

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ



Διαδραστικό Βοήθημα

Θεωρία - VideoΜαθήματα - Ασκήσεις

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

E.1 Το Λεξιλόγιο της Λογικής

E.2 Σύνολα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Οι Πραγματικοί Αριθμοί

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητες τους

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού

3.2 Η Εξίσωση $x^2=a$

3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: Ανισώσεις

4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού

4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο: Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες

5.2 Αριθμητική Πρόοδος

5.3 Γεωμετρική Πρόοδος

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων

6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης.

6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

6.3 Η Συνάρτηση $f(x)=ax + \beta$



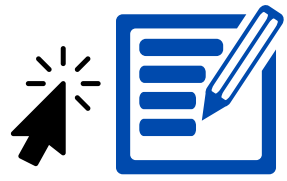
πιθανότητες



Εισαγωγή - Άλγεβρα Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



Εισαγωγικό Κεφάλαιο



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι είναι η συνεπαγωγή;

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q , τότε λέμε ότι ο P συνεπάγεται τον Q και γράφουμε $P \Rightarrow Q$.

Ο ισχυρισμός « $P \Rightarrow Q$ » λέγεται συνεπαγωγή και διαβάζεται «αν P , τότε Q ». Ο P λέγεται υπόθεση της συνεπαγωγής, ενώ ο Q λέγεται συμπέρασμα αυτής.

$$\text{π.χ. } \alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$$

2. Τι είναι η ισοδυναμία;

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P , να αληθεύει και ο Q και όταν αληθεύει ο Q , να αληθεύει και ο P , τότε λέμε ότι ο P συνεπάγεται τον Q και αντίστροφα ή αλλιώς, ότι ο P είναι ισοδύναμος με τον Q και γράφουμε $P \Leftrightarrow Q$.

Ο ισχυρισμός « $P \Leftrightarrow Q$ » λέγεται ισοδυναμία και διαβάζεται « P αν και μόνο αν Q ».

$$\text{π.χ. } \alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^5 = \beta^5$$

3. Τι είναι η διάζευξη ισχυρισμών;

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P ή Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που ένας τουλάχιστον από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός « P ή Q » λέγεται διάζευξη των P και Q .

$$\text{π.χ. Για } (x-1)(x+1)=0 \text{ αρκεί } x=1 \text{ ή } x=-1$$

4. Τι είναι η σύζευξη ισχυρισμών;

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P και Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που και οι δύο ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός « P και Q » λέγεται σύζευξη των P και Q .

π.χ. Για $(\alpha - 1)^2 + (\beta + 2)^2 = 0$ πρέπει $\alpha = 1$ και $\beta = -2$

5. Τι ονομάζουμε σύνολο;

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που είναι καλά ορισμένη και κάθε στοιχείο της διακρίνεται από κάθε άλλο. Τα αντικείμενα που αποτελούν το σύνολο ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

Ένα σύνολο πρέπει να είναι «καλώς ορισμένο», δηλαδή τα στοιχεία του να μπορούν να αναγνωρίζονται με σιγουριά.

π.χ. Το σύνολο «φαγητά που περιέχουν κιμά» είναι ένα «καλώς ορισμένο» σύνολο ενώ το σύνολο «νόστιμα φαγητά» δεν είναι «καλώς ορισμένο».

6. Ποια είναι τα βασικά σύνολα των αριθμών;

- με $\mathbb{N}$ συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,
- με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών,
- με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών,
- με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

7. Ποιο συμβολισμό χρησιμοποιούμε για να δείξουμε ότι ένα στοιχείο ανήκει σε ένα σύνολο;

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A , γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A », ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A ».

π.χ. Λέμε $2 \in \mathbb{Z}$ και $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

8. Πώς μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα σύνολο;

- Με αναγραφή των στοιχείων του: Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντας τα με το κόμμα.

π.χ. Το σύνολο “δέκα πρώτοι άρτιοι αριθμοί” είναι το σύνολο:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

- Με περιγραφή των στοιχείων του: Αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα I , τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με: $\{x \in \Omega \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$ και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in \Omega$, όπου x έχει την ιδιότητα I ».

π.χ. Το σύνολο όλων των περιττών αριθμών είναι το σύνολο

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ περιττός}\}$$

9. Πότε δύο σύνολα είναι ίσα;

Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. «Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A ».

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A = B$.

π.χ. Τα $A = \{1, 2, 3, 6\}$ και $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ θετικός διαιρέτης του } 6\}$ είναι ίσα σύνολα, δηλαδή $A=B$.

10. Πότε ένα σύνολο λέγεται υποσύνολο ενός άλλου συνόλου;

Ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B , όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A \subseteq B$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:

- i) $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο A .
- ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.
- iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

π.χ. Έστω τα σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, 2\}$. Κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A οπότε γράφουμε $B \subseteq A$.

11. Ποιο σύνολο ονομάζεται κενό;

Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.
Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

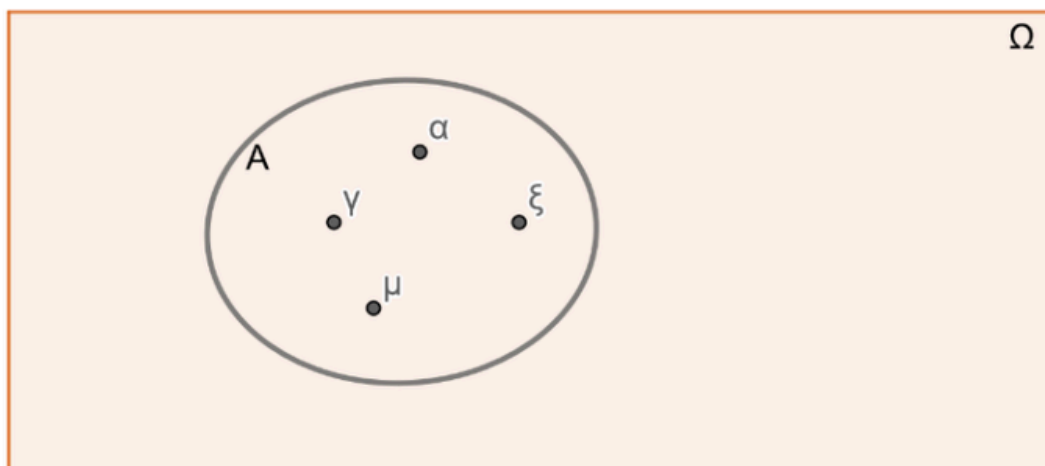
π.χ. Το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{N} / x+3 = 0\}$ είναι κενό σύνολο αφού δεν υπάρχει κανένας φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε να είναι λύση της εξίσωσης $x+3=0$. Δηλαδή $A = \emptyset$.

12. Πώς αξιοποιούμε τα διαγράμματα Venn;

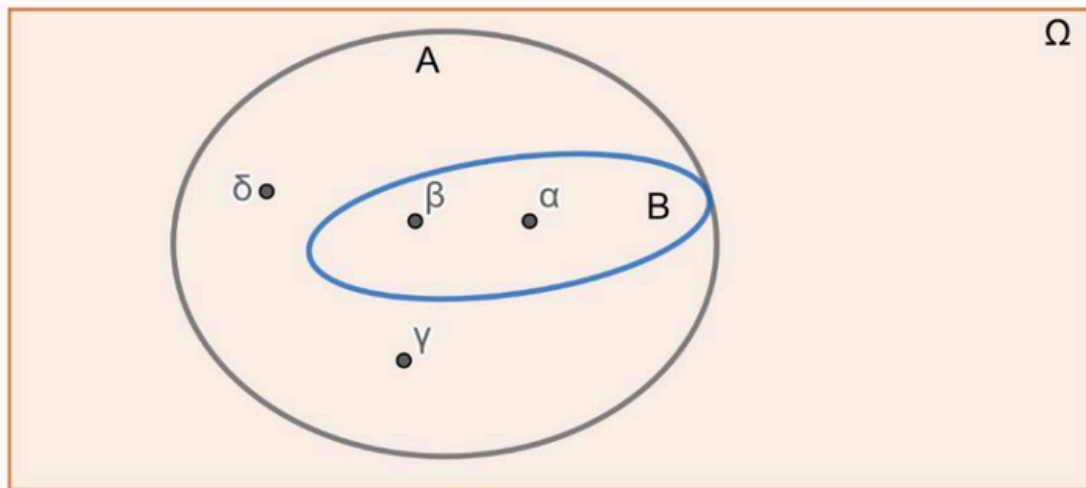
Για να παρουσιάσουμε τα σύνολα και τις μεταξύ τους σχέσεις αξιοποιούμε τα διαγράμματα Venn.

13. Τι συμβολισμό χρησιμοποιούμε στα διαγράμματα Venn;

- Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με Ω . Το βασικό σύνολο παριστάνεται με ένα ορθογώνιο, ενώ κάθε υποσύνολο παριστάνεται με το μια κλειστή καμπύλη που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.
- Αν $B \subseteq A$, τότε το B παριστάνεται με μια κλειστή καμπύλη που περιέχεται στην κλειστή καμπύλη που παριστάνει το A .



Το Ω είναι το βασικό σύνολο και το A είναι ένα υποσύνολο του Ω ($A \subseteq \Omega$).

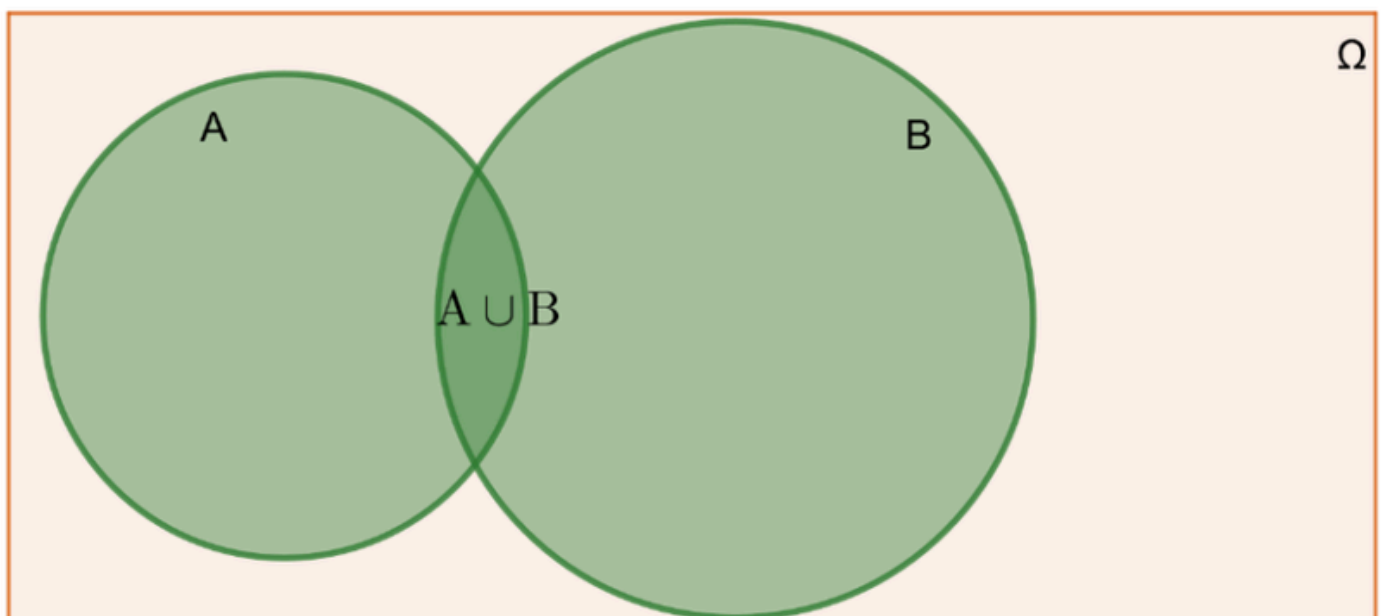


Το σύνολο B είναι υποσύνολο του A ($B \subseteq A$). Προκύπτει ότι $B \subseteq A \subseteq \Omega$.

14. Τι ονομάζουμε ένωση υποσυνόλων;

Ένωση δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα A και B και συμβολίζεται με $A \cup B$.

