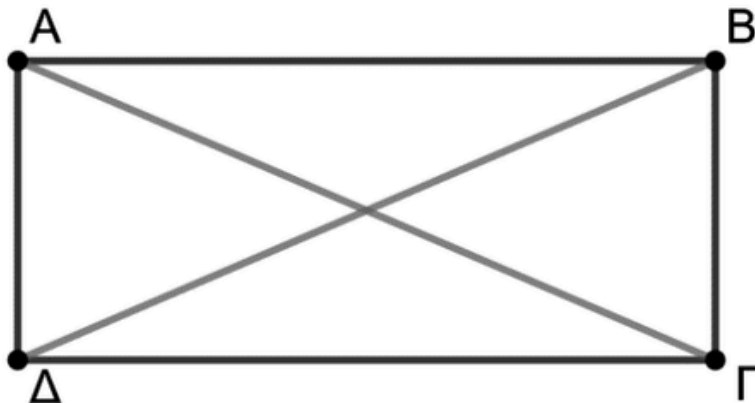
$\rightarrow$ Δηλαδή αποδείξαμε ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο:

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.
Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του ορθογωνίου.
- Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με ίσες διαγώνιους $A\Gamma$ και $B\Delta$.

Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Delta\Gamma$.

Αυτά έχουν:

→ $ΑΓ=ΒΔ$

→ $ΑΒ=ΔΓ$, απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου

→ $ΑΔ$ κοινή πλευρά

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και παίρνουμε $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

Όμως γνωρίζουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$.

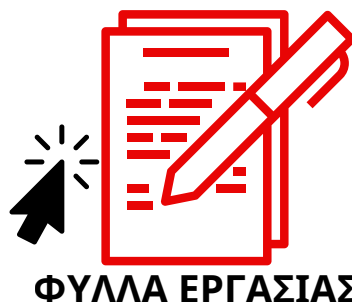
Συνεπώς $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $ΑΒΓΔ$ ορθογώνιο.

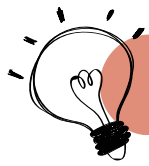
- Έχει τρεις γωνίες ορθές.

Αφού έχει 3 ορθές γωνίες τότε και η τέταρτη γωνία θα είναι ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε κυρτού τετράπλευρου είναι $4L$.

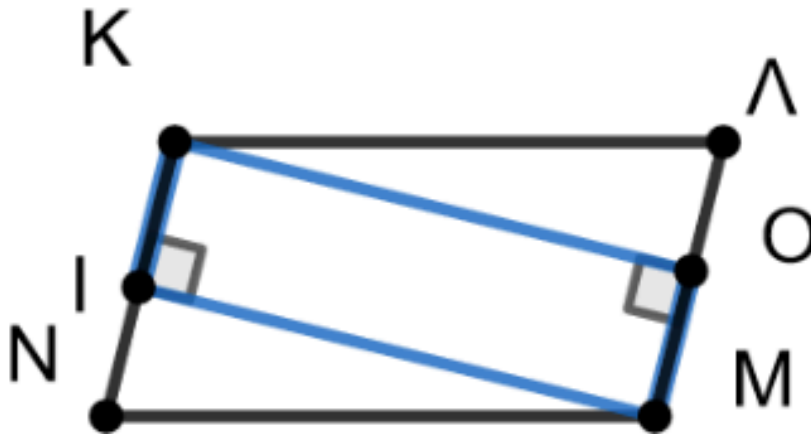
- Όλες οι γωνίες του είναι ίσες.

Αν έχει όλες τις γωνίες ίσες, προφανώς κάθε γωνία θα είναι ορθή.





1. Στο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ φέρουμε τις κάθετες ΚΟ και ΜΙ. Να αποδείξετε ότι ΚΟΜΙ ορθογώνιο.



Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο πρέπει να αξιοποιήσουμε ένα από τα κριτήρια των ορθογωνίων.

Παρατηρούμε στο τετράπλευρο ΚΟΜΙ:

→ οι πλευρές ΟΜ και ΙΚ είναι παράλληλες

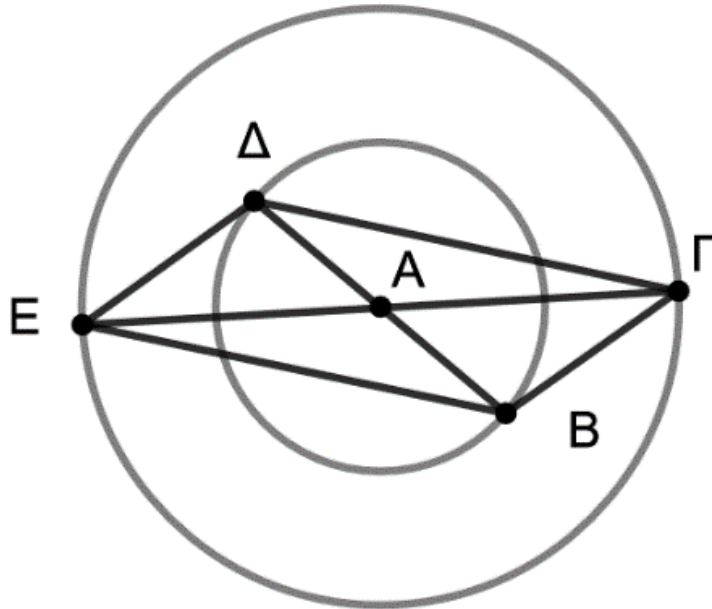
→ η ΟΚ και ΜΙ είναι κάθετες ευθείες σε παράλληλες πλευρές, άρα $ΟΚ \parallel ΜΙ$.

Το ΚΟΜΙ έχει τις πλευρές του παράλληλες άρα είναι παραλληλόγραμμο.

→ Το ΚΟΜΙ έχει μια ορθή γωνία.

Δηλαδή βρήκαμε ότι το ΚΟΜΙ είναι παραλληλόγραμμο με μία ορθή γωνία και σύμφωνα με το κριτήριο είναι ορθογώνιο.

2. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει για τους κύκλους ώστε το παραλληλόγραμμο ΒΓΔΕ να είναι ορθογώνιο;



Για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο πρέπει να ικανοποιεί ένα από τα κριτήρια των παραλληλογράμμων.

→ Στο ΔΓΒΕ παρατηρούμε ότι $ΔΑ=ΑΒ$ (ακτίνες κύκλου) και $ΑΓ=ΑΕ$ (ακτίνες κύκλου).

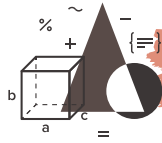
Δηλαδή οι διαγώνιοι του τετράπλευρου διχοτομούνται στο Α, άρα ΒΓΔΕ παραλληλόγραμμο.

Για να είναι το παραλληλόγραμμο ΒΓΔΕ ορθογώνιο θα πρέπει οι διαγώνιοι να είναι ίσοι, δηλαδή θα πρέπει να ταυτίζονται οι δύο κύκλοι.

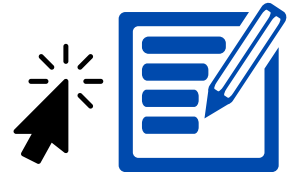




Ενότητα 5η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



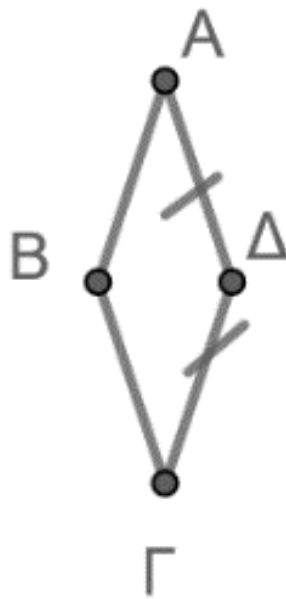
4. Ρόμβος



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ορισμός Ρόμβου

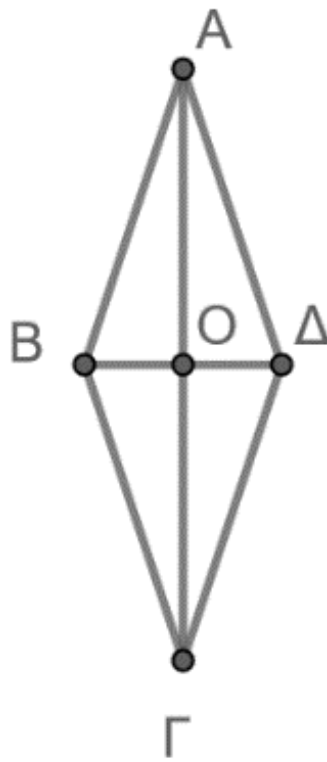
Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.



Ιδιότητες του ρόμβου:

- Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
- Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (και για τις δύο ιδιότητες)



Το παραλληλόγραμμο ABΓΔ είναι ρόμβος με $ΑΔ=ΔΓ=ΓΒ=ΒΑ$.

Στο τρίγωνο ABΔ έχουμε $ΑΒ=ΑΔ$, οπότε ABΔ ισοσκελές και ΑΟ διάμεσος.

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος της βάσης είναι διχοτόμος και ύψος του τριγώνου.

Οπότε:

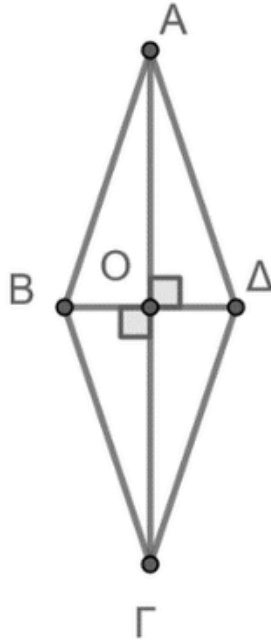
→ $ΑΟΔ = ΑΟΒ = 90^\circ$, δηλαδή $ΑΓ \perp ΒΔ$ και οι **διαγώνιοι τέμνονται κάθετα**.

→ $ΒΑΟ = ΟΑΔ$, δηλαδή ΑΟ διχοτόμος και οι **διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του ρόμβου**.

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος:

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

- Έχει **όλες** τις πλευρές του **ίσες**.
Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.
- Είναι **παραλληλόγραμμο** και **δυο διαδοχικές** πλευρές του είναι **ίσες**.
Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.
- Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι διαγώνιοί του τέμνονται **κάθετα**.



Γνωρίζουμε ότι $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο και $A\Gamma \perp B\Delta$.

Στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

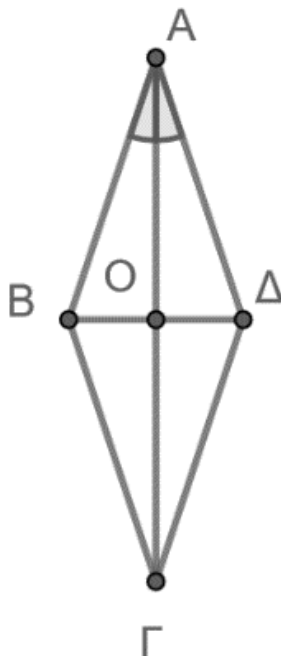
- AO διάμεσος (από ιδιότητες παραλληλογράμμου).
- Επίσης AO ύψος (από την εκφώνηση).

Άρα στο τρίγωνο $AB\Delta$ το AO είναι ύψος και διάμεσος, συνεπώς $AB\Delta$ ισοσκελές και $AB = A\Delta$.

Τελικά $AB\Gamma\Delta$ ρόμβος.

- Είναι **παραλληλόγραμμο** και μία διαγώνιάς του **διχοτομεί** μία γωνία του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



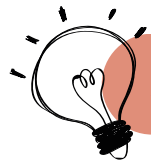
Γνωρίζουμε ότι ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ διχοτόμος.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

- ΑΟ διάμεσος (από τις ιδιότητες παραλληλογράμμου).
- ΑΟ διχοτόμος (από την εκφώνηση).

Άρα στο τρίγωνο ΑΒΔ, το ΑΟ είναι διχοτόμος και διάμεσος, συνεπώς ΑΒΔ ισοσκελές και $AB=AD$.

Τελικά ΑΒΓΔ ρόμβος.