Δηλαδή είναι: $A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$



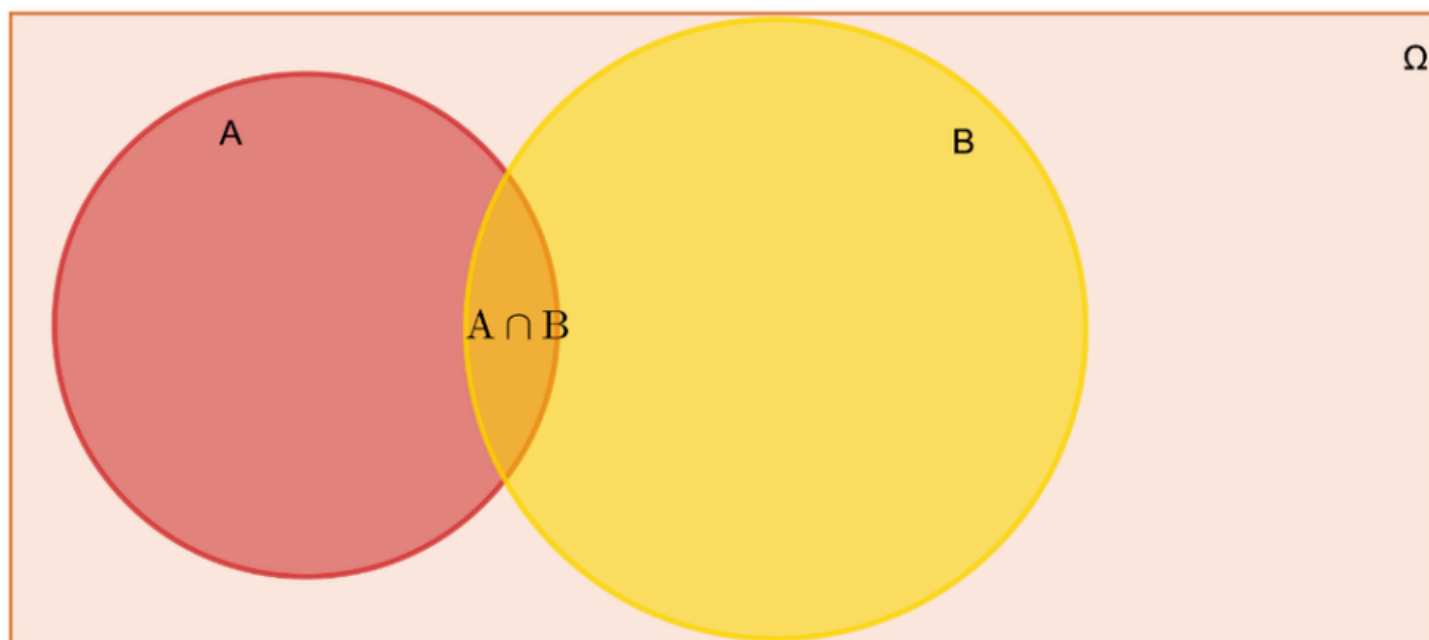
Όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο A ή στο σύνολο B είναι στοιχεία της ένωσης των δυο υποσυνόλων A, B .

Αν $A = \{1, 2\}$ και $B = \{3, 4\}$ θα έχουμε $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

15. Τι ονομάζουμε τομή υποσυνόλων;

Τομή δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα A, B και συμβολίζεται με $A \cap B$.

Δηλαδή είναι: $A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$

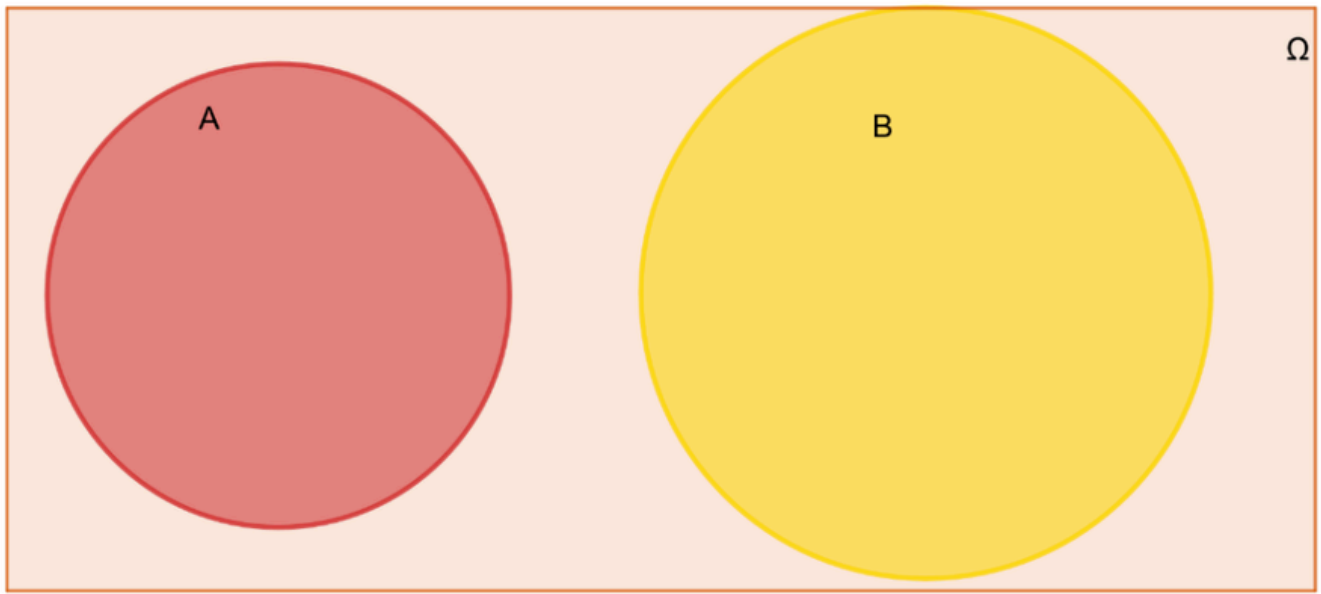


Μόνο τα στοιχεία στα οποία υπάρχει «επικάλυψη» είναι στοιχεία της τομής των υποσυνόλων A, B .

Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, 9\}$ θα έχουμε $A \cap B = \{1\}$

16. Πότε δύο σύνολα ονομάζονται ξένα;

Στην περίπτωση που δύο σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \emptyset$ (η τομή τους είναι το κενό σύνολο), τα δύο σύνολα λέγονται ξένα μεταξύ τους.



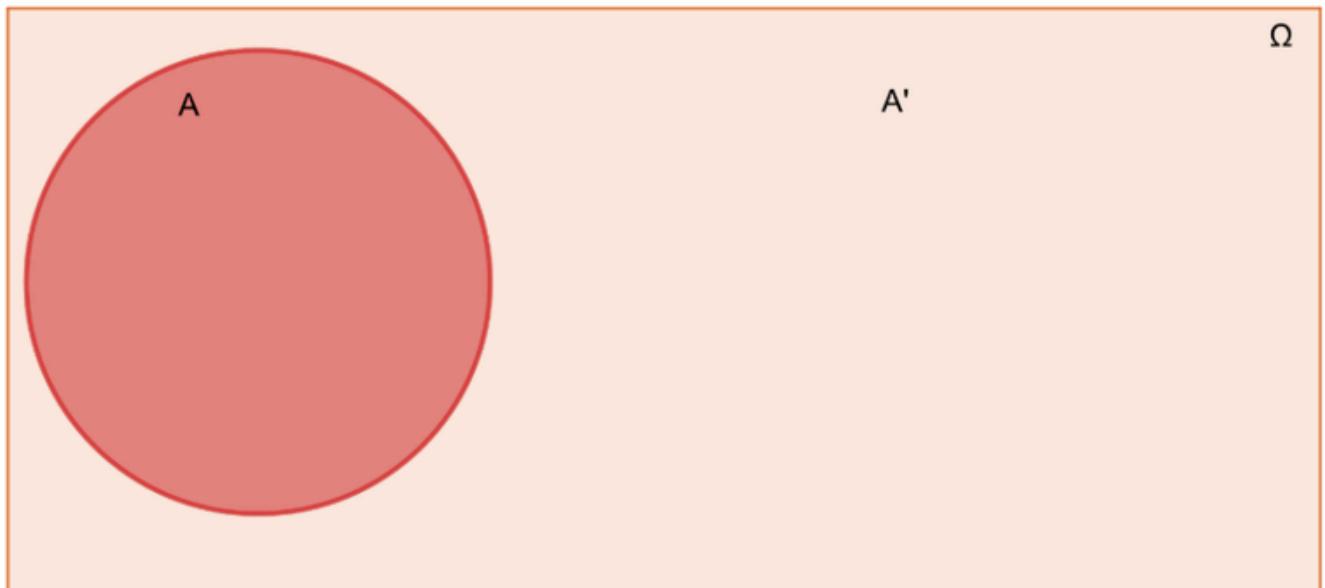
Τα υποσύνολα A και B δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο.

Αν $A = \{1, 3\}$ και $B = \{4, 5\}$ θα έχουμε $A \cap B = \emptyset$ και A, B ξένα υποσύνολα.

17. Τι ονομάζουμε συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου;

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με A' .

Δηλαδή είναι: $A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$



Τα στοιχεία του συμπληρώματος A' είναι όλα τα στοιχεία του Ω που δεν είναι στοιχεία του A .

Αν $\Omega = \{\text{γράμματα ελληνικής αλφάβητου}\}$ και $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu\}$ τότε $A' = \{\xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega\}$.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθείς ή ψευδείς.

i. $a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

ii. $a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$

iii. $a^3 = -1 \Leftrightarrow a = -1$

iv. $a = 1 \Leftrightarrow a^2 = 1$

I. Ο ισχυρισμός είναι αληθής.

II. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής γιατί $9^2 = (-9)^2 = 81$, δηλαδή έπρεπε να έχουμε $a^2 = 81 \Rightarrow a = \pm 9$.

III. Ο ισχυρισμός είναι αληθής.

IV. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής γιατί αν $a = 1$ τότε $a^2 = 1$ αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο αφού αν $a^2 = 1$ τότε $a = \pm 1$.

2. Να γράψετε με αναγραφή τα σύνολα:

$$A = \{v \in \mathbb{N} / -2 < v \leq 4\}$$

$$B = \{\lambda \in \mathbb{R} / \lambda^2 = 2\}$$

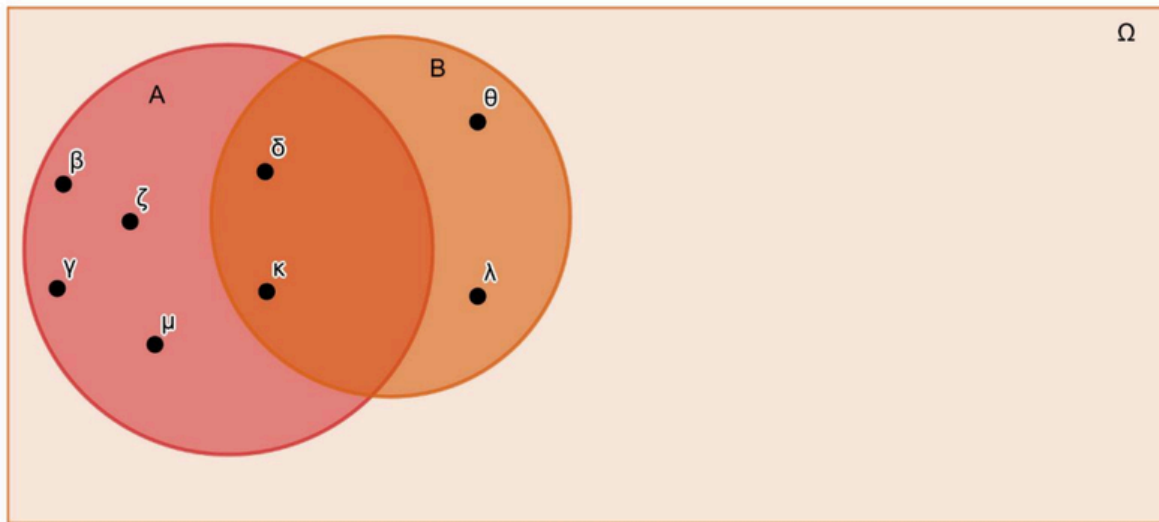
$$\Gamma = \{k \in \mathbb{Q} / k^2 = 2\}$$

α. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, αφού περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του -2 και μικρότεροι ή ίσοι του 4.

β. $B = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, αφού περιέχει όλες τις πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $x^2 = 2$.

γ. $\Gamma = \{\emptyset\}$, αφού περιέχει όλες τις ρητές ρίζες της εξίσωσης $x^2 = 2$ δηλαδή κανένα στοιχείο.

3. Μελετώντας το διάγραμμα Venn παρακάτω να συμπληρώσετε τα στοιχεία των συνόλων με αναγραφή. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο Ω περιλαμβάνει όλα τα πεζά σύμφωνα της ελληνικής αλφάβητου.



$$A = \{\beta, \gamma, \zeta, \mu, \delta, \kappa\}$$

$$B = \{\theta, \kappa, \lambda, \delta\}$$

$$A \cup B = \{\beta, \gamma, \zeta, \mu, \delta, \kappa, \theta, \lambda\}$$

$$A \cap B = \{\delta, \kappa\}$$

$$A' = \{\theta, \lambda, \nu, \xi, \pi, \rho, \sigma, \tau, \phi, \chi, \psi\}$$

$$(A \cup B)' = \{\nu, \xi, \pi, \rho, \sigma, \tau, \phi, \chi, \psi\}$$

2

οι πραγματικοί αριθμοί



Ενότητα 2η - Άλγεβρα Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ

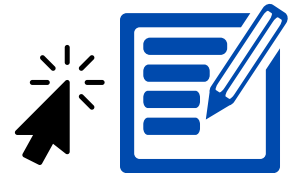


1. ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

1. Ποιοι αριθμοί ονομάζονται ρητοί και ποιοι άρρητοι;

- Κάθε αριθμός που έχει (ή μπορεί να πάρει) κλασματική μορφή, δηλαδή μορφή $\frac{a}{b}$ όπου a, b ακέραιοι, με $b \neq 0$ ονομάζεται ρητός αριθμός. Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή.
- Οι αριθμοί που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{a}{b}$ όπου a, b ακέραιοι, με $b \neq 0$ (με άλλα λόγια, δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί) λέγονται άρρητοι αριθμοί.

π.χ. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \sqrt{10}, \dots$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες των πράξεων;

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Προσεταιριστική	$a + (b + \gamma) = (a + b) + \gamma$	$a \cdot (b \cdot \gamma) = (a \cdot b) \cdot \gamma$
Αντίθετος- Αντίστροφος Αριθμός	$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$
Ουδέτερο Στοιχείο	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$
Επιμεριστική	$a \cdot (b + \gamma) = a \cdot b + a \cdot \gamma$	

Ο αριθμός 0 λέγεται ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης γιατί αν προστεθεί σε οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει.

Ο αριθμός 1 λέγεται ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, διότι αν πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε αριθμό δεν τον μεταβάλλει.

Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντίστοιχα:

$$a - b = a + (-b) \text{ και } \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

- Δηλαδή για να βρούμε τη διαφορά προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου, ενώ για να βρούμε το πηλίκο πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

3. Ποιες είναι οι ιδιότητες της ισότητας;

$$a = b \text{ και } \gamma = \delta \Rightarrow a + \gamma = b + \delta$$



δηλαδή δυο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

$$\text{π.χ. } 7 = \mu \text{ και } 3 = \alpha \Rightarrow 7 + 3 = \mu + \alpha \Rightarrow \alpha + \mu = 10$$

$$a = b \text{ και } \gamma = \delta \Rightarrow a \cdot \gamma = b \cdot \delta$$



δηλαδή δυο ισότητες μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

$$\text{π.χ. } 5 = \beta \text{ και } \gamma = 10 \Rightarrow 5\gamma = 10\beta$$

$$a = b \Leftrightarrow a + \gamma = b + \gamma$$



δηλαδή μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

$$\text{π.χ. } \kappa = \lambda \Leftrightarrow \kappa + 5 = \lambda + 5$$

$$\text{Για } \gamma \neq 0 \text{ έχουμε } a = b \Leftrightarrow a \cdot \gamma = b \cdot \gamma$$



δηλαδή μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

$$\text{π.χ. } 10x = 25y \Leftrightarrow 2x = 5y$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0$$



δηλαδή το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.

Άμεση συνέπεια της παραπάνω ιδιότητας είναι η ακόλουθη ιδιότητα:

$$a \cdot b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \text{ και } b \neq 0$$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητες των δυνάμεων;

Αν ο a είναι πραγματικός αριθμός και ο n φυσικός, έχουμε ορίσει ότι:

- $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ n φορές
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, για $a \neq 0$ και $n \geq 1$ π.χ. $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Ιδιότητες δυνάμεων

$$a^k \cdot a^\lambda = a^{k+\lambda}$$

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

$$\frac{a^k}{a^\lambda} = a^{k-\lambda}$$

$$\frac{10^6}{10^4} = 10^{6-4} = 10^2$$

$$(a^k)^\lambda = a^{k \cdot \lambda}$$

$$(-3^3)^{-1} = (-3)^{3 \cdot (-1)} = (-3)^{-3}$$

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$$

$$1,25^3 \cdot 4^3 = (1,25 \cdot 4)^3 = 10^3$$

$$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$\frac{125^3}{25^3} = \left(\frac{125}{25}\right)^3 = 5^3$$

5. Τι ονομάζεται ταυτότητα και ποιες είναι οι αξιοσημείωτες ταυτότητες;

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται **ταυτότητα**.



Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(a + b + \gamma)^2 = a^2 + b^2 + \gamma^2 + 2ab + 2a\gamma + 2b\gamma$$

6. Ποιες μεθόδους χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε έναν ισχυρισμό;

→ Ευθεία Απόδειξη:

Ξεκινάμε με την υπόθεση και με διαδοχικά βήματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

π.χ. Να αποδείξετε ότι $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$

Θα πάρουμε διαδοχικά βήματα:

$$\begin{aligned}
 (a + \beta)^2 - 2a\beta &= a^2 + \beta^2 \\
 a^2 + 2a\beta + \beta^2 - 2a\beta &= a^2 + \beta^2 \\
 a^2 + \beta^2 &= a^2 + \beta^2 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

→ Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο:

Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός δεν ισχύει και καταλήγουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει, δηλαδή σε άτοπο.

π.χ. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Θα υποθέσουμε ότι $\sqrt{2}$ ρητός δηλαδή:

$$\sqrt{2} = \frac{\mu}{\nu} : \text{ανάγωγο κλάσμα}$$

Διαδοχικά έχουμε: $\sqrt{2} = \frac{\mu}{\nu}$

$$2 = \frac{\mu^2}{\nu^2}$$

$2\nu^2 = \mu^2$, άρα ο μ είναι άρτιος αριθμός και μπορεί να γραφεί 2κ

$$2\nu^2 = (2\kappa)^2$$

$$2\nu^2 = 4\kappa^2$$

$\nu^2 = 2\kappa^2$, άρα ο ν είναι άρτιος αριθμός

Όμως αν μ και ν άρτιοι τότε το κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ δεν είναι ανάγωγο, δηλαδή καταλήξαμε σε άτοπο.

Οπότε $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

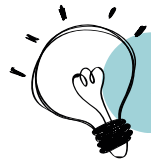
→ Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένας **ισχυρισμός δεν ισχύει** αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα** για το οποίο ο ισχυρισμός δεν είναι αληθής.

π.χ. Η πρόταση $(a + 1)^2 = a^2 + 1$ είναι ψευδής γιατί για $a = 3$ παίρνω:

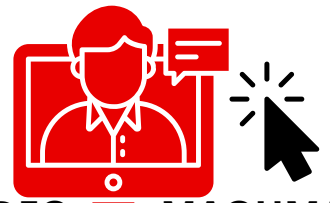
$$(3 + 1)^2 = 3^2 + 1$$

$$4^2 = 9 + 1$$

$$16 = 10, \text{ αδύνατο}$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Αν ισχύει ότι $\frac{a}{\beta} = \frac{1}{5}$ να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $A = \frac{4\beta + a}{7a}$
και $B = \frac{7\beta + a}{2a - \beta}$

Αφού $\frac{a}{\beta} = \frac{1}{5}$ έχουμε $5a = \beta$

$$A = \frac{4\beta + a}{7a} = \frac{4 \cdot 5a + a}{7a} = \frac{20a + a}{7a} = \frac{21a}{7a} = 3$$

$$B = \frac{7\beta + a}{2a - \beta} = \frac{35a + a}{2a - 5a} = \frac{36a}{-3a} = -12$$

2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Αριθμοί	Φυσικοί	Ακέραιοι	Ρητοί	Άρρητοι	Πραγματικοί
23,5			x		x
-5		x	x		x
2	x	x	x		x
$\frac{2}{7}$			x		x
$\pi=3.1415926...$				x	x
0	x	x	x		x
$\sqrt{5}$				x	x ₂₅

3. Αν α, β αντίστροφοι αριθμοί να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 3 \cdot (\alpha^4 \beta^2)^{-3} \cdot (\alpha^{-4} \beta^2)^{-2} \cdot \alpha^{-6}$$

Αφού α, β αντίστροφοι ξέρουμε ότι $\alpha \cdot \beta = 1$

Θα απλοποιήσουμε την παράσταση A αξιοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων.

$$A = 3 \cdot (\alpha^4 \beta^2)^{-3} \cdot (\alpha^{-4} \beta^2)^{-2} \cdot \alpha^{-6}$$

$$A = 3 \cdot \alpha^{4 \cdot (-3)} \cdot \beta^{2 \cdot (-3)} \cdot \alpha^{-4 \cdot (-2)} \cdot \beta^{2 \cdot (-2)} \cdot \alpha^{-6}$$

$$A = 3 \cdot \alpha^{-12} \cdot \beta^{-6} \cdot \alpha^8 \cdot \beta^{-4} \cdot \alpha^{-6}$$

$$A = 3 \cdot \alpha^{-12} \cdot \alpha^8 \cdot \alpha^{-6} \cdot \beta^{-6} \cdot \beta^{-4}$$

$$A = 3 \cdot \alpha^{-12+8-6} \cdot \beta^{-6-4}$$

$$A = 3 \cdot \alpha^{-10} \cdot \beta^{-10}$$

$$A = 3 \cdot (\alpha \cdot \beta)^{-10}$$

$$A = 3 \cdot 1^{-10}$$

$$A = 3$$



4. Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα χρησιμοποιώντας τις αξιοσημείωτες ταυτότητες.

$$(\sqrt{2}\alpha + 2\beta)^2 = (\sqrt{2}\alpha)^2 + 2 \cdot \sqrt{2}\alpha \cdot 2\beta + (2\beta)^2 = 2\alpha^2 + 4\sqrt{2}\alpha\beta + 4\beta^2$$

● $(\alpha^2 - \beta)^2 = (\alpha^2)^2 - 2\alpha^2\beta + \beta^2 = \alpha^4 - 2\alpha^2\beta + \beta^2$

● $(3\alpha - \sqrt{3})(3\alpha + \sqrt{3}) = (3\alpha)^2 - \sqrt{3}^2 = 9\alpha^2 - 3$

● $(3 + 2\beta)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2\beta + 3 \cdot 3 \cdot (2\beta)^2 + (2\beta)^3 = 27 + 54\beta + 36\beta^2 + 8\beta^3$

● $(1 - \alpha^2)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot \alpha^2 + 3 \cdot 1 \cdot (\alpha^2)^2 - (\alpha^2)^3 = 1 - 3\alpha^2 + 3\alpha^4 - \alpha^6$

● $(\alpha + 2\beta + 3)^2 = \alpha^2 + (2\beta)^2 + 3^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 2\beta + 2 \cdot \alpha \cdot 3 + 2 \cdot 2\beta \cdot 3 =$
 $= \alpha^2 + 4\beta^2 + 9 + 4\alpha\beta + 6\alpha + 12\beta.$

5. Αν γνωρίζουμε ότι $a + \frac{1}{a} = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $a^2 + \frac{1}{a^2}$

$$\text{Γνωρίζουμε ότι } \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$$

$$\text{Συνεπώς } a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

6. Να αποδειχθεί ότι $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

Θα προχωρήσουμε διαδοχικά στα δύο μέρη τις ταυτότητες.

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \\ a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 &= a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2 \\ a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Η παραπάνω ταυτότητα είναι γνωστή και ως ταυτότητα Lagrange.

7. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις.

Θυμόμαστε ότι παραγοντοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία μια παράσταση που είναι άθροισμα μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

Έχουμε μάθει διάφορες μεθόδους παραγοντοποίησης:



- κοινός παράγοντας
- ομαδοποίηση
- διαφορά τετραγώνων
- άθροισμα και διαφορά κύβων
- ανάπτυγμα τέλειου τετραγώνου

$$6\alpha\beta - 2\beta\gamma = 2\beta(3\alpha - \gamma)$$

$$6\chi^3 + 3\chi^2 - 2\chi - 1 = 3\chi^2(2\chi + 1) - 1 \cdot (2\chi + 1) = (2\chi + 1)(3\chi^2 - 1)$$

$$16a^2 - 1 = (4a)^2 - 1^2 = (4a - 1)(4a + 1)$$

$$\chi^3 - 8 = \chi^3 - 2^3 = (\chi - 2)(\chi^2 + 2\chi + 2^2) = (\chi - 2)(\chi^2 + 2\chi + 4)$$

$$\chi^2 + 2\chi + 1 = \chi^2 + 2 \cdot \chi \cdot 1 + 1^2 = (\chi + 1)^2$$

$$4 - 4a^2 + a^4 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot a^2 + (a^2)^2 = (2 - a^2)^2$$

8. Να απλοποιήσετε τις ρητές παραστάσεις και στη συνέχεια να λύσετε τις εξισώσεις.

α.

$$\frac{a^2 + 3a + 9}{a^3 - 27} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{a^2 + 3a + 9}{a^3 - 3^3} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{a^2 + 3a + 9}{(a - 3)(a^2 + 3a + 9)} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{a - 3} = \frac{1}{10}$$

$$a - 3 = 10$$

$$a = 13$$

β.

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 - x} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x(x^2 - 2x + 1)}{x(x^2 - 1)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}$$

$$3x - 3 = x + 1$$

$$3x - x = 1 + 3$$

$$2x = 4$$

$$x = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

γ.

$$\frac{a^2 - 16}{a^2 - 4a} = 5$$

$$\frac{(a-4)(a+4)}{a(a-4)} = 5$$

$$\frac{a+4}{a} = 5$$

$$5a = a + 4$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$



Ενότητα 2η - Άλγεβρα Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



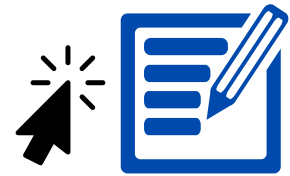
2. ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Τι ισχύει για τη σύγκριση δύο αριθμών;

Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β , και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός. Επίσης θα λέμε ότι ο αριθμός β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε $\beta < \alpha$.

2. Τι προκύπτει από την σύγκριση αριθμών;

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

3. Ιδιότητες των πράξεων στην σύγκριση αριθμών

$$(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$$

$$(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$$

$$\alpha, \beta \text{ ομόσημοι} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$$

$$\alpha, \beta \text{ ετερόσημοι} \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$$

$$\alpha^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \alpha \text{ (Η ισότητα ισχύει μόνο όταν } \alpha = 0)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$$

4. Ιδιότητες των ανισοτήτων

1. $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$

2. • $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$

• Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

• Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

3. • $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$

• Για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$

4. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

• Έστω $\alpha > \beta > 0$. Τότε για $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha > 0$ και $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \beta > 0$, προκύπτει ότι: $\alpha^n > \beta^n$.

• Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.
Έστω λοιπόν ότι $\alpha^n > \beta^n$ και $\alpha \leq \beta$.

Τότε:

αν ήταν $\alpha = \beta$, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε $\alpha^n = \beta^n$ (άτοπο), ενώ
αν ήταν $\alpha < \beta$, θα είχαμε $\alpha^n < \beta^n$ (άτοπο).

→ Άρα, $\alpha > \beta$.

5. Για θετικούς αριθμούς α , β και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία:

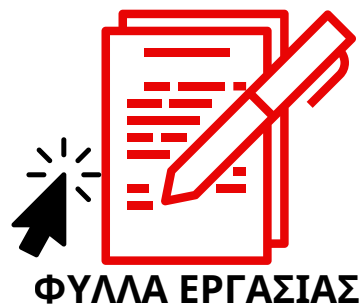
$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^n = \beta^n$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- Έστω $\alpha = \beta$. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει ότι $\alpha^n = \beta^n$
- Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^n = \beta^n$ και $\alpha \neq \beta$. Τότε:

Τότε:

αν ήταν $\alpha > \beta$ θα είχαμε $\alpha^n > \beta^n$ (άτοπο), ενώ
αν ήταν $\alpha < \beta$ θα είχαμε $\alpha^n < \beta^n$ (άτοπο).



→ Άρα, $\alpha = \beta$.

5. Τι ονομάζουμε κλειστό διάστημα αριθμών;

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $\alpha \leq x \leq \beta$ ονομάζεται κλειστό διάστημα από α μέχρι β και συμβολίζεται με $[\alpha, \beta]$.

6. Τι ονομάζουμε ανοιχτό διάστημα αριθμών;

Αν από το κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο ανοικτό διάστημα από το α μέχρι β που συμβολίζεται με (α, β) .

Οι αριθμοί α και β λέγονται άκρα των διαστημάτων αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των α και β λέγεται εσωτερικό σημείο αυτών.

7. Ποιες είναι οι διάφορες μορφές διαστημάτων;

- Το ανοικτό δεξιά διάστημα $[a, \beta)$ που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $a \leq x < \beta$
- Το ανοικτό αριστερά διάστημα $(a, \beta]$ που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $a < x \leq \beta$.
- Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $a \leq x$ και συμβολίζεται με $[a, +\infty)$.
- Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $x \leq a$ συμβολίζεται με $(-\infty, a]$.

Πίνακας διαστημάτων

$a \leq x \leq b$		$[a, b]$
$a \leq x < b$		$[a, b)$
$a < x \leq b$		$(a, b]$
$a < x < b$		(a, b)
$x \geq a$		$[a, +\infty)$
$x > a$		$(a, +\infty)$
$x \leq a$		$(-\infty, a]$
$x < a$		$(-\infty, a)$



1. Να δείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$.

$$(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 4\alpha\beta$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$$

$$(\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει}$$

Μάλιστα, για $(\alpha - \beta)^2 = 0$ πρέπει $\alpha = \beta$.

2. Αν $3 < \alpha < 6$ να βρείτε τα όρια της παράστασης $\alpha^2 + 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$.

Για να βρούμε τα όρια της παράστασης θα «χτίσουμε» τους όρους από τους οποίους αποτελείται.

$$3 < \alpha < 6 \Rightarrow 9 < \alpha^2 < 36$$

$$3 < \alpha < 6 \Leftrightarrow 6 < 2\alpha < 12$$

$$3 < \alpha < 6 \Leftrightarrow -6 < -\alpha < -3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{6}$$

Οπότε τώρα μπορούμε να πάρουμε:

$$9 < \alpha^2 < 36$$

$$6 < 2\alpha < 12$$

$$-\frac{1}{3} < -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{6}$$

Θα προσθέσουμε κατά μέλη και θα πάρουμε:

$$9 + 6 - \frac{1}{3} < \alpha^2 + 2\alpha - \frac{1}{\alpha} < 36 + 12 - \frac{1}{6}$$

$$15 - \frac{1}{3} < \alpha^2 + 2\alpha - \frac{1}{\alpha} < 48 - \frac{1}{6}$$

3. Να αποδείξετε ότι $a^2 - 8a + 20 > 0$, $\forall a \in \mathbb{Z}$.

Παρατηρούμε ότι στην ανίσωση έχουμε δύο όρους από την ταυτότητα τετράγωνο του αθροίσματος. Οπότε θα προσθέσουμε και θα αφαιρέσουμε τον όρο που λείπει για να δημιουργήσουμε όλο το ανάπτυγμα της ταυτότητας.

$$\begin{aligned}a^2 - 8a + 20 &> 0 \\a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 20 &> 0 \\a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 16 - 16 + 20 &> 0 \\(a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 16) - 16 + 20 &> 0 \\(a - 4)^2 + 4 &> 0, \text{ που ισχύει}\end{aligned}$$

Η ανίσωση $(a - 4)^2 + 4 > 0$ ισχύει πάντα γιατί $(a - 4)^2 \geq 0$ και $4 > 0$.

4. Να βρείτε τους αριθμούς α , β για τους οποίους έχουμε $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 6\beta + 10 = 0$.

Παρατηρούμε ότι εμφανίζονται όροι της ταυτότητας οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 6\beta + 10 &= 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha + 1 - 1 + \beta^2 + 6\beta + 9 - 9 + 10 &= 0 \\ (\alpha - 1)^2 + (\beta + 3)^2 - 1 - 9 + 10 &= 0 \\ (\alpha - 1)^2 + (\beta + 3)^2 &= 0 \\ \text{Οπότε:} \\ \alpha = 1 \text{ και } \beta = -3\end{aligned}$$

Πρέπει υποχρεωτικά $\alpha=1$ και $\beta=-3$, ώστε να μηδενίζουν ταυτόχρονα και τα δυο τετράγωνα.

5. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $4a - a^2$ και $5 + 8a$.

$$\begin{aligned}4a - a^2 &< 5 + 8a \\ -a^2 + 4a - 8a - 5 &< 0 \\ -a^2 - 4a - 5 &< 0 \\ -a^2 - 4a - 4 + 4 - 5 &< 0 \\ -(a^2 + 4a + 2^2) - 1 &< 0 \\ -(a + 2)^2 &< 1, \text{ που ισχύει}\end{aligned}$$

Η ανίσωση ισχύει για όλους τους αριθμούς αφού $-(a + 2)^2 \leq 0 < 1$.

6. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και β έχουμε $1 < \alpha < 3$ και $3 < \beta < 5$.

Αν αλλάξουμε τις πλευρές του ορθογωνίου έτσι ώστε $\alpha \rightarrow 2\alpha$ και $\beta \rightarrow \frac{\beta-1}{2}$,
ανάμεσα σε ποιες τιμές θα βρίσκεται η νέα περίμετρος του σχήματος;

Για τη νέα περίμετρο έχουμε $\Pi = 2 \cdot (2\alpha) + 2 \cdot \frac{\beta-1}{2} = 4\alpha + \beta - 1$.

Έχουμε $1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 4 < 4\alpha < 12$ και $3 < \beta < 5 \Leftrightarrow 2 < \beta - 1 < 4$.

Οπότε παίρνουμε $4 + 2 < 4\alpha + \beta - 1 < 12 + 5 \Leftrightarrow 6 < \Pi < 17$.

→ Δηλαδή η νέα περίμετρος θα είναι στο διάστημα $(6, 17)$.





Ενότητα 2η - Άλγεβρα Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



3. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

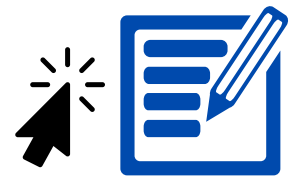
1. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής;

Η απόλυτη τιμή του αριθμού a συμβολίζεται με $|a|$ και εκφράζει την απόσταση του αριθμού a από την αρχή των αξόνων. Ισχύει ότι $|a| = a$, για κάθε $a > 0$, δηλαδή η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός και $|a| = -a$, για κάθε $a < 0$, δηλαδή η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του. Επίσης $|0| = 0$.

2. Ποιος είναι ο αλγεβρικός ορισμός της απόλυτης τιμής;

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a συμβολίζεται με $|a|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

3. Ποια είναι τα χαρακτηριστικά της απόλυτης τιμής;

$$|a| = |-a| \geq 0$$

$$|a| \geq a \text{ και } |a| \geq -a$$

$$|a|^2 = a^2$$

Αν $\theta > 0$ τότε: $\longrightarrow$ $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta \text{ ή } x = -\theta$
 $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητες των απόλυτων τιμών;

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
2. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$

5. Πώς αποδεικνύονται οι ιδιότητες της απόλυτης τιμής;

1. Για την ιδιότητα $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$:

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} |a \cdot b| &= |a| \cdot |b| \\ |a \cdot b|^2 &= (|a| \cdot |b|)^2 \\ |a \cdot b|^2 &= |a|^2 \cdot |b|^2 \\ (a \cdot b)^2 &= a^2 \cdot b^2, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

2. Για την ιδιότητα $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$: αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως πριν.

3. Για την ιδιότητα $|a + b| \leq |a| + |b|$ (τριγωνική ανισότητα):

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|a + b| \leq |a| + |b|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
|a + \beta| &\leq |a| + |\beta| \\
|a + \beta|^2 &\leq (|a| + |\beta|)^2 \\
(a + \beta)^2 &\leq |a|^2 + 2|a||\beta| + |\beta|^2 \\
a^2 + 2a\beta + \beta^2 &\leq a^2 + 2|a\beta| + \beta^2 \\
a\beta &\leq |a\beta|, \text{ που ισχύει.}
\end{aligned}$$

Η ισότητα $a\beta = |a\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $a\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι a, β είναι ομόσημοι αριθμοί ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

6. Πώς ορίζουμε την απόσταση δύο αριθμών;

Η απόσταση των αριθμών a και β συμβολίζεται με $d(a, \beta)$, εκφράζει το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τους δύο αριθμούς στην γραμμή των αξόνων και είναι ίση με $|a - \beta|$.

$$\text{Δηλαδή: } d(a, \beta) = |a - \beta|$$

- Ισχύει $d(a, \beta) = d(\beta, a)$
- Αν $a < \beta$, τότε $d(a, \beta) = \beta - a$

7. Τι ονομάζουμε κέντρο και ακτίνα ενός διαστήματος;

Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν οι αριθμοί a, β λέγεται κέντρο του διαστήματος $[a, \beta]$ και ο αριθμός $\rho = \frac{\beta - a}{2}$ λέγεται ακτίνα του $[a, \beta]$.

8. Τι ισχύει για την απόσταση ρ ενός αριθμού από δοσμένο αριθμό x_0 ;

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

$$\Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:

$$|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |\sqrt{3}| + |-1| - |-\sqrt{3}| + |-5| - |-2|$

Για να υπολογίσουμε την παράσταση θα χρειαστεί να «βγάλουμε» τις απόλυτες τιμές.

Γνωρίζουμε ότι $|a| = -a$ για $a < 0$

Οπότε $|-1| = 1$, $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$, $|-5| = 5$, $|-2| = 2$ και παίρνουμε:

$$A = |\sqrt{3}| + |-1| - |-\sqrt{3}| + |-5| - |-2|$$

$$A = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 5 - 2$$

$$A = 4$$

2. Αν $1 < a < 2$ να γράψετε την παράσταση $\Pi = |a-1| + |2-a| + 2|a| - |2-2a|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Για να γράψουμε την παράσταση χωρίς απόλυτες τιμές θα πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο των αριθμητικών παραστάσεων που είναι «μέσα» στις απόλυτες τιμές.

$$a > 1 \text{ άρα } a - 1 > 0 \text{ και } |a - 1| = a - 1$$

$$a < 2 \text{ άρα } 2 - a > 0 \text{ και } |2 - a| = 2 - a$$

$$1 < a < 2 \text{ άρα } a > 0 \text{ και } |a| = a$$

$$a > 1 \text{ άρα } 1 - a < 0 \text{ και } 2 - 2a < 0 \text{ άρα } |2 - 2a| = 2a - 2$$

$$\Pi = |a - 1| + |2 - a| + 2|a| - |2 - 2a|$$

$$\Pi = a - 1 + 2 - a + 2a - (2a - 2)$$

$$\Pi = 1 + 2a - 2a + 2$$

$$\Pi = 3$$

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |2a - 1| - |1 - 2a|$

Για να απλοποιήσουμε την παράσταση αρκεί να θυμηθούμε ότι $|a| = |-a|$

$$\text{Οπότε } |2a - 1| = |1 - 2a|, \text{ άρα } A = |2a - 1| - |1 - 2a| = |2a - 1| - |2a - 1| = 0$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $2|x - 2| - 4 = 0$

2. $|x - \sqrt{3}| + 6 = 0$

3. $|x - 2| - |2x - 6| = 0$



$$2|x - 2| - 4 = 0$$

$$2|x - 2| = 4$$

$$|x - 2| = 2$$

$$x - 2 = 2 \quad \dot{\vee} \quad x - 2 = -2$$

$$x = 2 + 2 \quad \dot{\vee} \quad x = 2 - 2$$

$$x = 4 \quad \dot{\vee} \quad x = 0$$

$$|x - \sqrt{3}| + 6 = 0$$

$$|x - \sqrt{3}| = -6, \text{ αδύνατο}$$

$$|x - 2| - |2x - 6| = 0$$

$$|x - 2| = |2x - 6|$$

$$x - 2 = 2x - 6 \quad \dot{\vee} \quad x - 2 = -(2x - 6)$$

$$x - 2x = 2 - 6 \quad \dot{\vee} \quad x - 2 = -2x + 6$$

$$-x = -4 \quad \dot{\vee} \quad x + 2x = 6 + 2$$

$$x = 4 \quad \dot{\vee} \quad 3x = 8$$

$$x = 4 \quad \dot{\vee} \quad x = \frac{8}{3}$$

5. Να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί.