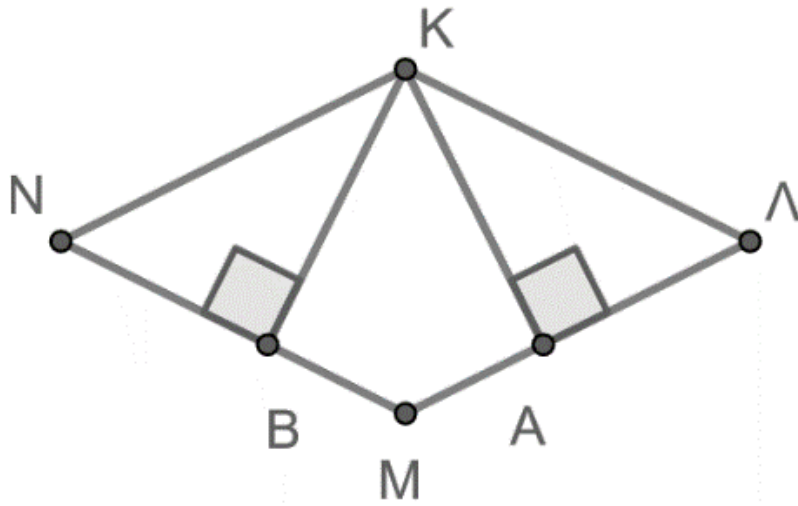


Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Στο παρακάτω παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ να δείξετε ότι αν $KA=KB$ τότε το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος.



Θα συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΝ.

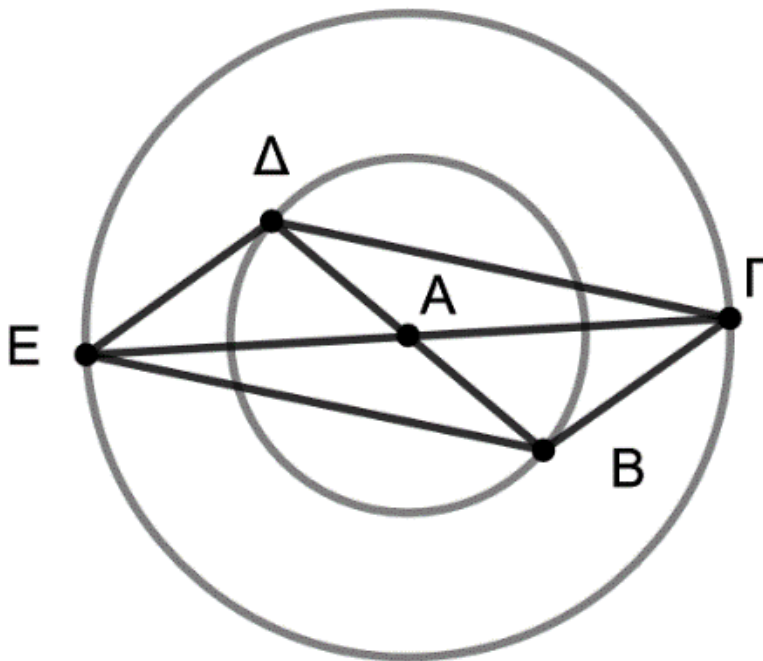
Αυτά έχουν:

- $KB=KA$ (από την εκφώνηση)
- $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$
- $\hat{\Lambda} = \hat{N}$ (απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου)

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα KBN και KAL είναι ίσα, με $KN=KL$.

Τελικά το παραλληλόγραμμο $KLMN$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ($KN=KL$) δηλαδή είναι ρόμβος.

2. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BΓΔΕ$ είναι παραλληλόγραμμο. Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει για τις διαμέτρους των κύκλων ώστε το παραλληλόγραμμο $BΓΔΕ$ να είναι ρόμβος;

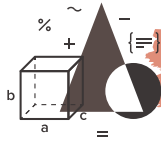


Για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο πρέπει να ικανοποιεί ένα από τα κριτήρια των παραλληλογράμμων.

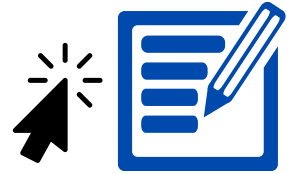
→ Στο $ΔΓΒΕ$ παρατηρούμε ότι $ΔΑ=ΑΒ$ (ακτίνες κύκλου) και $ΑΓ=ΑΕ$ (ακτίνες κύκλου).

Δηλαδή οι διαγώνιοι του τετράπλευρου διχοτομούνται, άρα $BΓΔΕ$ παραλληλόγραμμο.

Για να είναι το παραλληλόγραμμο $BΓΔΕ$ ρόμβος θα πρέπει οι διαγώνιοι να τέμνονται κάθετα, δηλαδή θα πρέπει οι διάμετροι των κύκλων να σχηματίζουν ορθή γωνία.



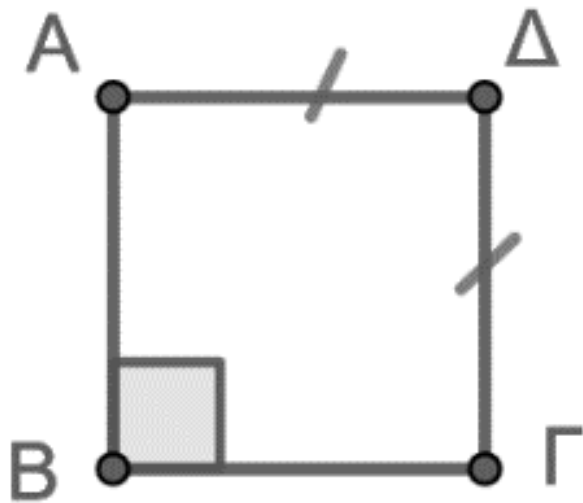
5. Τετράγωνο



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

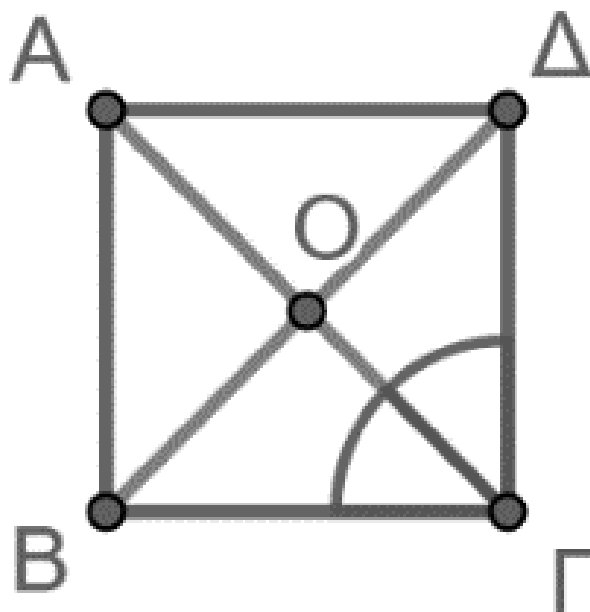
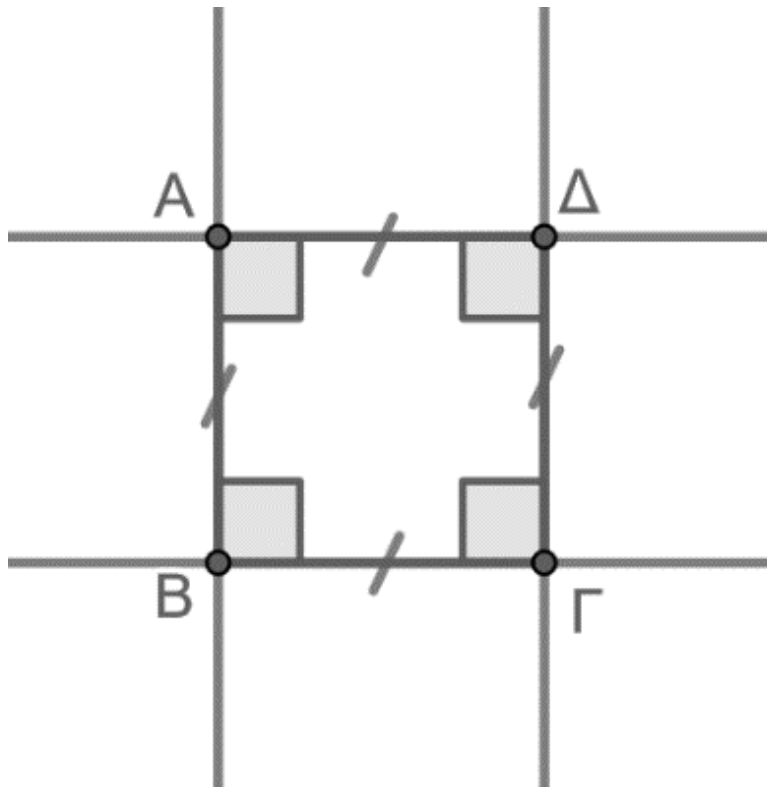
Ορισμός Τετραγώνου

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.



Ιδιότητες τετραγώνου:

- Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.
- Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
- Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες, τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του



Στα παραπάνω τετράγωνα έχουμε ότι $AB=B\Gamma=\Gamma\Delta=\Delta A$, όπως και γωνία $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$.

Επίσης $AO=O\Gamma=O\Delta=OB$ όπως και $B\hat{A}\Gamma = A\hat{B}\Delta = \dots$ κλπ

Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο:

Για να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι **τετράγωνο**, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι **ορθογώνιο** και **ρόμβος**.

Ένα **παράλληλόγραμμο** είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

- Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
- Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

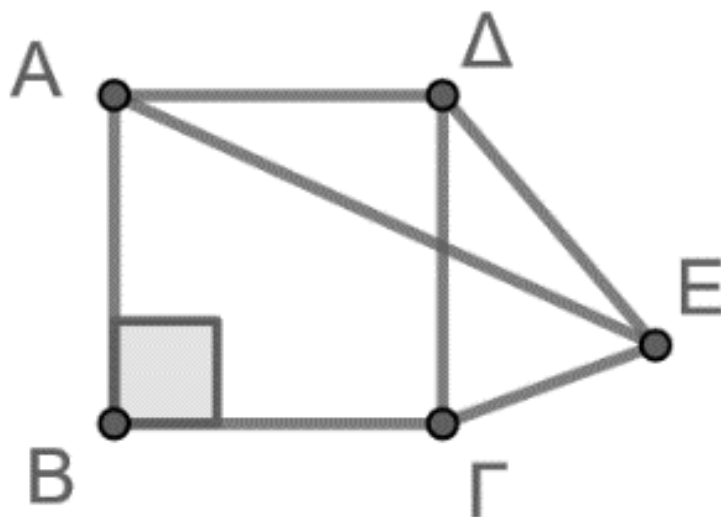


Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο. Με πλευρά $\Delta\Gamma$ γράφουμε ισοσκελές τρίγωνο $\Delta\Gamma E$, κορυφής $\hat{\Delta}$. Τι συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για το είδος του τριγώνου $\Delta\Gamma E$ ως προς τις πλευρές του;



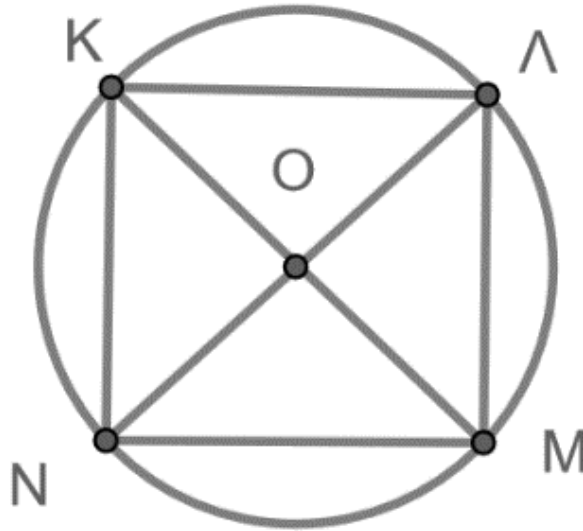
Για το τρίγωνο $\Delta\Gamma E$ έχουμε:

→ $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνο άρα $\Delta\Gamma = \Delta\Delta$.

→ $\Delta\Gamma E$ ισοσκελές άρα $\Delta\Gamma = \Delta E$.

Τελικά το $\Delta\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

2. Τι πρέπει να ισχύει για τις διαμέτρους ΚΜ και ΛΝ ώστε το τετράπλευρο ΚΛΜΝ να είναι τετράγωνο;

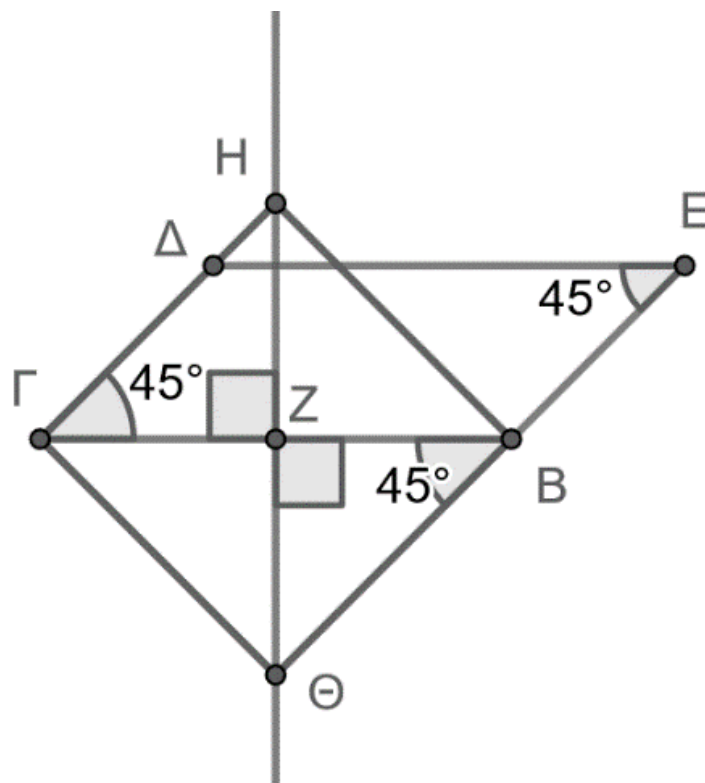


Αρχικά θα βρούμε ότι ΚΛΜΝ παραλληλόγραμμο. Αυτό προκύπτει εύκολα αφού $ΛΟ=ΝΟ=ΜΟ=ΚΟ$ (ακτίνες κύκλου), δηλαδή οι διαγώνιοι του τετράπλευρου διχοτομούνται.

Επίσης βρίσκουμε εύκολα ότι $ΛΝ=ΚΜ$, δηλαδή οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου είναι ίσες, συνεπώς είναι ορθογώνιο.

Αν οι διάμετροι ΚΜ και ΛΝ τέμνονται κάθετα τότε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

3. Γνωρίζουμε ότι ΔΕΒΓ παραλληλόγραμμο με γωνία $\hat{E} = 45^\circ$. Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΓΒ που τέμνει την ΓΒ στο σημείο Ζ και τις προεκτάσεις των ΓΔ και ΕΒ στα σημεία Η και Θ. Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο ΗΒΘΓ είναι τετράγωνο.



Αφού ΓΔΕΒ παραλληλόγραμμο ξέρουμε ότι γωνία $\hat{E} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$.

Επίσης γωνία $\hat{E} = \widehat{B_{\varepsilon\xi}}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες παράλληλων ευθειών.

Το τρίγωνο ΓΖΗ έχει γωνία $\hat{H} = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

Όμοια και στο τρίγωνο ΖΘΒ, γωνία $\hat{\Theta} = 45^\circ$.

Τα τρίγωνα ΓΖΗ και ΖΘΒ είναι ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα με ΖΓ=ΖΗ και ΖΘ=ΖΒ.

Γνωρίζουμε ότι Ζ μέσο της ΓΒ, άρα ΖΓ=ΖΒ=ΖΘ=ΖΗ

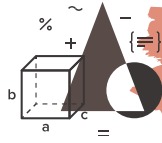
Τελικά για τις διαγώνιες του τετράπλευρου ΗΒΘΓ έχουμε:

- διχοτομούνται άρα ΗΒΘΓ παραλληλόγραμμο
- είναι ίσες, άρα ΗΒΘΓ ορθογώνιο
- τέμνονται κάθετα, άρα ΗΒΘΓ ρόμβος.

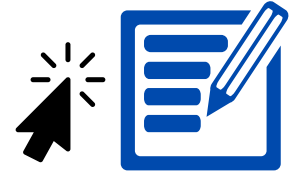


Τελικά ΗΒΘΓ τετράγωνο.





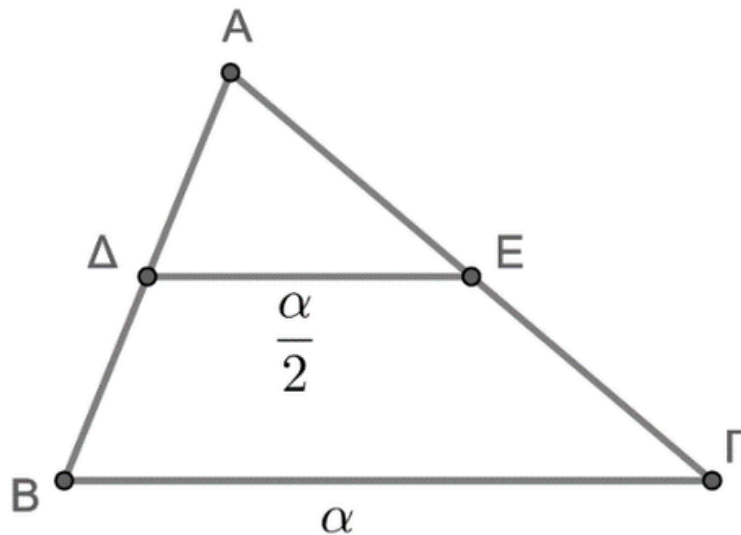
6. Εφαρμογές στα τρίγωνα



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

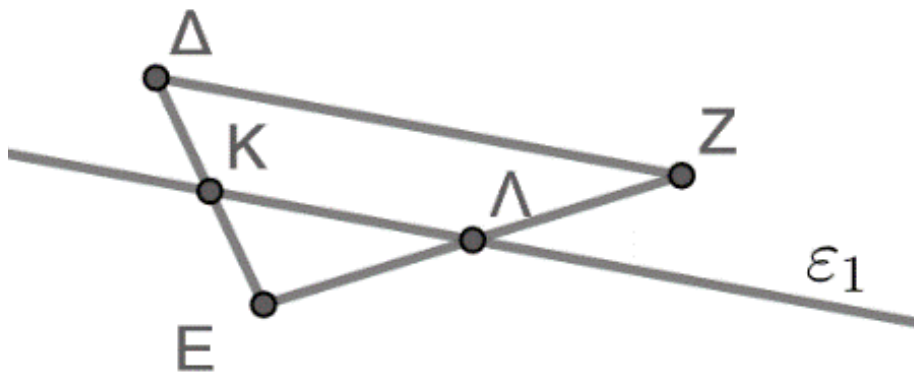
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε $DE \parallel B\Gamma$ και $DE = \frac{B\Gamma}{2}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

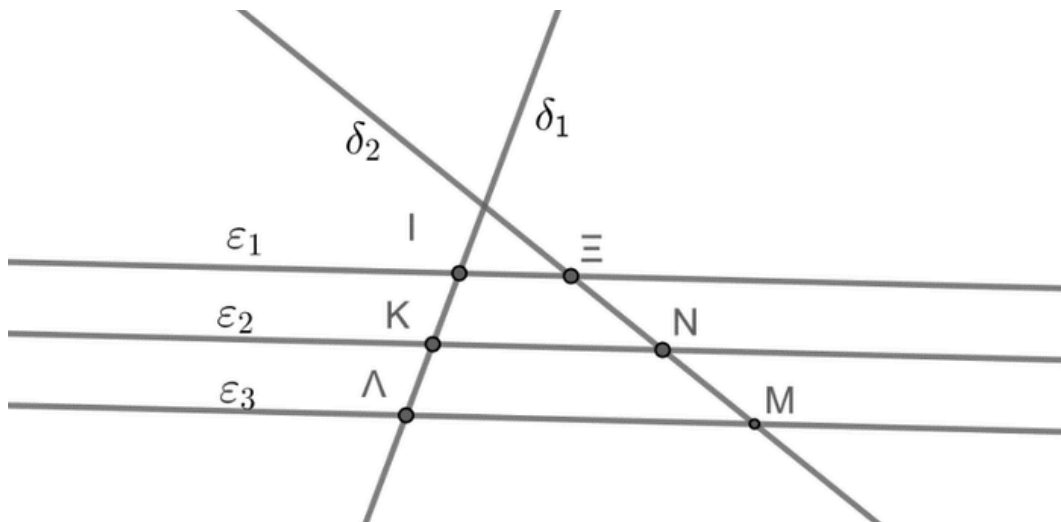
Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.



Αν Κ μέσο της ΕΔ και $\varepsilon_1 \parallel \Delta Z$, τότε Λ μέσο της ΕΖ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

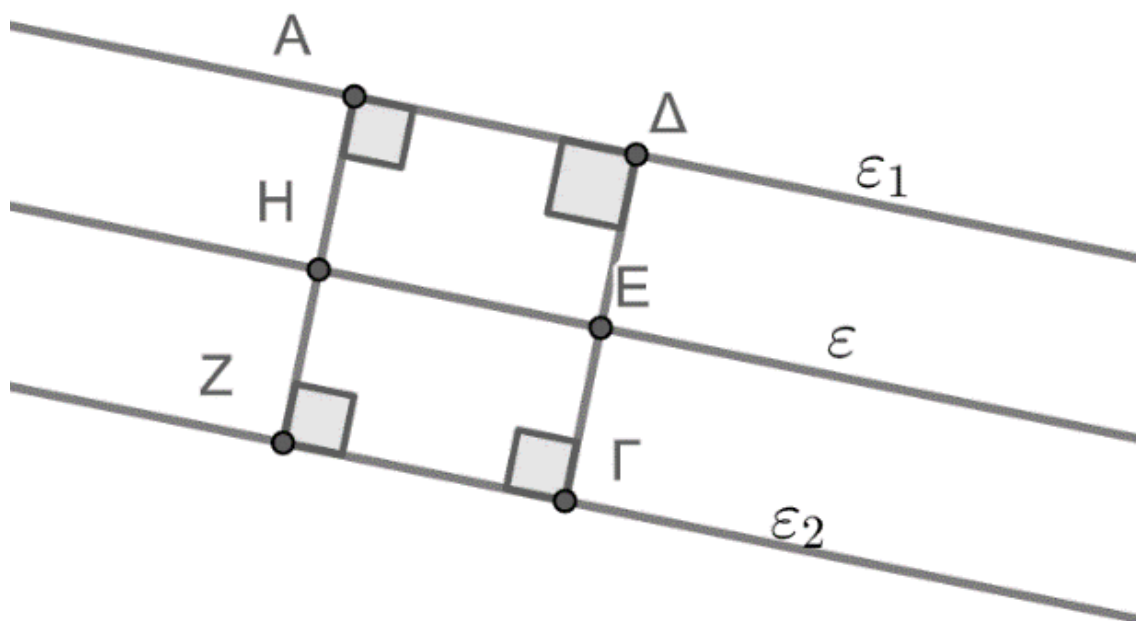


Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι παράλληλες άρα αν $IK=K\Lambda$ τότε $\Xi N=NM$.

1. Τι ονομάζουμε μεσοπαράλληλο δύο παράλληλων ευθειών;

Μεσοπαράλληλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 .

Είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 , η οποία διέρχεται από τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δυο παράλληλες.