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα
$ x - 1 < 3$		
	$d(x, 2) \leq 4$	
		$(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$
	$d(x, -2) > 1$	
$ 2x + 3 > 7$		

Για να συμπληρώσουμε τον πίνακα:

➤ Αν γνωρίζουμε την απόλυτη τιμή βρίσκουμε αμέσως την απόσταση και θα λύσουμε την ανίσωση για να βρούμε το διάστημα.

$$|x - 1| < 3 \Leftrightarrow d(x, 1) < 3$$

$$|x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 4)$$

$$|2x + 3| > 7 \Leftrightarrow d(2x, -3) > 7$$

$$|2x + 3| > 7 \Leftrightarrow 2x + 3 < -7 \text{ ή } 2x + 3 > 7$$

$$\Leftrightarrow 2x < -10 \text{ ή } 2x > 4 \Leftrightarrow x < -5 \text{ ή } x > 2$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$$

➤ Αν γνωρίζουμε την απόσταση βρίσκουμε αμέσως την απόλυτη τιμή και θα λύσουμε την ανίσωση για να βρούμε το διάστημα.

$$d(x, 2) \leq 4 \Leftrightarrow |x - 2| \leq 4$$

$$|x - 2| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 6$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2, 6]$$

$$d(x, -2) > 1 \Leftrightarrow |x + 2| > 1$$

$$|x + 2| > 1 \Leftrightarrow x + 2 < -1 \text{ ή } x + 2 > 1$$

$$\Leftrightarrow x < -3 \text{ ή } x > -1$$

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$$

➤ Αν γνωρίζουμε το διάστημα θα αξιοποιήσουμε το κέντρο για να προσδιορίσουμε την απόλυτη τιμή και την απόσταση.

Έχουμε $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ και κέντρο $\kappa = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$, οπότε:

$$x \leq -1 \text{ και } x \geq 3 \Leftrightarrow x - 1 \leq -2 \text{ και } x - 1 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| \geq 2 \Leftrightarrow d(x, 1) \geq 2 \quad (\text{αφαιρέσαμε το κέντρο})$$

Παίρνουμε τον πίνακα ανανεωμένο:

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα
$ x - 1 < 3$	$d(x, 1) < 3$	$(-2, 4)$
$ x - 2 \leq 4$	$d(x, 2) \leq 4$	$[-2, 6]$
$ x - 1 \geq 2$	$d(x, 1) \geq 2$	$(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$
$ x + 2 > 1$	$d(x, -2) > 1$	$(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$
$ 2x + 3 > 7$	$d(2x, -3) > 7$	$(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$

6. Να λύσετε την ανίσωση.

$$|2x + 1| - 2|x| < 0$$

$|2x + 1| < 2|x|$ (είναι θετικές και οι δύο ποσότητες οπότε μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο)

$$(2x + 1)^2 < (2x)^2$$

$$4x^2 + 4x + 1 < 4x^2$$

$$4x + 1 < 0$$

$$4x < -1$$

$$x < -\frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$$



7. Να λύσετε την ανίσωση.

$$|2x + 1| - 3 < 0$$

$$|2x + 1| < 3$$

$$-3 < 2x + 1 < 3$$

$$-4 < 2x < 2$$

$$-2 < x < 1$$

$$\text{Άρα } x \in (-2, 1)$$

8. Να βρείτε τα α, β ώστε να ισχύει η παρακάτω σχέση $|2\alpha - 4| + |\alpha - 2\beta| = 0$

Για να ισχύει η σχέση θα πρέπει και οι δύο ποσότητες στις απόλυτες τιμές να είναι μηδενικές.

Οπότε θα έχουμε:

$$|2\alpha - 4| = 0$$

$$2\alpha - 4 = 0$$

$$2\alpha = 4$$

$$\alpha = 2$$

και

$$|\alpha - 2\beta| = 0$$

$$\alpha - 2\beta = 0$$

$$\alpha = 2\beta \quad (\alpha = 2)$$

$$2\beta = 2$$

$$\beta = 1$$





Ενότητα 2η - Άλγεβρα Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού;

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a συμβολίζεται με $\sqrt{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον a , ή αλλιώς αν $a \geq 0$ η $\sqrt{a}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = a$.

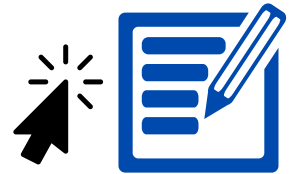
π.χ. $\sqrt{25} = 5$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητες τετραγωνικής ρίζας;

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

3. Τι ονομάζουμε ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού;

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a συμβολίζεται με $\sqrt[n]{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στην δύναμη n , δίνει τον a . Αλλιώς μπορούμε να πούμε ότι αν $a \geq 0$, τότε η $\sqrt[n]{a}$ παριστάνει την μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = a$.

π.χ. $\sqrt[3]{8} = 2$, γιατί $2^3 = 8$

$\sqrt[4]{81} = 3$, γιατί $3^4 = 81$

Σημείωση: Παρόλο που $(-3)^4 = 3^4 = 81$ δεν μπορούμε να πούμε ότι $\sqrt[4]{81} = -3$ γιατί από τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ξέρουμε ότι είναι μη αρνητικός αριθμός.

4. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ριζών;

- Αν $a \geq 0$ τότε $(\sqrt[n]{a})^n = a$ και $\sqrt[n]{a^n} = a$
- Αν $a \leq 0$ και n άρτιος τότε $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Επίσης αν $a, b \geq 0$ τότε:

$$1. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$3. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$2. \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$$

$$4. \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

π.χ. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

$$\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{162}} = \sqrt[4]{\frac{2}{162}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[2]{11} \cdot \sqrt[3]{11} = \sqrt[6]{11}$$

$$\sqrt[8]{2^4} = \sqrt[2 \cdot 4]{2^{1 \cdot 4}} = \sqrt{2}$$

5. Αποδείξεις Ιδιοτήτων

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \\ & (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a \cdot b})^n \\ & (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b \\ & a \cdot b = a \cdot b, \text{ισχύει} \end{aligned}$$

2. Αποδεικνύεται όπως η ιδιότητα 1.

3.

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{a}$$

$$(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}})^{\mu \cdot \nu} = (\sqrt[\mu \cdot \nu]{a})^{\mu \cdot \nu}$$

$$((\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}})^{\mu})^{\nu} = a$$

$$\sqrt[\nu]{a^{\nu}} = a, \text{ ισχύει}$$

$$4. \sqrt[\nu \cdot \rho]{a^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{a^{\mu \cdot \rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(a^{\mu})^{\rho}}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

6. Πως ορίζουμε δυνάμεις με ρητό εκθέτη;

Αν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$.

Επιπλέον αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

π.χ. $3^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{3^5}$

$$7^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{49}} = \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$$



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων.

$$A = \sqrt{86 + 2\sqrt{52} - \sqrt{9}}$$

$$A = \sqrt{86 + 2\sqrt{52} - 3}$$

$$A = \sqrt{86 + 2\sqrt{49}}$$

$$A = \sqrt{86 + 2 \cdot 7}$$

$$A = \sqrt{86 + 14}$$

$$A = \sqrt{100}$$

$$A = 10$$

$$B = \sqrt[4]{16} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{8}$$

$$B = \sqrt[4]{2^4} + \sqrt[3]{3^3} - \sqrt[3]{2^3}$$

$$B = 2 + 3 - 2$$

$$B = 3$$

2. Να αποδείξετε τις ισότητες.

Όταν έχουμε να αποδείξουμε μια ισότητα μπορούμε να κάνουμε πράξεις σε όποιο μέλος θέλουμε, προκειμένου να καταλήξουμε σε έναν αληθή ισχυρισμό.

$$3\sqrt{2} - \sqrt{50} + \sqrt{32} - 6\sqrt{8} = -10\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} - \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{16 \cdot 2} - 6\sqrt{4 \cdot 2} = -10\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} - \sqrt{25}\sqrt{2} + \sqrt{16}\sqrt{2} - 6 \cdot \sqrt{4}\sqrt{2} = -10\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = -10\sqrt{2}$$

$$-10\sqrt{2} = -10\sqrt{2}, \text{ισχύει}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} \sqrt[6]{432} = 6$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} \sqrt[6]{16 \cdot 27} = 6$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^3} = 6$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[6]{3^3} = 6$$

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{4}{6}} \cdot 3^{\frac{3}{6}} = 6$$

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 6$$

$$3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 6$$

$$3^1 \cdot 2^1 = 6$$

$$6 = 6, \text{ισχύει}$$

Και στις δύο περιπτώσεις αποφασίσαμε να γράψουμε τα υπόρριζα σε μορφή γινομένου, ανάλογα με τους αριθμούς που κληθήκαμε να διαχειριστούμε ανά περίπτωση.

Γενικά όταν έχουμε στο υπόρριζο σύνθετο αριθμό επιδιώκουμε να το γράψουμε ως γινόμενο πρώτων παραγόντων ή ως γινόμενο αριθμών με ακέραια ρίζα.

3. Να βρείτε για ποια a ορίζεται η παράσταση $A = \sqrt{a+2} - \sqrt[3]{3-a}$.

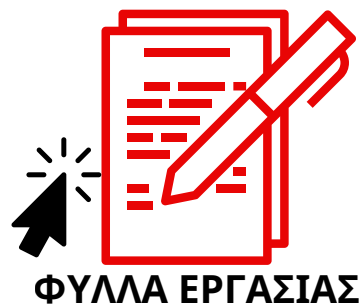
Γνωρίζουμε από τον ορισμό της ρίζας ότι η υπόρριζη ποσότητα είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός.

Οπότε θα πάρουμε:

$$a+2 \geq 0 \text{ και } 3-a \geq 0$$

$$a \geq -2 \text{ και } a \leq 3$$

$$a \in [-2, 3]$$



4. Να γράψετε τις παραστάσεις με ρητό παρονομαστή.

Για να «φτιάξουμε» ρητούς παρονομαστές αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το κλάσμα με την «συζυγή» παράσταση του παρονομαστή, δηλαδή με την παράσταση που δημιουργεί διαφορά τετραγώνων στον παρονομαστή.

$$\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

$$\frac{5}{1+\sqrt{11}} = \frac{5(1-\sqrt{11})}{(1+\sqrt{11})(1-\sqrt{11})} = \frac{5(1-\sqrt{11})}{1^2 - \sqrt{11}^2} = \frac{5(1-\sqrt{11})}{1-11} = \frac{5(1-\sqrt{11})}{-10} = -\frac{1-\sqrt{11}}{2}$$

5. Να γραφεί η παράσταση $A = \sqrt[3]{17} \cdot \sqrt[4]{17} \cdot \sqrt{17}$ σε μια ρίζα.

$$A = \sqrt[3]{17^2} \cdot \sqrt[6]{17} \cdot \sqrt{17}$$

$$A = 17^{\frac{2}{3}} \cdot 17^{\frac{1}{6}} \cdot 17^{\frac{1}{2}}$$

$$A = 17^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}}$$

$$A = 17^{\frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{3}{6}}$$

$$A = 17^{\frac{8}{6}}$$

$$A = 17^{\frac{4}{3}}$$

$$A = \sqrt[3]{17^4}$$

6. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{7}$ και $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Θα υποθέσουμε ότι $\sqrt{7} < \sqrt{5} + \sqrt{2}$ και με διαδοχικά βήματα θα πάρουμε:

$$\sqrt{7} < \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{7}^2 < (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$$

$$7 < \sqrt{5}^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2$$

$$7 < 5 + 2\sqrt{10} + 2$$

$$7 < 7 + 2\sqrt{10}$$

$$0 < 2\sqrt{10}, \text{ ισχύει}$$



3

εξισώσεις



Ενότητα 3η - Άλγεβρα Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



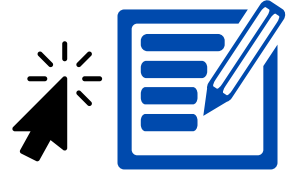
1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

1. Τι γνωρίζουμε για την εξίσωση της μορφής $ax+b=0$;

- Αν $a \neq 0$ τότε $x = -\frac{b}{a}$
- Αν $a = 0$ τότε:

αν $b \neq 0$ έχει τη μορφή $0x = -b$, δεν έχει λύση, είναι αδύνατη.

αν $b = 0$ έχει τη μορφή $0x = 0$, έχει άπειρες λύσεις, είναι ταυτότητα.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

→ Η λύση της εξίσωσης $ax+b=0$ λέγεται ρίζα της εξίσωσης.