Στο παραπάνω σχήμα η ευθεία ε είναι η μεσοπαράλληλος και τα H, E είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων AZ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

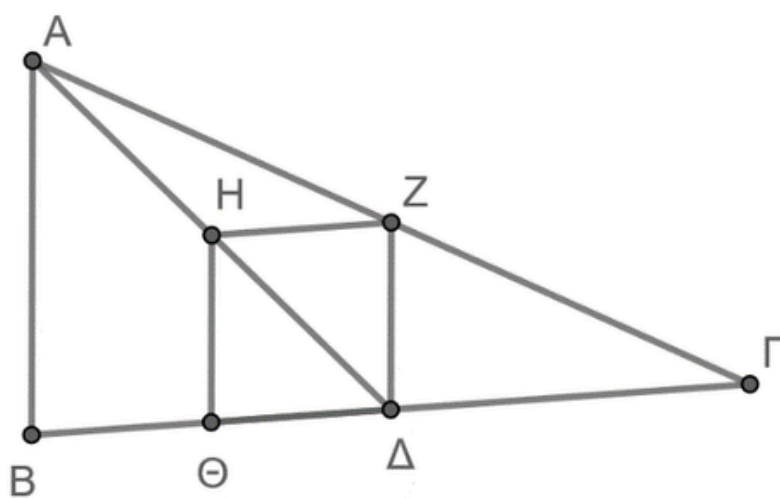


Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχω AD διάμεσο και Θ μέσο της BD , H μέσο της AD και Z μέσο της AG . Να αποδείξετε ότι $HZ\Delta\Theta$ παραλληλόγραμμο.



→ Γνωρίζουμε ότι AD διάμεσος άρα $BD = \Delta\Gamma$.

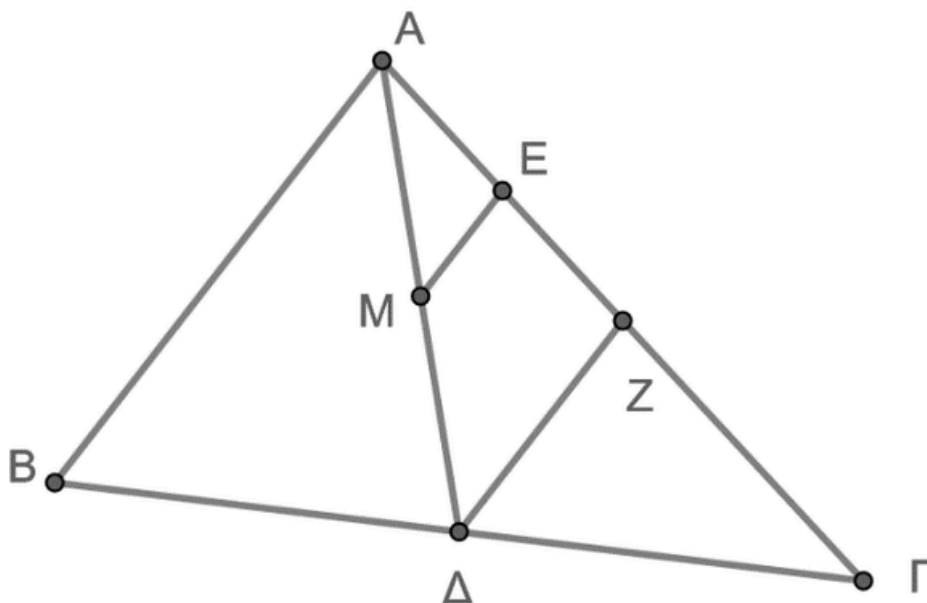
→ Στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι H και Z μέσα, άρα: $HZ \parallel \frac{\Delta\Gamma}{2}$

→ Θ μέσο της ΒΔ άρα: $\Theta\Delta = \frac{B\Delta}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{2}$.

→ Τελικά $HZ \parallel \Theta\Delta$

→ Άρα ΗΖΔΘ παραλληλόγραμμο.

2. (Βασισμένο στο θέμα 12639 της Τράπεζας Θεμάτων) Από μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ ενός τριγώνου φέρω παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $AE = \frac{1}{4} A\Gamma$

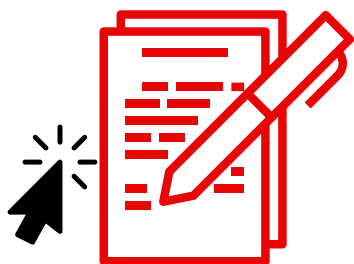


Αρχικά θα φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, αφού Δ μέσο και $\Delta Z \parallel AB$, προκύπτει ότι Ζ μέσο της ΑΓ.

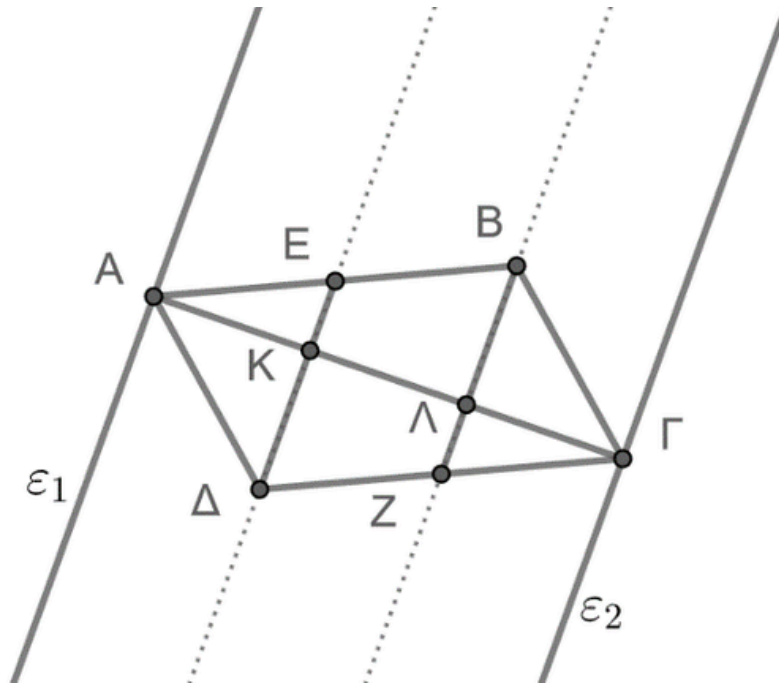
Στο τρίγωνο ΑΔΖ, αφού Μ μέσο και $ME \parallel AB \parallel \Delta Z$, προκύπτει ότι Ε μέσο της ΑΖ.

Συνεπώς $AE = \frac{1}{2} AZ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} A\Gamma = \frac{1}{4} A\Gamma$.



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

3. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε E μέσο της AB και Z μέσο της $\Delta\Gamma$. Αν η $ΕΔ$ τέμνει την $A\Gamma$ στο K και η BZ τέμνει την $A\Gamma$ στο Λ , να αποδείξετε ότι $AK=K\Lambda=ΛΓ$.



→ Αρχικά θα μελετήσουμε το τετράπλευρο $EBZ\Delta$.

Αυτό έχει $EB \parallel \Delta Z$, αφού E, Z μέσα απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου. Συνεπώς βρίσκουμε ότι $EBZ\Delta$ παραλληλόγραμμο και $E\Delta \parallel BZ$.

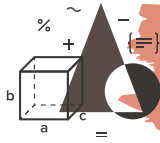
→ Θα φέρουμε από τα A και Γ παράλληλες ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 στις ΔE και BZ .

- Για τις ϵ_1 , ΔE , BZ έχουμε ότι $AE=EB$ οπότε και $AK=K\Lambda$.
- Για τις ϵ_2 , BZ , ΔE έχουμε ότι $\Gamma Z=Z\Delta$ οπότε και $\Gamma\Lambda=\Lambda K$.

Τελικά $AK=K\Lambda=\Lambda\Gamma$.

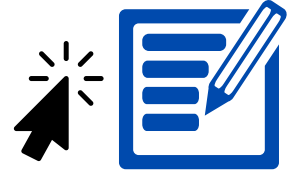


Ενότητα 5η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



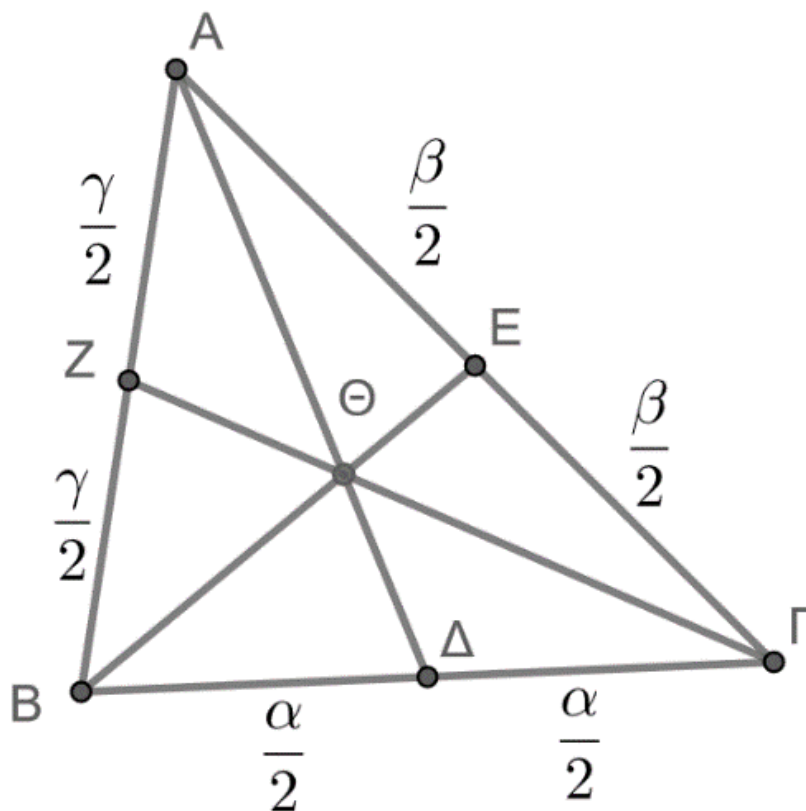
7. Βαρύκεντρο τριγώνου - 8. Το ορθόκεντρο τριγώνου

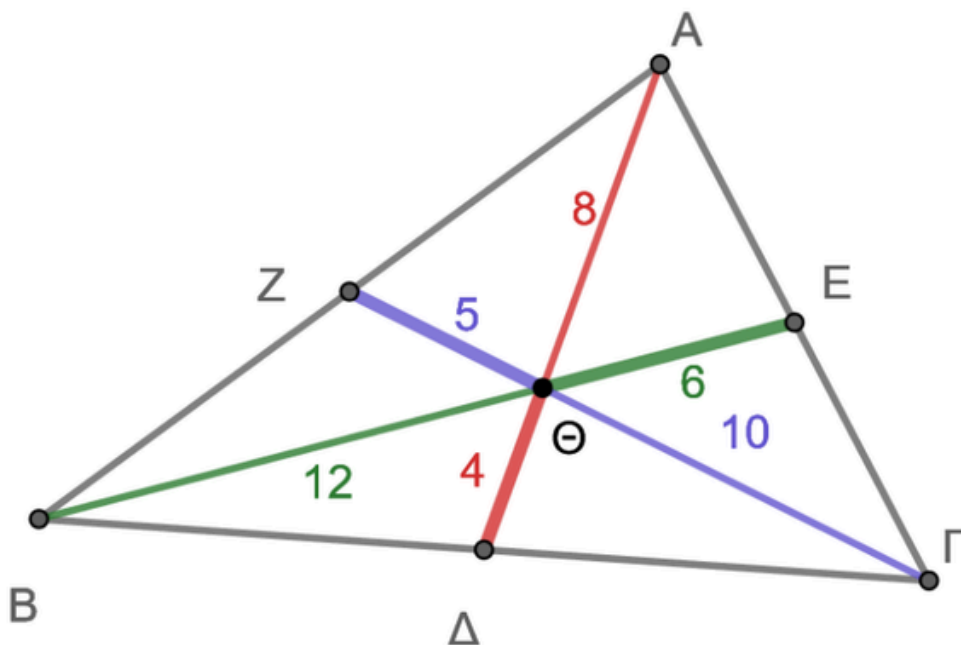
ΘΕΩΡΗΜΑ



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου. Το σημείο αυτό λέγεται **βαρύκεντρο** (ή **κέντρο βάρους**) του τριγώνου.





Στο πάνω τρίγωνο το Θ είναι το βαρύκεντρο.

- Παρατηρούμε ότι $ZΘ=5$, $ΘΓ=10$ και $ΓΖ=15$.

$$\text{Δηλαδή } ΓΘ = \frac{2}{3} ΓΖ$$

- Παρατηρούμε ότι $ΔΘ=4$, $ΘΑ=8$ και $ΑΔ=15$.

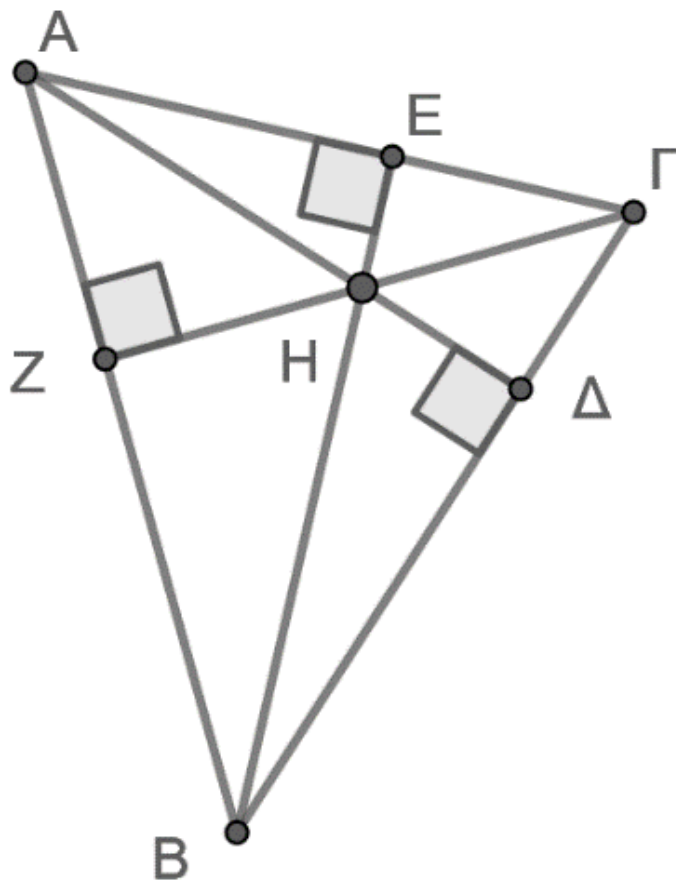
$$\text{Δηλαδή } ΑΘ = \frac{2}{3} ΑΔ$$

- Παρατηρούμε ότι $ΕΘ=6$, $ΘΒ=12$ και $ΒΕ=18$.

$$\text{Δηλαδή } ΒΘ = \frac{2}{3} ΒΕ$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.



Τα ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ και το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου.

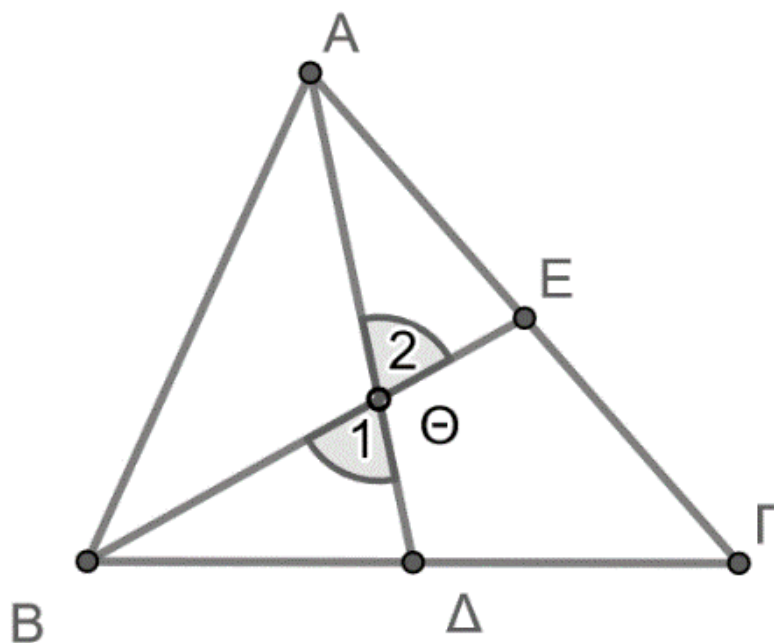


Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ μας δίνεται ότι $ΑΔ=ΒΕ$, όπου ΑΔ,ΒΕ διάμεσοι του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ=ΒΓ$.



Το Θ είναι το σημείο τομής των διαμέσων, συνεπώς Θ βαρύκεντρο.

Θα εξετάσουμε τα τρίγωνα $ΑΕΘ$ και $ΒΔΘ$.

Αυτά έχουν:

$$\rightarrow \Theta\Delta = \Theta E = \frac{1}{3} A\Delta = \frac{1}{3} B E, \Theta \text{ βαρύκεντρο}$$

$$\rightarrow \widehat{\Theta_1} = \widehat{\Theta_2}, \text{ κατακορυφήν γωνίες}$$

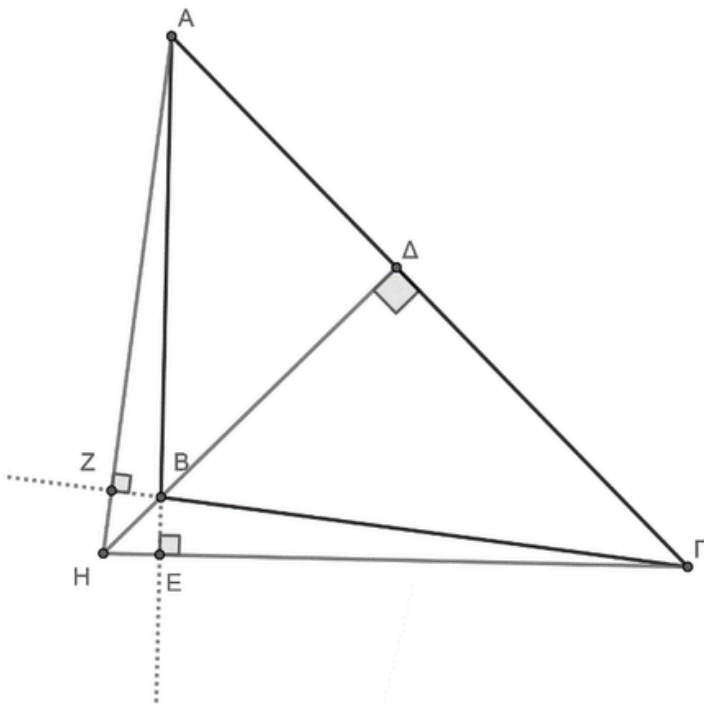
$$\rightarrow \Theta B = \Theta A = \frac{2}{3} A\Delta = \frac{2}{3} B E, \Theta \text{ βαρύκεντρο.}$$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και $ΑΕ=ΒΔ$.

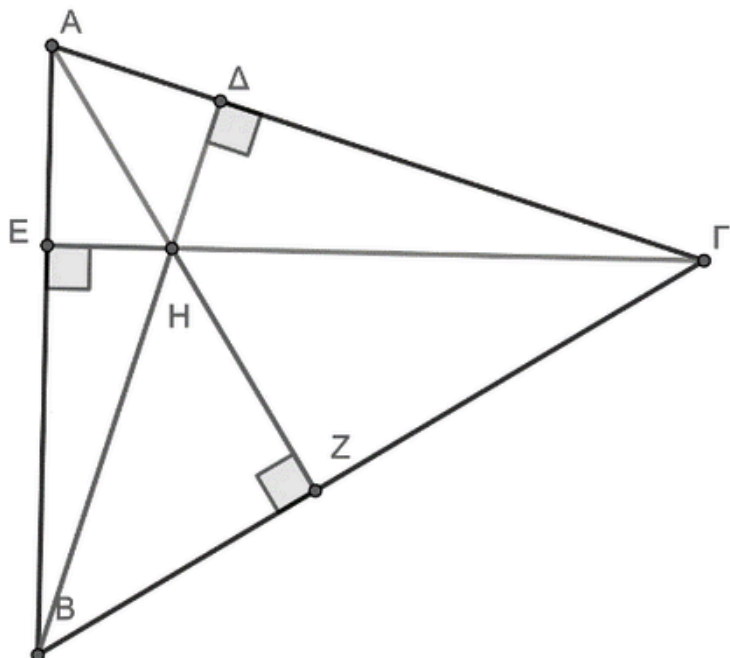
Όμως E, Δ μέσα των πλευρών οπότε $ΑΓ=ΒΓ$.



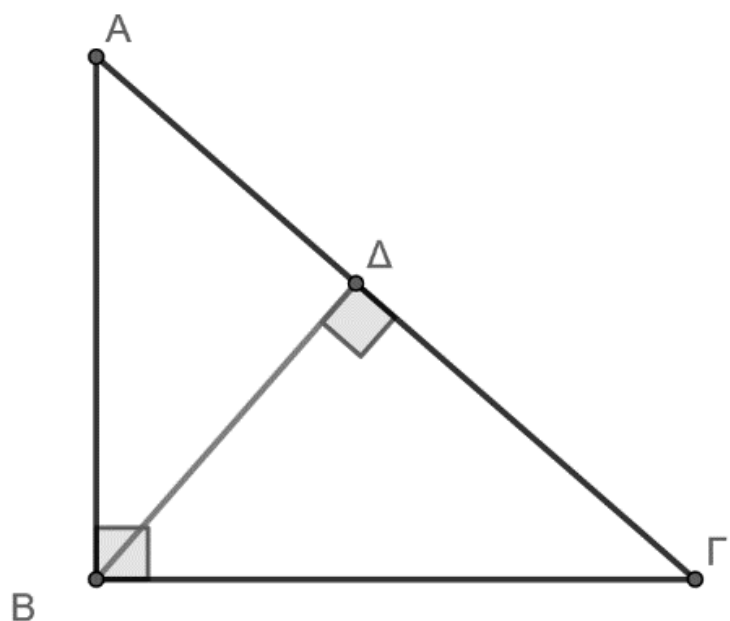
2. Να σχεδιάσετε το ορθόκεντρο σε ένα αμβλυγώνιο, ένα οξυγώνιο και ένα ορθογώνιο τρίγωνο.



Στο αμβλυγώνιο τρίγωνο, το ορθόκεντρο H βρίσκεται εκτός του τριγώνου.



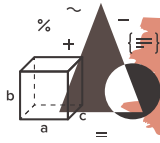
Στο οξυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο H βρίσκεται εντός του τριγώνου.



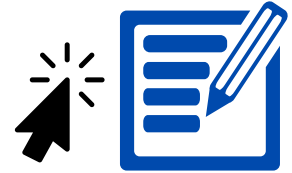
Στο ορθογώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο ταυτίζεται με την κορυφή της ορθής γωνίας.



Ενότητα 5η - Γεωμετρία Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



9. Μία ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

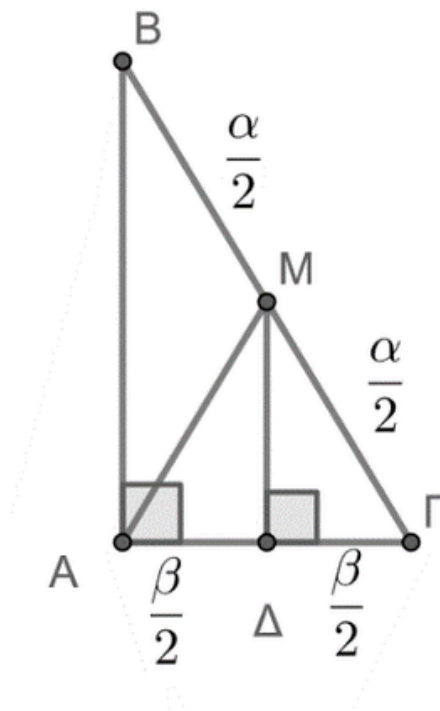


ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σε ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε την διάμεσο ΑΜ.

Στο τρίγωνο ΑΜΓ φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ, με $ΜΔ \parallel ΑΒ$ (Μ, Δ μέσα πλευρών τριγώνου). Γνωρίζουμε ότι $ΑΒ \perp ΑΓ$ άρα και $ΜΔ \perp ΑΓ$.