2. Τι ισχύει για τις εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού;

Κάποιες εξισώσεις με απόλυτες τιμές μπορούν να αναχθούν σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

Μπορούμε να λύσουμε εξισώσεις της μορφής:

- $|f(x)| = \theta$
- $|f(x)| = |g(x)|$
- $|f(x)| = g(x)$



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να λυθεί η εξίσωση.

Θα ακολουθήσουμε τον γνωστό τρόπο επίλυσης εξισώσεων 1ου βαθμού.

1. Θα πολλαπλασιάσουμε με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
2. Θα διώξουμε παρενθέσεις.
3. Θα κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
4. Θα διαιρέσουμε με τον συντελεστή του αγνώστου για να βρούμε τη λύση.

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{3}\left(x - \frac{2x+2}{2}\right) &= \frac{1}{3}(x-1) \\3x - \left(x - \frac{2x+2}{2}\right) &= x-1 \\3x - x + \frac{2x+2}{2} &= x-1 \\6x - 2x + 2x + 2 &= 2x - 2 \\6x - 2x + 2x - 2x &= -2 - 2 \\4x &= -4 \\x &= -1\end{aligned}$$

2. Να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση $\lambda(2\omega - \lambda^2) = 3\omega - 6$ να έχει λύση $\omega=2$.

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται **παραμετρική εξίσωση** γιατί περιέχει μία παράμετρο, το λ .

Αφού θέλουμε να έχει λύση $\omega=2$ θα κάνουμε αντικατάσταση στην αρχική:

$$\begin{aligned}\lambda(2\omega - \lambda^2) &= 3\omega - 6 \\ \lambda(4 - \lambda^2) &= 6 - 6 \\ \lambda(4 - \lambda^2) &= 0 \\ \lambda &= 0 \text{ ή } \lambda^2 = 4 \\ \lambda &= 0 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2\end{aligned}$$

Δηλαδή βρήκαμε 3 διαφορετικές τιμές τέτοιες ώστε η εξίσωση να έχει λύση το 2. Θα κάνουμε **επαλήθευση** και παίρνουμε σε κάθε περίπτωση:

$$3\omega - 6 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2$$

3. Να λυθεί η κλασματική εξίσωση $\frac{x-6}{x(x+2)} - \frac{7}{x+2} = 0$.

Για να λύσουμε μια κλασματική εξίσωση αρχικά πρέπει να εξαιρέσουμε όλες τις τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Πρέπει: $x(x+2) \neq 0$ και $(x+2) \neq 0$

Για να λύσουμε την εξίσωση θα χρειαστεί να κάνουμε ομώνυμα τα κλάσματα, βρίσκοντας το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

$$\begin{aligned}\frac{x-6}{x(x+2)} - \frac{7}{x+2} &= 0 \\ \frac{x-6}{x(x+2)} - \frac{7x}{x(x+2)} &= 0 \\ \frac{x-6-7x}{x(x+2)} &= 0 \\ \frac{-6x-6}{x(x+2)} &= 0 \\ -6x-6 &= 0 \\ -6x &= 6 \\ x &= -\frac{6}{6} \\ x &= -1\end{aligned}$$



→ Βρήκαμε $x=-1$, δηλαδή μια λύση (αποδεκτή).

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$1. \quad 2 - 4|a| = 0$$

$$2 = 4|a|$$

$$|a| = \frac{2}{4}$$

$$|a| = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ ή } a = -\frac{1}{2}$$

$$2. \quad |2x - 1| = |x - 3|$$

$$2x - 1 = x - 3 \text{ ή } 2x - 1 = -x + 3$$

$$2x - x = 1 - 3 \text{ ή } 2x + x = 1 + 3$$

$$x = -2 \text{ ή } 3x = 4$$

$$x = -2 \text{ ή } x = \frac{4}{3}$$

$$3. \quad |y - 1| = 2y - 4$$

Για να λύσουμε την εξίσωση 3 πρέπει να σκεφτούμε ότι η απόλυτη τιμή είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός συνεπώς θα πάρουμε τον περιορισμό:

$$2y - 4 \geq 0$$

$$2y \geq 4$$

$$y \geq \frac{4}{2}$$

$$y \geq 2$$

Οπότε τώρα θα λύσουμε κανονικά την εξίσωση, έχοντας υπόψιν ότι οι λύσεις πρέπει να ανήκουν στο διάστημα $[2, +\infty)$.

$$|y - 1| = 2y - 4$$

$$y - 1 = 2y - 4 \text{ ή } y - 1 = -2y + 4$$

$$y - 2y = 1 - 4 \text{ ή } y + 2y = 1 + 4$$

$$-y = -3 \text{ ή } 3y = 5$$

$$y = 3 \text{ ή } y = \frac{5}{3}$$

Παρόλο που βρήκαμε 2 λύσεις, η λύση $y = \frac{5}{3}$ απορρίπτεται γιατί $\frac{5}{3} < 2$.

→ Άρα η εξίσωση έχει μία λύση, την $y = 3$.





Ενότητα 3η - Άλγεβρα Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^v = a$.

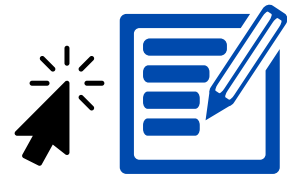
1. Τι γνωρίζουμε για τις λύσεις της εξίσωσης $x^v = a$;

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a > 0$ και v **περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια **λύση** την $\sqrt[v]{a}$.

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a > 0$ και v **άρτιο** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς **δύο λύσεις** την $\sqrt[v]{a}$ και την $-\sqrt[v]{a}$.

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a < 0$ και v **περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς **μία λύση** την $-\sqrt[v]{|a|}$.

Η εξίσωση $x^v = a$, με $a < 0$ και v **άρτιο** φυσικό αριθμό, είναι **αδύνατη**.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Πώς γενικεύονται οι λύσεις της εξίσωσης x^v ;

- Αν ο v περιττός τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει μοναδική λύση, την $x=a$.
- Αν ο v άρτιος τότε η εξίσωση $x^v = a^v$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = a$ και $x_2 = -a$.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις.

$$x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8}$$

$$x = 2$$

$$x^5 + 32 = 0$$

$$x^5 = -32$$

$$x = -\sqrt[5]{32}$$

$$x = -2$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις.

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ ή } x = -2$$

$$x^6 - 64 = 0$$

$$x^6 = 64$$

$$x = \sqrt[6]{64} \text{ ή } x = -\sqrt[6]{64}$$

$$x = 2 \text{ ή } x = -2$$

$$x^2 + 6 = 0$$

$$x^2 = -6, \text{ αδύνατη}$$

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$4x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ή } x = -\frac{3}{2}$$

3. Να λυθεί η εξίσωση.

$$(2a - 4)^5 - 32 = 0$$

$$(2a - 4)^5 = 32$$

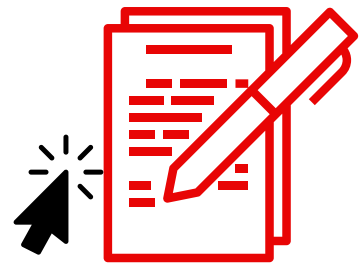
$$(2a - 4)^5 = 2^5$$

$$2a - 4 = 2$$

$$2a = 6$$

$$a = \frac{6}{2}$$

$$a = 3$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

4. Να λυθεί η εξίσωση.

$$|x-1|^{2023} = 1$$

$$|x-1| = 1$$

$$x-1=1 \quad \text{ή} \quad x-1=-1$$

$$x=2 \quad \text{ή} \quad x=0$$





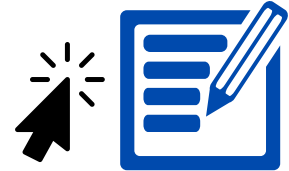
3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

1. Ποια είναι η μορφή μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης;

Οι εξισώσεις δευτέρου βαθμού είναι της μορφής:

$$αχ^2 + βχ + γ = 0, \text{ με } α \neq 0$$

$$\text{π.χ. } 2χ^2 - 3χ + 6 = 0$$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Πώς βρίσκουμε τις λύσεις μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης;

Η αλγεβρική παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, δηλαδή η **διακρίνουσα** της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, μας δείχνει πόσες και ποιες είναι οι λύσεις της.

π.χ. Στην εξίσωση $χ^2 - 5χ + 6 = 0$ έχουμε $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

3. Τι ισχύει για τις ρίζες της εξίσωσης;

Πρόσημο Διακρίνουσας	Πλήθος Ριζών	Ρίζες
$\Delta > 0$	2 διαφορετικές ρίζες	$χ_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	1 διπλή ρίζα	$χ = -\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	καμία ρίζα	-

π.χ. Η εξίσωση $x^2 - 5x + 6 = 0$ $\Delta = 1 > 0$ και λύσεις $x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Η εξίσωση $x^2 - 4x + 4 = 0$ έχει $\Delta = 0$ και λύση $x = -\frac{(-4)}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Η εξίσωση $x^2 + 3x + 5 = 0$ έχει $\Delta = -11 < 0$ και δεν έχει καμία λύση, δηλαδή είναι αδύνατη.

4. Ποιοι είναι οι τύποι Vieta;

Οι τύποι Vieta προκύπτουν αν πάρουμε τις δύο λύσεις x_1, x_2 της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ και συμβολίσουμε με S το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$

$$\text{Έχουμε: } x_1 + x_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } x_1 \cdot x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

5. Απόδειξη τύπων Vieta:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\beta^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

6. Πώς μετασχηματίζεται η δευτεροβάθμια εξίσωση με χρήση των τύπων Vieta;

Παίρνουμε $ax^2 + bx + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$

7. Απόδειξη μετασχηματισμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$

Έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$
$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$
$$x^2 - (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0$$
$$x^2 - Sx + P = 0$$

8. Υπάρχουν εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού;

Υπάρχει πλήθος εξισώσεων που μπορούμε να λύσουμε αν αναχθούν σε εξίσωση 2ου βαθμού, ειδική κατηγορία είναι οι διτετράγωνες εξισώσεις της μορφής:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \text{ με } \alpha \neq 0$$

π.χ. Η εξίσωση $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$ μπορεί να μετασχηματιστεί σε εξίσωση 2ου βαθμού αν θέσουμε $x^2 = y > 0$ και πάρουμε $(x^2)^2 - 10x^2 + 25 = y^2 - 10y + 25 = 0$.



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$x^2 - (5 + \sqrt{3})x + 5\sqrt{3} = 0$$

Η εξίσωση είναι μια εξίσωση δευτέρου βαθμού, θα την λύσουμε με χρήση του τύπου της Διακρίνουσας.



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 5 + \sqrt{3}$$

$$\gamma = 5\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = -(5 + \sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5\sqrt{3} \\ &= (5 + \sqrt{3})^2 - 20\sqrt{3} = 5^2 + 10\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 - 20\sqrt{3} \\ &= 5^2 - 10\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 \\ &= (5 - \sqrt{3})^2 > 0\end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-(5 + \sqrt{3})) \pm \sqrt{(5 - \sqrt{3})^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 + \sqrt{3} \pm (5 - \sqrt{3})}{2} = \begin{cases} \frac{5 + \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3}}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{5 + \sqrt{3} - 5 + \sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Οπότε η εξίσωση έχει λύσεις τις: $x_1 = 5$ και $x_2 = \sqrt{3}$

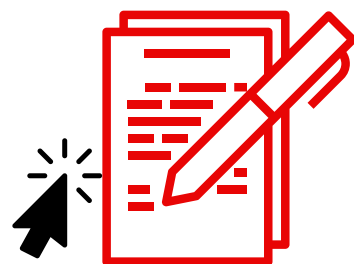
2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3}{x} + \frac{2x-4}{x-3} + \frac{3-x^2}{x^2-3x} = 0$$

Πριν ξεκινήσουμε την επίλυση του προβλήματος πρέπει να πάρουμε περιορισμό για τον άγνωστο. Από την στιγμή που εμφανίζεται σε παρονομαστή κλάσματος θα πρέπει:

$$x \neq 0, x - 3 \neq 0, x^2 - 3x \neq 0, \text{ οπότε τελικά έχουμε } x \neq 0, 3$$

Για να λύσουμε την εξίσωση θα χρειαστεί να απλοποιήσουμε την παράσταση.



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ



$$\frac{3}{x} + \frac{2x-4}{x-3} + \frac{3-x^2}{x^2-3x} = 0$$

$$\frac{3}{x} + \frac{2x-4}{x-3} + \frac{3-x^2}{x(x-3)} = 0$$

$$\frac{3(x-3) + x(2x-4) + 3-x^2}{x(x-3)} = 0$$

$$3(x-3) + x(2x-4) + 3 - x^2 = 0$$

$$3x - 9 + 2x^2 - 4x + 3 - x^2 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = -1$$

$$\gamma = 6$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$



Όμως η λύση $x_1 = 3$ απορρίπτεται,
οπότε η εξίσωση έχει μία μόνο λύση, την $x = -2$

3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 2 = 0$ για τις διάφορες τιμές του λ .

Για να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης αρκεί να βρούμε το πρόσημο της Διακρίνουσας.

$$\alpha = 2$$

$$\beta = -\lambda$$

$$\gamma = -2$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = \lambda^2 + 16 > 0$$

Άρα η εξίσωση έχει για κάθε τιμή του λ δύο ρίζες άνισες.