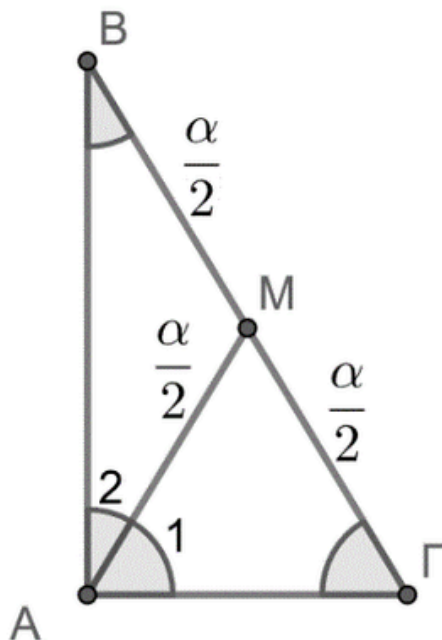
Δηλαδή στο τρίγωνο ΑΜΓ, **ΜΔ διάμεσος και ύψος** άρα ΑΜΓ ισοσκελές με:

$$ΑΜ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{α}{2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σε τρίγωνο ABΓ φέρουμε τη διάμεσο AM. Γνωρίζουμε ότι $AM = \frac{BG}{2} = \frac{\alpha}{2} = MG = MB$

→ Στο ισοσκελές τρίγωνο AMΓ ($AM=MG$) έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$

→ Στο ισοσκελές τρίγωνο AMB ($AM=MB$) έχουμε: $\hat{A}_2 = \hat{B}$

→ Παίρνουμε ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$

Στο τρίγωνο ABΓ ισχύει:

→ $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2 \text{ L}$

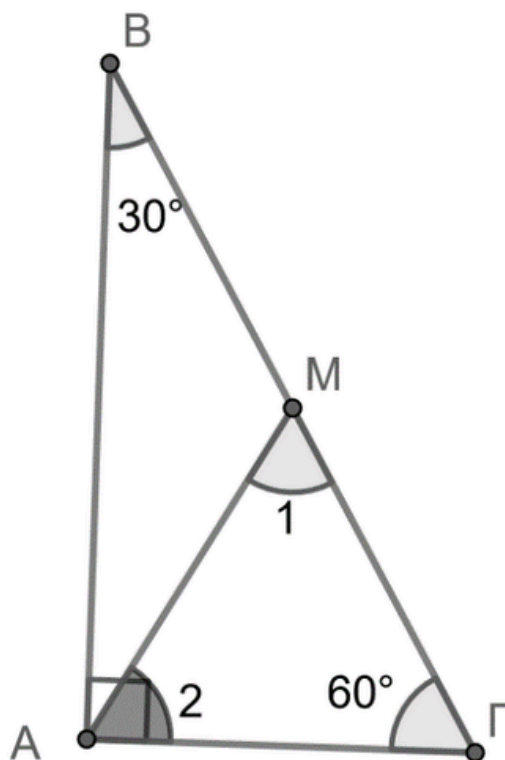
Τελικά έχουμε: $2\hat{A} = 2 \text{ L} \Rightarrow \hat{A} = 1 \text{ L}$

Δηλαδή το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά BG.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ευθύ)



Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{B} = 30^\circ$.

Άμεσα προκύπτει ότι $\hat{\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 60^\circ$.

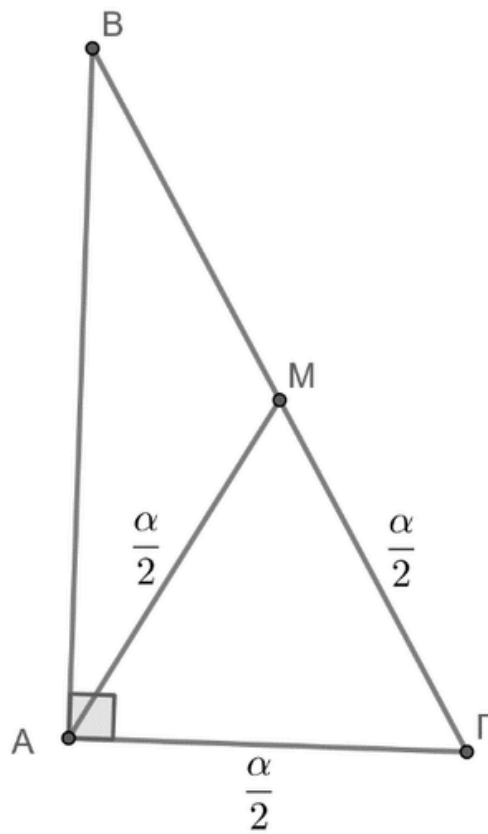
Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ για την οποία γνωρίζουμε ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$.

Το τρίγωνο ΑΜΓ έχει $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} = 60^\circ$. Προκύπτει άμεσα ότι $\hat{M}_1 = 60^\circ$.

Άρα **ΑΜΓ ισόπλευρο** και $A\Gamma = M\Gamma \Rightarrow A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

Δηλαδή σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά απέναντι από γωνία 30° είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (αντίστροφο)



Για ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) γνωρίζουμε ότι $AG = \frac{BG}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Φέρουμε τη διάμεσο AM , για την οποία ισχύει επίσης $AM = \frac{BG}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Το τρίγωνο $AM\Gamma$ έχει $AM = AG = \frac{BG}{2} = \frac{\alpha}{2}$ δηλαδή **είναι ισόπλευρο** και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Άμεσα προκύπτει ότι $\hat{B} = 30^\circ$.

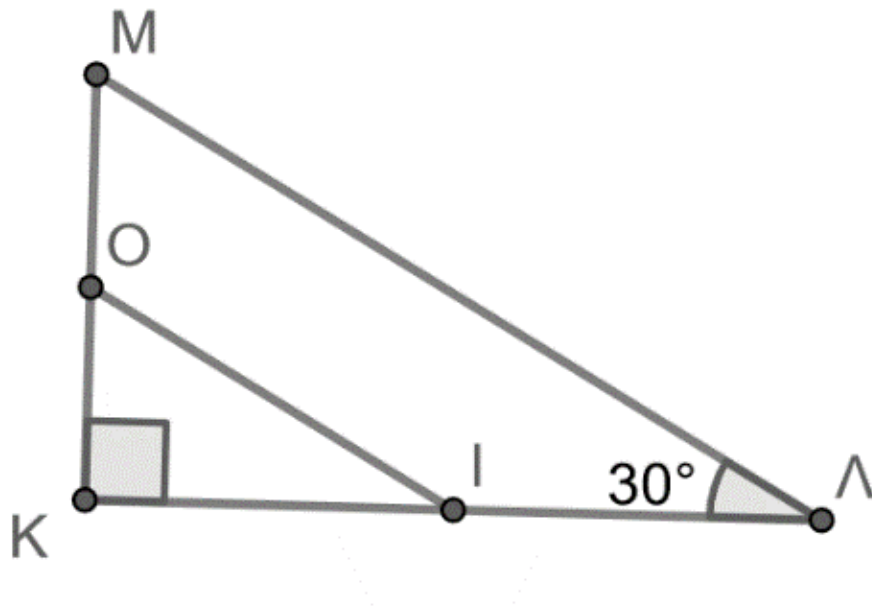
Δηλαδή σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, απέναντι από πλευρά ίση με το μισό της υποτείνουσας, βρίσκεται γωνία 30° .



Λυμένα Παραδείγματα



1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ ($\hat{K} = 90^\circ$), παίρνουμε Ι και Ο μέσα των κάθετων πλευρών. Να αποδείξετε ότι αν $\hat{\Lambda} = 30^\circ$ τότε $ΙΟ = ΚΜ$.

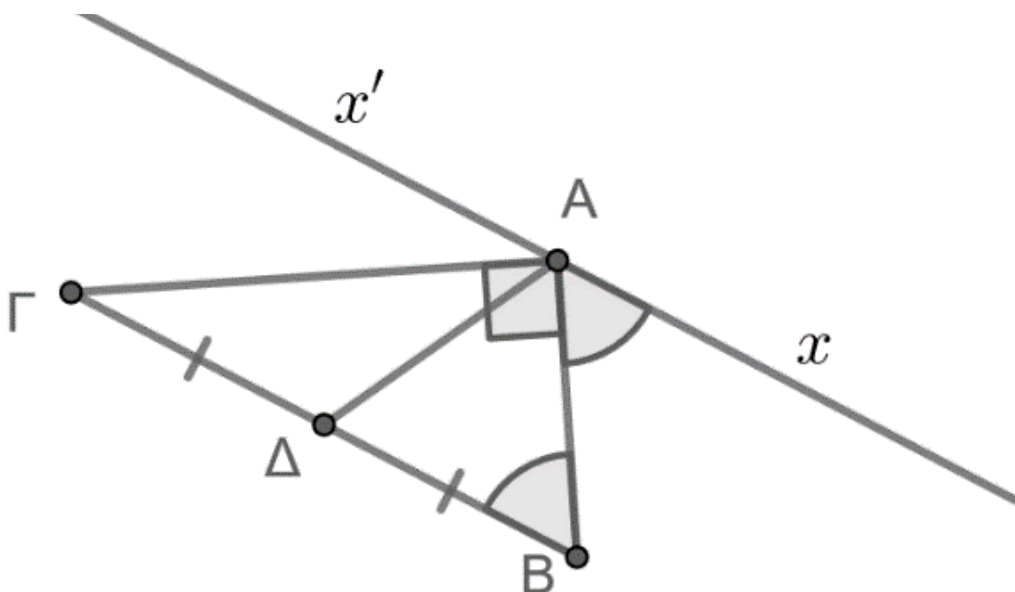


→ Τα Ι και Ο είναι μέσα πλευρών τριγώνου οπότε $ΙΟ \parallel \frac{ΜΛ}{2}$.

→ $\hat{\Lambda} = 30^\circ$, οπότε $ΜΚ = \frac{ΜΛ}{2}$.

Τελικά $ΙΟ = ΜΚ = \frac{ΜΛ}{2}$.

2. (Βασισμένο στο θέμα 36328 της Τράπεζας Θεμάτων) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) παίρνουμε Δ μέσο της υποτείνουσας και από το σημείο Α φέρω ευθεία $x'x \parallel ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι ΑΔ διχοτόμος της $\triangle \hat{A}x$.



→ Αφού $\Delta\Delta$ διάμεσος που βαίνει στην υποτείνουσα παίρνουμε $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$.

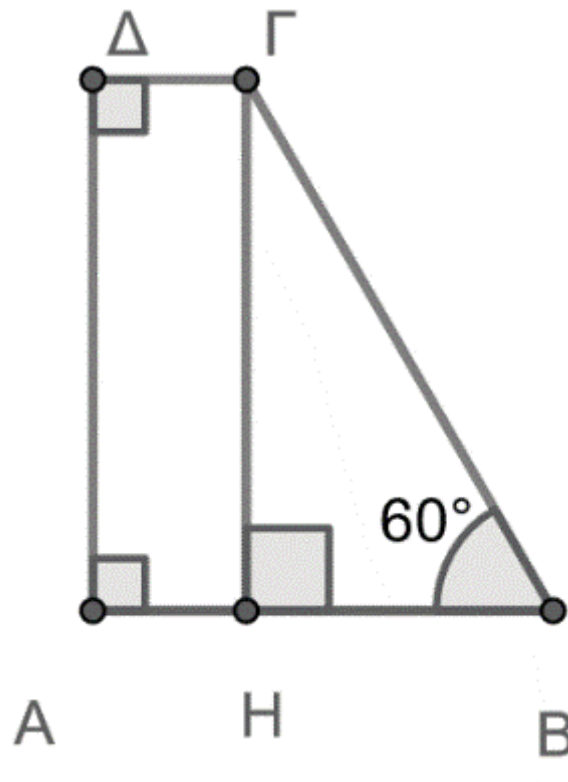
→ Δ μέσο της $B\Gamma$ άρα $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $\Delta\Delta B$ ισοσκελές και $\hat{\Delta}\hat{A}B = \hat{B}$.

→ Αφού $\chi'\chi \parallel B\Gamma$, $\hat{B} = \hat{B}\hat{A}\chi$ ως εντός εναλλάξ γωνίες παράλληλων ευθειών .