4. Να βρείτε τι ισχύει για τα α, β ώστε η εξίσωση $\alpha x^2 - 2\alpha x + (\beta - \frac{\beta^2}{4\alpha})$ να έχει μία διπλή ρίζα.

Αφού θέλουμε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα θα πάρουμε ότι $\Delta = 0$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\alpha)^2 - 4\alpha(\beta - \frac{\beta^2}{4\alpha}) = 4\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2 = (2\alpha - \beta)^2$$

$$\text{Για να έχουμε } \Delta = 0 \text{ πρέπει } (2\alpha - \beta)^2 = 0 \Rightarrow 2\alpha = \beta$$

5. Αν X_1, X_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $X^2 - 3X + 4 = 0$, να βρείτε:

i. $X_1 + X_2$

ii. $X_1 X_2$

iii. $X_1^2 + X_2^2$

iv. $X_1^3 + X_2^3$

v. $\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2}$

α. $X_1 + X_2 = S = 3$

β. $X_1 X_2 = P = 4$

γ. $X_1^2 + X_2^2 = (X_1 + X_2)^2 - 2X_1 X_2 = S^2 - 2P = 3^2 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1$

δ. $X_1^3 + X_2^3 = (X_1 + X_2)^3 - 3X_1^2 X_2 - 3X_1 X_2^2 = (X_1 + X_2)^3 - 3X_1 X_2 (X_1 + X_2) = S^3 - 3PS = 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot 4 = 27 - 36 = -9$

ε. $\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} = \frac{X_1 + X_2}{X_1 X_2} = \frac{S}{P} = \frac{3}{4}$

Παρατηρούμε ότι για να βρούμε σχέσεις ανάμεσα στα X_1, X_2 αξιοποιήσαμε τις ιδιότητες των πράξεων και τα διάφορα αναπτύγματα των τετραγώνων.

6. Να λύσετε την εξίσωση $3(\chi - 3)^4 + 10(\chi - 3)^2 + 3 = 0$

Θα χρειαστεί να φέρουμε την εξίσωση σε μορφή δευτεροβάθμιας οπότε παίρνουμε $(\chi - 3)^2 = \omega \geq 0$

Πλέον έχουμε: $3\omega^2 + 10\omega + 3 = 0$

$\alpha = 3$

$\beta = 10 \quad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64 > 0$

$\gamma = 3$

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-10 \pm 8}{6} = \begin{cases} \frac{-18}{6} = -3 \\ \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Βρήκαμε ότι και οι δύο λύσεις της εξίσωσης $3\omega^2 + 10\omega + 3 = 0$ είναι αρνητικές άρα η αρχική εξίσωση $3(\chi - 3)^4 + 10(\chi - 3)^2 + 3 = 0$ είναι αδύνατη.

4

ανισώσεις



1. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

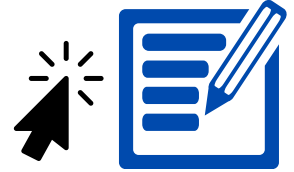
1. Τι γνωρίζουμε για τις ανισώσεις της μορφής $ax + b > 0$;

Γενικά έχουμε:

$$ax + b > 0$$

$$ax + b - b > -b$$

$$ax > -b$$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Και τις περιπτώσεις:

• Αν $a > 0$,τότε: $x > -\frac{b}{a}$

• Αν $a < 0$,τότε: $x < -\frac{b}{a}$

• Αν $a = 0$,τότε: $0x > -b$

> η οποία αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $b > 0$

> είναι αδύνατη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $b \leq 0$

π.χ.: $2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

$$-3x > 9 \Rightarrow x < -3$$

$$0x > -7 \text{ αληθεύει για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$0x > 4 \text{ είναι αδύνατη για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

2. Πώς λύνουμε εξισώσεις με απόλυτες τιμές;

Για να λύσουμε εξισώσεις με απόλυτες τιμές αξιοποιούμε τις ιδιότητες της απόλυτης τιμής και της έννοιας της απόστασης δύο αριθμών, όπως έχουμε δει και στο κεφάλαιο 2.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να λύσετε την ανίσωση και να γράψετε τη λύση σε μορφή διαστήματος.

Γενικά όταν λύνουμε ανισώσεις συνηθίζουμε να γράφουμε τη λύση τόσο σε μορφή ανίσωσης όσο και σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

$$\begin{aligned}6(\chi - 2) + (2 - \chi) &< -2(\chi - 5) + 2\chi \\6\chi - 12 + 2 - \chi &< -2\chi + 10 + 2\chi \\5\chi - 10 &< 10 \\5\chi &< 20, (5 > 0) \\\chi &< 4\end{aligned}$$

Δηλαδή έχουμε $\chi \in (-\infty, 4)$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\begin{aligned}3\chi - 6 &> 4(\chi - 1) - \chi \\3\chi - 6 &> 4\chi - 4 - \chi \\3\chi - 4\chi + \chi &> 6 - 4 \\0 &> 2, \text{αδύνατο}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi - 2(\chi + 4) &< -(\chi - 2) + 3 \\\chi - 2\chi - 8 &< -\chi + 2 + 3 \\\chi - 2\chi + \chi &< 2 + 3 + 8 \\0 &< 13, \text{αληθεύει για κάθε } \chi \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

3. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$4\chi + 1 > -\frac{\chi}{2} - 8 \quad \text{και} \quad 2\chi + 1 < \frac{5\chi + 4}{3}$$

Θα λύσουμε κάθε ανίσωση χωριστά και στο τέλος θα εξετάσουμε αν υπάρχουν τιμές του χ που ικανοποιούν και τις δύο ανισώσεις.

$$4\chi + 1 > -\frac{\chi}{2} - 8$$

$$8\chi + 2 > -\chi - 16$$

$$8\chi + \chi > -16 - 2$$

$$9\chi > -18$$

$$\chi > -2$$

$$2\chi + 1 < \frac{5\chi + 4}{3}$$

$$6\chi + 3 < 5\chi + 4$$

$$6\chi - 5\chi < 4 - 3$$

$$\chi < 1$$

Οπότε οι τιμές του χ που ικανοποιούν και τις δύο ανισώσεις είναι $\chi \in (-2, 1)$

4. Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε την ανίσωση $\lambda\chi + 8 < 4\lambda + 2\chi$

$$\lambda\chi + 8 < 4\lambda + 2\chi$$

$$\lambda\chi - 2\chi < 4\lambda - 8$$

$$\chi(\lambda - 2) < 4(\lambda - 2)$$

Τώρα θα διακρίνουμε περιπτώσεις για το λ :

- αν $\lambda > 2$ τότε $\lambda - 2 > 0$ και έχουμε: $\chi < \frac{4(\lambda - 2)}{\lambda - 2} \Rightarrow \chi < 4$
- αν $\lambda < 2$ τότε $\lambda - 2 < 0$ και έχουμε: $\chi > \frac{4(\lambda - 2)}{\lambda - 2} \Rightarrow \chi > 4$
- αν $\lambda = 2$ τότε $\lambda - 2 = 0$ και έχουμε $0 < 0$, που είναι αδύνατο.

5. Να βρείτε την κοινή λύση στις παρακάτω ανισώσεις:

1. $|x| \geq 3$ και $|x| < 5$

Από τις ιδιότητες των απόλυτων τιμών έχουμε:

$$|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5 \Leftrightarrow x \in (-5, 5)$$



Άρα οι κοινές λύσεις των δυο ανισώσεων είναι $x \in (-5, -3] \cup [3, 5)$

2. $|x + 2| > 9$ και $|2x + 1| \leq 3$

$$|x + 2| > 9 \Leftrightarrow x + 2 < -9 \text{ ή } x + 2 > 9 \Leftrightarrow x < -11 \text{ ή } x > 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -11) \cup (7, +\infty)$$

$$|2x + 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-2, 1]$$



Παρατηρούμε ότι οι δύο ανισώσεις δεν έχουν καμία κοινή λύση, άρα η επίλυση είναι αδύνατη.





2. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

1. Πώς παραγοντοποιούμε ένα τριώνυμο 2ου βαθμού;

Η παράσταση $αχ^2 + βχ + γ, α ≠ 0$ λέγεται τριώνυμο 2ου βαθμού.

Για να το παραγοντοποιήσουμε διακρίνουμε περιπτώσεις για την διακρίνουσά του:

- **Αν $Δ > 0$ τότε** $αχ^2 + βχ + γ = α(χ - χ_1)(χ - χ_2)$ όπου $χ_1, χ_2$ οι ρίζες του τριωνύμου.
- **Αν $Δ = 0$ τότε** $αχ^2 + βχ + γ = α(χ + \frac{β}{2α})^2$ δηλαδή το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο.
- **Αν $Δ < 0$ τότε** $αχ^2 + βχ + γ = α[(χ + \frac{β}{2α})^2 + \frac{|Δ|}{4α^2}]$ και το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

π.χ. $χ^2 - 5χ + 6 = (χ - 3)(χ - 2)$

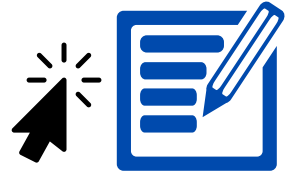
$$χ^2 - 4χ + 4 = (χ - 2)^2$$

$$χ^2 + 4χ + 8 : \text{δεν παραγοντοποιείται}$$

2. Πώς βρίσκουμε το πρόσημο ενός τριωνύμου;

Το τριώνυμο $αχ^2 + βχ + γ, α ≠ 0$ γίνεται:

- Ετερόσημο του α, μόνο όταν είναι $Δ > 0$ και για τις τιμές του χ, που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

- Μηδέν, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- Ομόσημο του a σε κάθε άλλη περίπτωση.

3. Πώς λύνουμε ανισώσεις της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$;

Χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες για το πρόσημο του τριωνύμου μπορούμε να επιλύσουμε ανισώσεις της παραπάνω μορφής. Οι ανισώσεις αυτές ονομάζονται ανισώσεις δευτέρου βαθμού.

π.χ. Η εξίσωση $x^2 - 5x + 6 = 0$ έχει λύσεις τους αριθμούς 2 και 3. Οπότε παίρνουμε:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	-	+	

Δηλαδή η παράσταση $x^2 - 5x + 6 > 0$ για $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ και
 $x^2 - 5x + 6 < 0$ για $x \in (2, 3)$



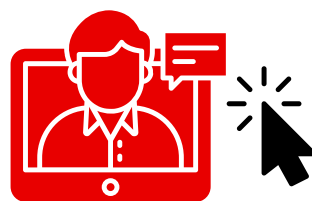
Λυμένα Παραδείγματα

1. Να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4x - 12}$$

Για να απλοποιήσουμε το κλάσμα θα χρειαστεί να παραγοντοποιήσουμε τους όρους του.

Για τον αριθμητή $x^2 - 7x + 6$ παίρνουμε:



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

$$\alpha = 1$$

$$\beta = -7$$

$$\gamma = 6$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25 > 0$$

$$\text{Βρίσκουμε } x_1, x_2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{7+5}{2} = 6 \\ \frac{7-5}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Οπότε } x^2 - 7x + 6 = (x - 6)(x - 1)$$

Για τον παρονομαστή $x^2 - 4x - 12$ παίρνουμε:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = -4$$

$$\gamma = -12$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64 > 0$$

$$\text{Βρίσκουμε } x_1, x_2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{4+8}{2} = 6 \\ \frac{4-8}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\text{Οπότε } x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x + 2)$$

$$\text{Οπότε τελικά για το αρχικό κλάσμα έχουμε: } \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4x - 12} = \frac{(x - 6)(x - 1)}{(x - 6)(x + 2)} = \frac{x - 1}{x + 2}$$

2. Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων.

1. $x^2 - 4x - 12$

2. $x^2 - 6x + 9$

3. $x^2 - 2x + 6$



- Το τριώνυμο $x^2 - 4x - 12$ έχει $\Delta > 0$ και ρίζες -2, 6. Οπότε έχουμε:

x	$-\infty$	-2	6	$+\infty$
$x^2 - 4x - 12$	+	-	-	+

Ξέρουμε ότι το τριώνυμο «εκτός» των ριζών είναι ομόσημο του a ($a = 1 > 0$) και εντός των ριζών είναι ετερόσημο του a .

- Το τριώνυμο $x^2 - 6x + 9$ έχει $\Delta = 0$ και ρίζα 3. Οπότε έχουμε:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x^2 - 6x + 9$	+	+	+

Δηλαδή το τριώνυμο μηδενίζεται στο 3 και είναι θετικό για όλους τους υπόλοιπους αριθμούς.

- Το τριώνυμο $\chi^2 - 2\chi + 6$ έχει $\Delta < 0$ δηλαδή θα είναι πάντα ομόσημο του α δηλαδή θετικό σε αυτή την περίπτωση.

3. Να λυθεί η ανίσωση $-2\chi^2 - 3\chi + 5 > 0$

Θα ξεκινήσουμε βρίσκοντας την Διακρίνουσα του τριωνύμου:

$$\Delta = (-3)^2 - 4(-2) \cdot 5 = 9 + 40 = 49 > 0$$

Βρίσκουμε τις ρίζες $\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 7}{-4} = \begin{cases} \frac{3+7}{-4} = -\frac{5}{2} \\ \frac{3-7}{-4} = 1 \end{cases}$

Οπότε φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου:

χ	$-\infty$	1		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-2\chi^2 - 3\chi + 5$		-	+	-	

Γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο εκτός των ριζών είναι ομόσημο του α ($\alpha = -2 < 0$) και εντός ετερόσημο.