Τελικά $\hat{\Delta}\hat{A}B = \hat{B}\hat{A}\chi$ και AB διχοτόμος της $\Delta\hat{A}\chi$.

3. (Βασισμένο στο θέμα 34408 της Τράπεζας Θεμάτων) Για το παρακάτω σχήμα γνωρίζουμε ότι $B\Gamma = 4\Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma H$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με $AH = \frac{1}{2}HB$



Το τρίγωνο $H\Gamma B$ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, άρα $HB = \frac{B\Gamma}{2}$.

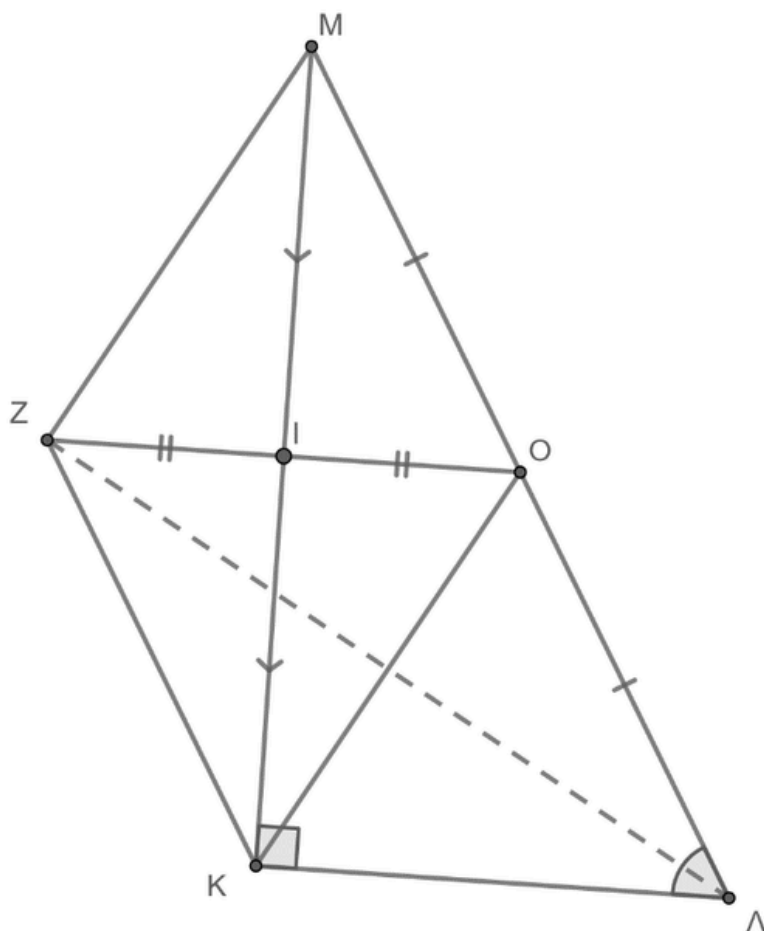
Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $B\Gamma = 4\Delta\Gamma$, άρα $HB = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{4\Delta\Gamma}{2} = 2\Delta\Gamma$.

Δηλαδή $\Delta\Gamma = \frac{HB}{2}$.

Το τετράπλευρο ΑΗΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αφού έχει 3 γωνίες ορθές.

Τελικά παίρνουμε $AH = \Delta\Gamma = \frac{HB}{2}$.

4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ ($\hat{K} = 90^\circ$) παίρνουμε Ο μέσο της ΛΜ και Ι μέσο της ΚΜ. Αν ΙΖ προέκταση της ΟΙ με ΙΖ=ΟΙ, να αποδείξετε ότι ΟΚΖΜ ρόμβος. Αν επιπλέον $\hat{\Lambda} = 60^\circ$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΖ είναι ισοσκελές.



→ Για να δείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο: στο τετράπλευρο KOMZ οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

→ Για να δείξουμε ότι είναι ρόμβος: OK διάμεσος που βαίνει σε υποτείνουσα άρα $OK = \frac{ML}{2} = OM$.

Τελικά KOMZ ρόμβος.

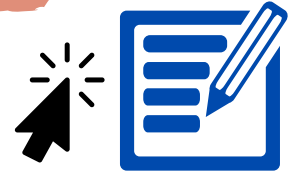
Αν επιπλέον $\hat{A} = 60^\circ$, τότε $\hat{M} = 30^\circ$ και $KL = \frac{ML}{2} = KZ$, δηλαδή KΛΖ ισοσκελές.





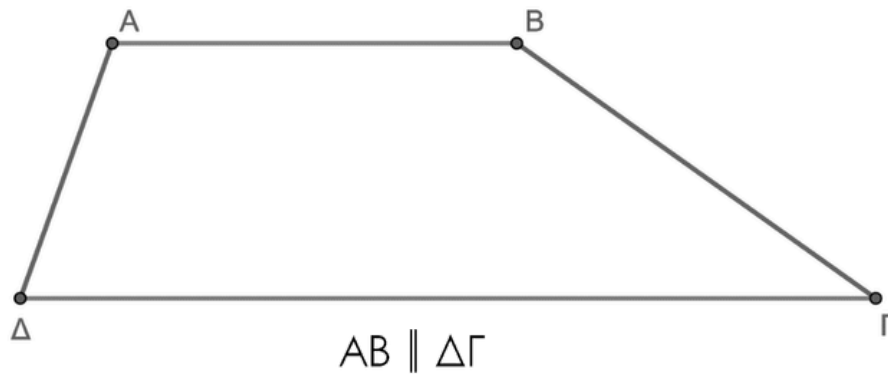
10. Τραπεζίο - 11. Ισοσκελές τραπέζιο

Ορισμός τραπεζίου



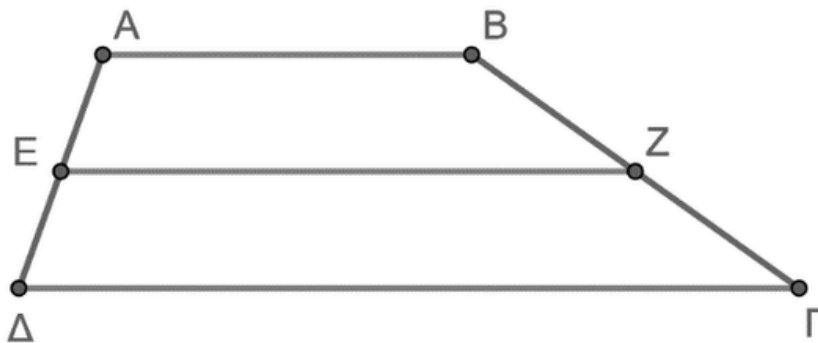
ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



ΘΕΩΡΗΜΑ

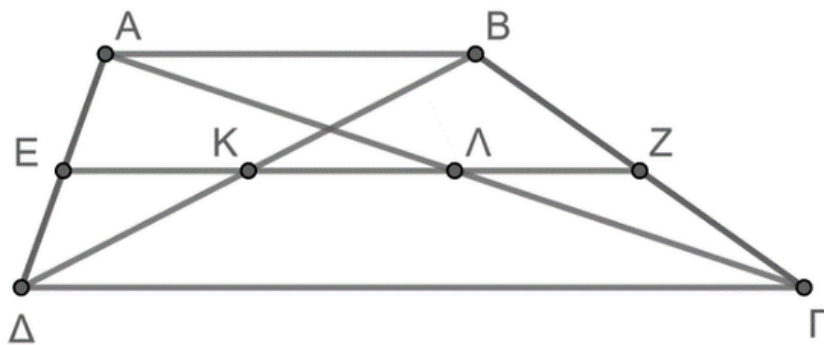
Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.



$$EZ = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2}, \quad EZ \parallel AB \parallel \Delta\Gamma$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

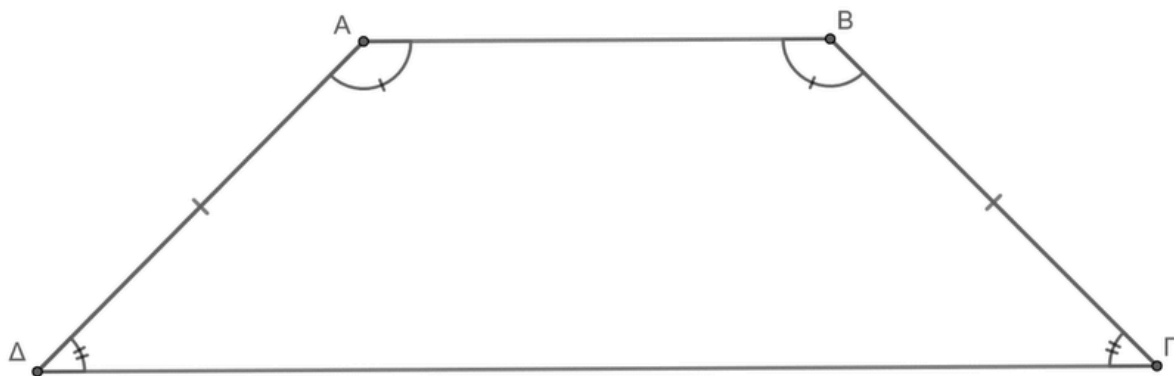
Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεων του



$$ΚΛ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}, ΚΛ \parallel ΑΒ \parallel ΔΓ$$

Ορισμός ισοσκελούς τραπεζίου

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

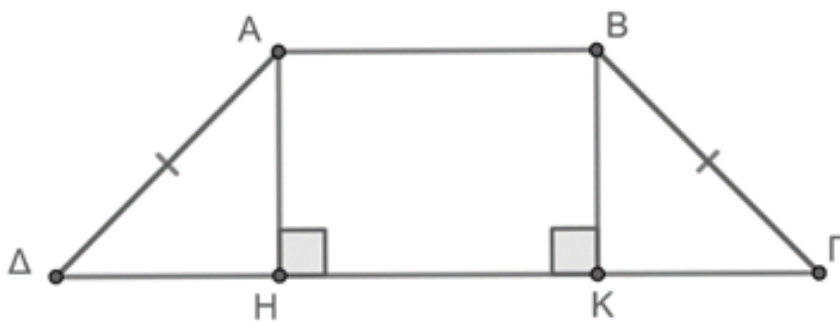


Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:

- Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έχουμε $AD = BG$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$.

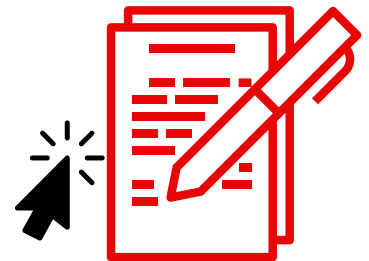
Φέρουμε τα ύψη AH και BK και **συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AH\Delta$ και $BK\Gamma$** .

Αυτά έχουν:

→ $AD = BG$ (από υπόθεση)

→ $\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$

→ $AH = BK$, $AB \parallel \Gamma\Delta$



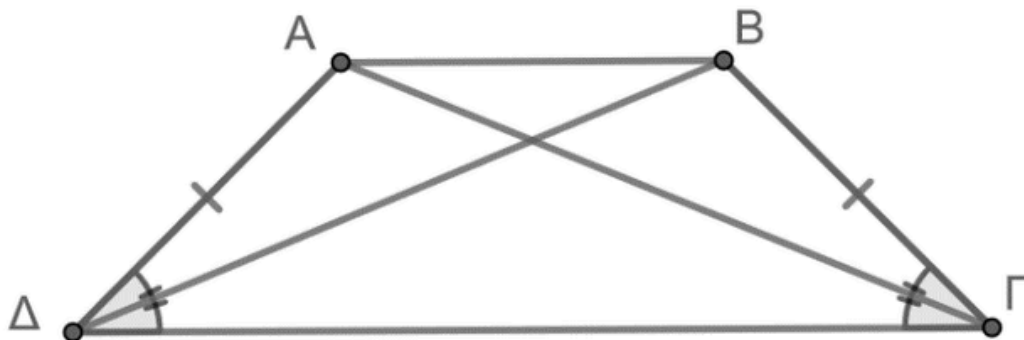
ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$.

Αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$, $180^\circ = \hat{A} + \hat{\Delta} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B}$.

- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Έχουμε ότι $AD = BG$, $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ και φέρουμε τις διαγώνιους $A\Gamma$ και $B\Delta$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$.

Αυτά έχουν:

→ $AD = BG$ (από υπόθεση)

→ ΔG κοινή πλευρά

→ $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (από υπόθεση)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και $AG = BD$.

Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές :

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

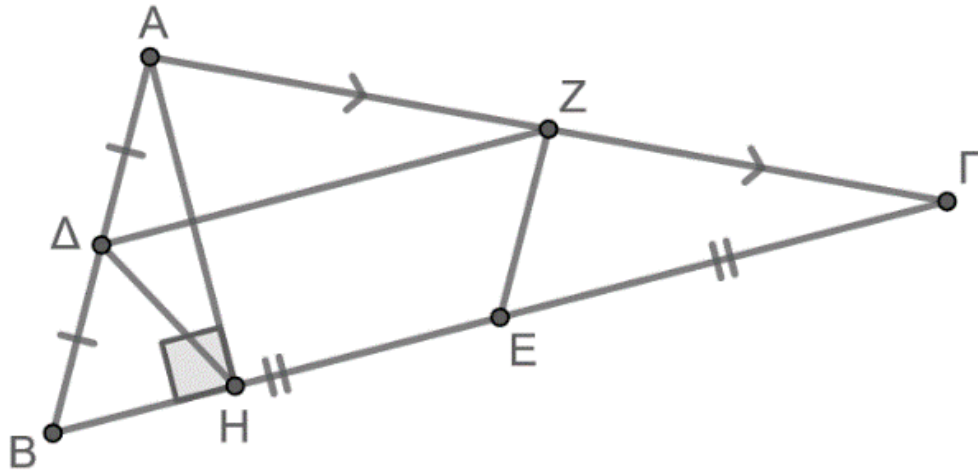
- Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ



1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε Z μέσο της $A\Gamma$, E μέσο της $B\Gamma$, Δ μέσο της AB και AH ύψος. Να αποδείξετε ότι ΔZEH ισοσκελές τραπέζιο.



Για να είναι τραπέζιο πρέπει να έχει δύο πλευρές παράλληλες.

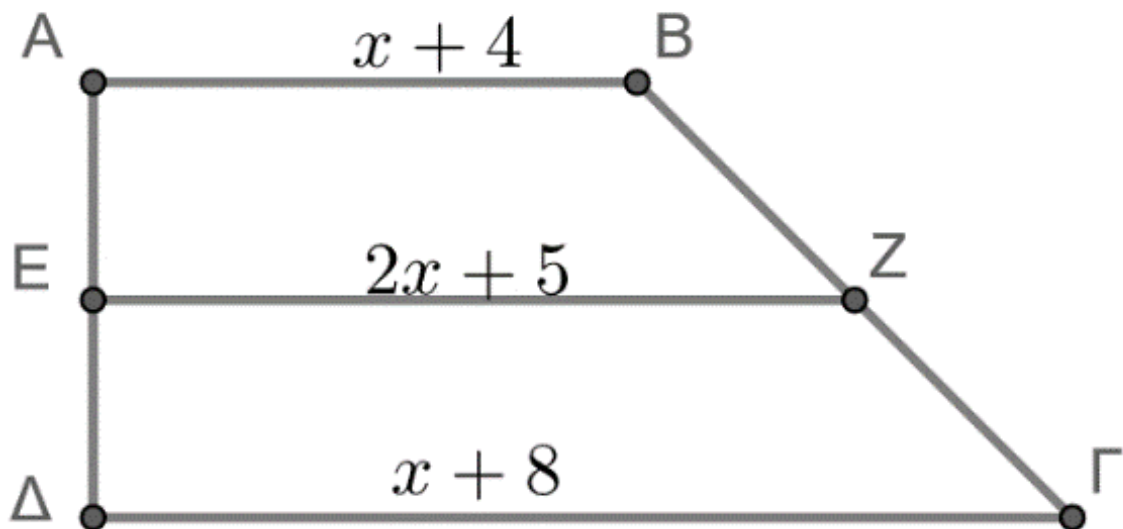
- Βρίσκουμε εύκολα ότι $\Delta Z \parallel HE$, αφού Δ, Z μέσα πλευρών τριγώνων άρα $\Delta Z \parallel B\Gamma$.

Για να είναι το τραπέζιο ΔZEH ισοσκελές αρκεί οι μη παράλληλες πλευρές να είναι ίσες.

- $EZ = \frac{AB}{2}$, αφού E, Z μέσα πλευρών τριγώνου
- $H\Delta = \frac{A\Delta}{2}$, αφού διάμεσος ορθογωνίου που βαίνει σε υποτείνουσα
- Βρήκαμε $EZ = \Delta H$.

Τελικά το ΔZEH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

2. Να βρείτε το μήκος των βάσεων στο παρακάτω τραπέζιο.



Γνωρίζουμε ότι ισχύει $EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.

Οπότε παίρνουμε:

$$2x + 5 = \frac{x + 4 + x + 8}{2}$$

$$2x + 5 = \frac{2x + 12}{2}$$

$$4x + 10 = 2x + 12$$

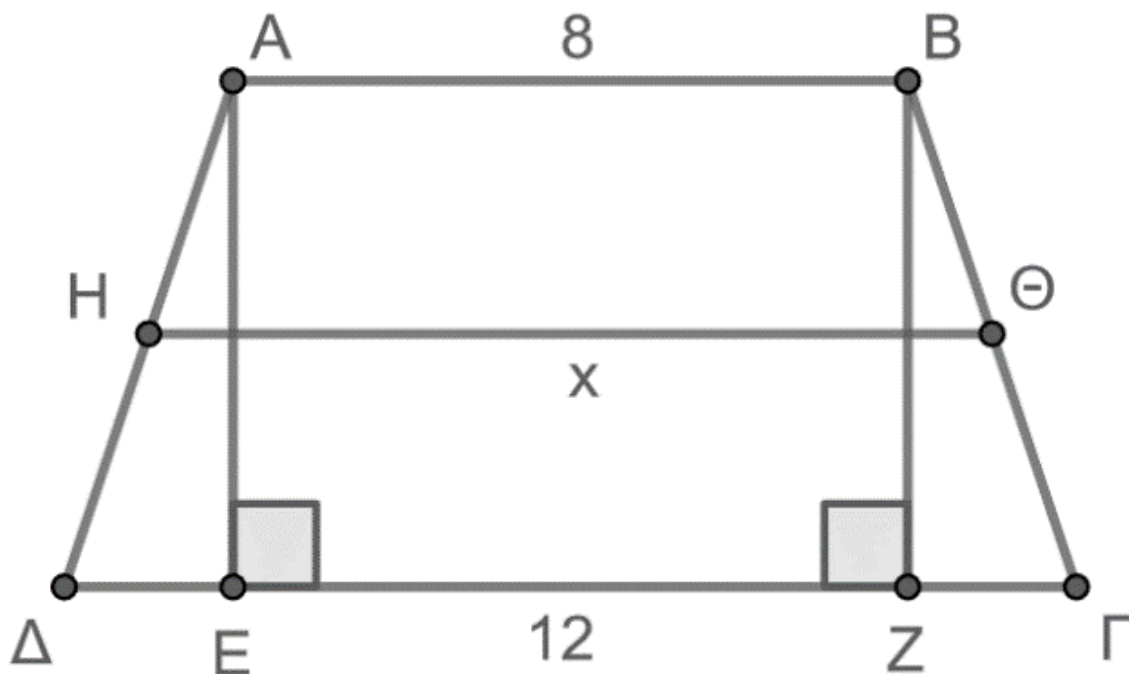
$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Οπότε για τις πλευρές έχουμε $AB=5$ και $\Delta\Gamma=9$.

3. (Βασισμένο στο θέμα 37010 της Τράπεζας Θεμάτων) Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB=8$ και $\Delta\Gamma=12$.

- α. αποδείξτε ότι $\Delta E = Z\Gamma$
- β. βρείτε την διάμεσο $H\Theta$
- γ. αν $\Delta H=3$, βρείτε την περίμετρο του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$



α. Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AE\Delta$ και $BZ\Gamma$.

Αυτά έχουν:

$$\rightarrow \hat{E} = \hat{Z} = 90^\circ$$

$$\rightarrow A\Delta = B\Gamma \text{ (ισοσκελές τραπέζιο)}$$

$$\rightarrow \hat{\Delta} = \hat{\Gamma} \text{ (ισοσκελές τραπέζιο)}$$

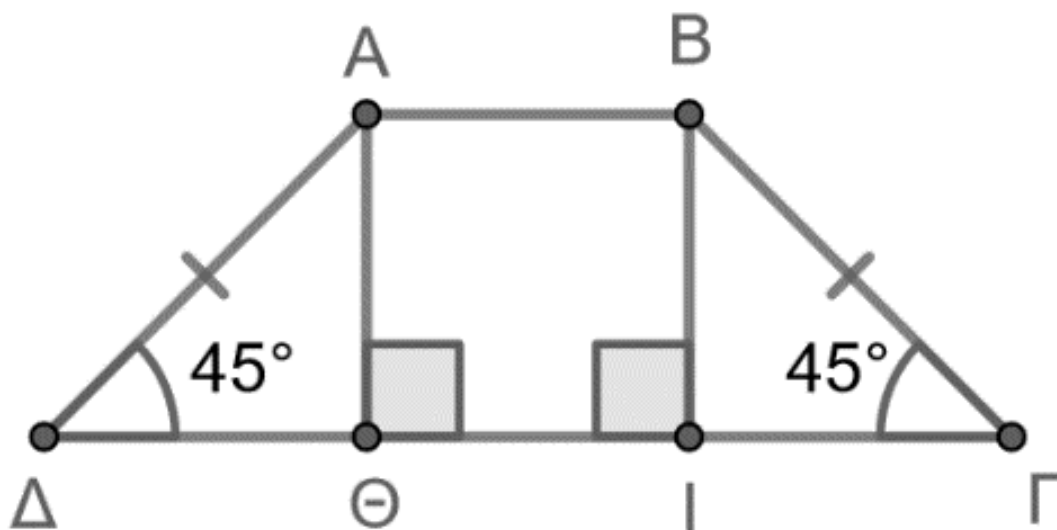
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και $\Delta E = Z\Gamma$.

β. Για την ΗΘ θα πάρουμε

$$ΗΘ = \frac{AB + ΔΓ}{2} = \frac{8 + 12}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

γ. Αν ΔΗ=3, εύκολα βρίσκουμε ότι ΑΔ=6=ΒΓ. Οπότε για την περίμετρο του τραπεζίου θα πάρουμε ΑΒΓΔ=8+6+12+6=32

4. Αν γνωρίζουμε ότι ΔΘ=ΘΙ, τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για το τετράπλευρο ΑΒΙΘ;



Το τετράπλευρο ΑΒΙΘ είναι τετράγωνο.



Για τις γωνίες του ΑΒΙΘ, εύκολα βρίσκουμε ότι $\widehat{\Theta ΑΒ} = \widehat{ΑΒΙ} = \widehat{Ι} = \widehat{\Theta} = 90^\circ$

$ΑΒ \parallel ΔΓ$ και $\widehat{\Theta ΑΒ}, \widehat{\Theta}$ εντός επί τα αυτά παράλληλων ευθειών, κοκ.

→ Για τις πλευρές του ΑΒΙΘ: $\widehat{\Delta} = 45^\circ$, άρα ΑΔΘ ισοσκελές και $\Delta\Theta = Α\Theta = ΒΙ$.

→ Ταυτόχρονα $\Delta\Theta = \Theta Ι = ΑΒ$ (από εκφώνηση). Δηλαδή έχουμε $ΑΒ = ΒΙ = Ι\Theta = Α\Theta$.

ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΚΔΟΣΗΣ:
Πρόδρομος Μιχαλάκης

© ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΛΥΣΑΡΙ | LISARI.GR
& Πρόδρομος Μιχαλάκης



Πανόρμου 14 & Σμύρνης,
12242, Αιγάλεω
τηλ.: 210 5982 614
e-mail: info@lisari.gr
www.lisari.gr

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται από τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και από τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η χωρίς γραπτή άδεια του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή οποιοδήποτε μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