Η ανίσωση ζητάει $-2\chi^2 - 3\chi + 5 > 0$, δηλαδή $\chi \in \left(1, -\frac{5}{2}\right)$

4. Να λυθεί η ανίσωση $-x^2 + 6x - 10 > 0$

Βρίσκουμε την διακρίνουσα $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$. Οπότε το τριώνυμο είναι πάντα ομόσημο του α, δηλαδή $-x^2 + 6x - 10 < 0$ και η ανίσωση είναι αδύνατη.

5. Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 - \lambda x + 2\lambda + 1$. Να προσδιορίσετε το λ ώστε το τριώνυμο να:

- έχει δύο άνισες ρίζες
- να έχει μια διπλή ρίζα
- να μην έχει καθόλου ρίζες

Όπως έχουμε δει στο κεφάλαιο 3, το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης έχει να κάνει με πρόσημο της διακρίνουσας.

Για το τριώνυμο $3x^2 - \lambda x + 2\lambda + 1$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \alpha &= 3 \\ \beta &= -\lambda & \Delta &= (-\lambda)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2\lambda + 1) = \lambda^2 - 12(2\lambda + 1) = \lambda^2 - 24\lambda - 12 \\ \gamma &= 2\lambda + 1 \end{aligned}$$

Για να βρούμε το πρόσημο της διακρίνουσας θα χρειαστεί να μελετήσουμε το τριώνυμο $\lambda^2 - 24\lambda - 12$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= -24 & \Delta &= (-24)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 576 + 48 = 624 > 0 \\ \gamma &= -12 \end{aligned}$$

Βρίσκουμε ρίζες $\frac{24 \pm 4\sqrt{39}}{2} = \begin{cases} 12 + 2\sqrt{39} \\ 12 - 2\sqrt{39} \end{cases}$

Παίρνουμε τον πίνακα προσήμων για το τριώνυμο $\lambda^2 - 24\lambda - 12$

λ	$-\infty$	$12 - 2\sqrt{39}$		$12 + 2\sqrt{39}$	$+\infty$
$\lambda^2 - 24\lambda - 12$		+	-	+	

Δηλαδή βρήκαμε ότι:

- αν $\lambda \in (12 - 2\sqrt{39}, 12 + 2\sqrt{39})$ η διακρίνουσα $\lambda^2 - 24\lambda - 12$ του αρχικού τριωνύμου $3\chi^2 - \lambda\chi + 2\lambda + 1$ είναι αρνητική και συνεπώς το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.
- αν $\lambda = 12 \pm 2\sqrt{39}$ η διακρίνουσα $\lambda^2 - 24\lambda - 12$ του αρχικού τριωνύμου $3\chi^2 - \lambda\chi + 2\lambda + 1$ μηδενίζεται και συνεπώς το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα.
- αν $\lambda \in (-\infty, 12 - 2\sqrt{39}) \cup (12 + 2\sqrt{39}, +\infty)$ η διακρίνουσα $\lambda^2 - 24\lambda - 12$ του αρχικού τριωνύμου $3\chi^2 - \lambda\chi + 2\lambda + 1$ είναι θετική και το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.

6. Να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου $x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda - 1$ για τις διάφορες τιμές του λ .

Θα βρούμε πρώτα την Διακρίνουσα του τριωνύμου.

$$\alpha = 1$$

$$\beta = -(\lambda + 2) \quad \Delta = (-(\lambda + 2))^2 - 4(2\lambda - 1) = (\lambda + 2)^2 - 8\lambda + 4 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 - 8\lambda + 4 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 4 = (\lambda - 2)^2 + 4 > 0$$

$$\gamma = 2\lambda - 1$$

→ Δηλαδή η διακρίνουσα είναι πάντα θετική, συνεπώς το τριώνυμο $x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda - 1$ έχει πάντα δύο ρίζες άνισες, για κάθε τιμή του λ .



5

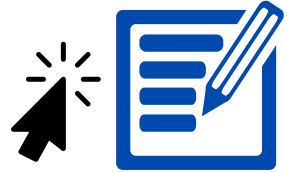
πρόοδοι



Ενότητα 5η - Άλγεβρα Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



1. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε ακολουθία πραγματικών αριθμών;

Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ στους πραγματικούς αριθμούς.

2. Τι γνωρίζουμε για μια ακολουθία πραγματικών αριθμών;

Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί το 1 καλείται πρώτος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με a_1 , ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί το 2 καλείται δεύτερος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με a_2 κ.λπ.. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός n καλείται n -οστός ή γενικός όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με a_n . Την ακολουθία τη συμβολίζουμε με (a_n) .

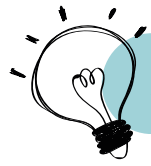
3. Πώς ορίζουμε μία ακολουθία αναδρομικά;

Λέμε ότι η ακολουθία (a_n) ορίζεται αναδρομικά και η ισότητα $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ είναι ο αναδρομικός της τύπος αρκεί να γνωρίζουμε:

- Τον αναδρομικό της τύπο και
- Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

4. Μπορούμε να βρούμε τον τύπο για κάθε ακολουθία;

Υπάρχουν ακολουθίες, για τις οποίες μέχρι τώρα δε γνωρίζουμε ούτε τύπο για το γενικό όρο, ούτε αναδρομικό τύπο. Μια τέτοια ακολουθία είναι π.χ. η ακολουθία των πρώτων αριθμών: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...



Λυμένα Παραδείγματα



1. Αν $a_v = 2v^2 - 3$, να βρεθούν οι όροι a_1, a_4, a_{v-1} .

Θα θέσουμε $v = 1$ οπότε $a_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \Leftrightarrow a_1 = 2 - 3 \Leftrightarrow a_1 = -1$.

Θα θέσουμε $v = 4$ οπότε $a_4 = 2 \cdot 4^2 - 3 = 32 - 3 \Leftrightarrow a_4 = 29$.

Θα θέσουμε $v = v - 1$ οπότε $a_{v-1} = 2(v - 1)^2 - 3 = 2v^2 - 4v + 2 - 3 = 2v^2 - 4v - 1$.

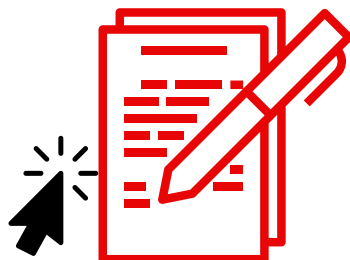
2. Αν $a_1 = 3$ και ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι $a_{v+1} = a_v^2 - 2$, να βρείτε τους όρους a_3, a_4 .

Για να βρούμε τον όρο a_3 , πρέπει να γνωρίζουμε τον όρο a_2 και για να βρούμε τον όρο a_4 πρέπει να βρούμε τον a_3 , κ.ο.κ.

$$a_{v+1} = a_v^2 - 2 \Rightarrow a_2 = a_1^2 - 2 \Rightarrow a_2 = 9 - 2 \Rightarrow a_2 = 7$$

$$a_{v+1} = a_v^2 - 2 \Rightarrow a_3 = a_2^2 - 2 \Rightarrow a_3 = 49 - 2 \Rightarrow a_3 = 47$$

$$a_{v+1} = a_v^2 - 2 \Rightarrow a_4 = a_3^2 - 2 \Rightarrow a_4 = 2.209 - 2 \Rightarrow a_4 = 2.207$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

3. Αν γνωρίζουμε ότι $a_v = 2v + 2$, να ορίσετε αναδρομικά την ακολουθία.

Για να ορίσουμε την ακολουθία αναδρομικά αρχικά θα βρούμε τον τύπο για a_{v+1} .

$$\text{Παίρνουμε } a_v = 2v + 2 \Rightarrow a_{v+1} = 2(v+1) + 2 \Rightarrow a_{v+1} = 2v + 2 + 2 \Rightarrow a_{v+1} = 2v + 4$$

Τώρα θα υπολογίσουμε την διαφορά a_{v+1} με a_v .

$$a_{v+1} - a_v = 2v + 4 - 2v - 2 = 2$$

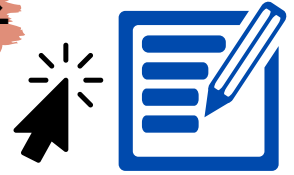
$$a_{v+1} = a_v + 2$$

Οπότε για την αναδρομική ακολουθία έχουμε
$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{v+1} = a_v + 2 \end{cases}$$





2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ποια ακολουθία ονομάζουμε αριθμητική πρόοδο;

Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

2. Τι χαρακτηριστικά και τι τύπο έχει η αριθμητική πρόοδος;

Τον αριθμό που προστίθεται τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε **διαφορά της προόδου**.

Η ακολουθία (a_v) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω και τύπο:

$$a_{v+1} = a_v + \omega \quad \text{ή} \quad a_{v+1} - a_v = \omega$$

Ο $v^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά ω είναι:

$$a_v = a_1 + (v - 1)\omega$$

3. Τι ονομάζουμε αριθμητικό μέσο σε μια αριθμητική πρόοδο;

Αριθμητικός μέσος των όρων α και γ είναι ο αριθμός β για τον οποίο ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

4. Πότε τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου;

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$, δηλαδή ο β είναι ο αριθμητικός μέσος.

5. Πώς βρίσκουμε το άθροισμα n όρων μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω ;

Το άθροισμα των πρώτων n όρων αριθμητικής προόδου με διαφορά ω είναι:

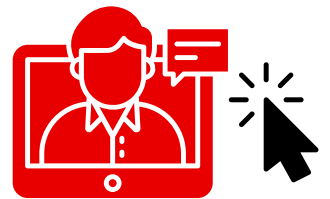
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Αν στον παραπάνω τύπο χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $a_{n+1} = a_n + \omega$ τότε έχουμε:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)\omega]$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Δίνεται $a_n = 2n - 1$. Αφού αποδείξετε ότι είναι αριθμητική πρόοδος, να υπολογίσετε τον όρο a_{10} .

Για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά $a_{n+1} - a_n$ είναι ένας σταθερός αριθμός, ανεξάρτητος του n .

Παίρνουμε $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 1 - 2n + 1 = 2n + 2 - 1 - 2n + 1 = 2$.

Οπότε βρήκαμε ότι η διαφορά ω είναι σταθερή και $\omega = 2$.

Για το a_{10} θα πάρουμε $a_{10} = 2 \cdot 10 - 1 = 20 - 1 = 19$.

2. Δίνεται αριθμητική πρόοδος με $a_1 = -2$ και $a_5 = 10$. Να βρείτε την διαφορά ω της προόδου.

Γνωρίζουμε ότι $a_n = a_1 + (n-1)\omega$ οπότε θα πάρουμε:

$$a_v = a_1 + (v - 1)\omega$$

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)\omega$$

$$10 = -2 + 4\omega$$

$$12 = 4\omega$$

$$\omega = \frac{12}{4}$$

$$\omega = 3$$



Δηλαδή η διαφορά ω της προόδου είναι 3.

**3. Δίνονται οι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $2x + 1, x - 2, 4x - 1$.
Να βρείτε το x .**

Αφού οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι προόδου θα ισχύει ο τύπος $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$

Άρα έχουμε:

$$x - 2 = \frac{2x + 1 + 4x - 1}{2}$$

$$x - 2 = \frac{6x}{2}$$

$$x - 2 = 3x$$

$$-2x = -2$$

$$x = 1$$

4. Αν για μια αριθμητική πρόοδο γνωρίζουμε ότι $a_1 = -3$ και $\omega = 3$, να βρείτε το S_{20} .

Θα αξιοποιήσουμε τον τύπο $S_v = \frac{v}{2}[2a_1 + (v - 1)\omega]$ οπότε έχουμε:

$$S_v = \frac{v}{2}[2a_1 + (v - 1)\omega]$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2 \cdot (-3) + (20 - 1) \cdot 3]$$

$$S_{20} = 10 \cdot (-6 + 19 \cdot 3)$$

$$S_{20} = 10 \cdot 51$$

$$S_{20} = 510$$

5. Για μια αριθμητική πρόοδο α_v έχουμε ότι $\alpha_2 + \alpha_7 = 20$. Μπορείτε να βρείτε το S_8 ;

Για να βρούμε το S_8 θα σκεφτούμε τον τύπο $S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v-1)\omega]$, δηλαδή $S_8 = \frac{8}{2}[2\alpha_1 + (8-1)\omega] = 4 \cdot (2\alpha_1 + 7\omega)$

Καταλαβαίνουμε ότι θα χρειαστεί να προσδιορίσουμε την ποσότητα $2\alpha_1 + 7\omega$.

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\alpha_2 + \alpha_7 = 20$$

$$\alpha_1 + (2-1)\omega + \alpha_1 + (7-1)\omega = 20$$

$$\alpha_1 + \omega + \alpha_1 + 6\omega = 20$$

$$2\alpha_1 + 7\omega = 20$$

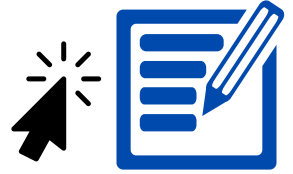
Οπότε εύκολα βρίσκουμε ότι

$$S_8 = 4 \cdot (2\alpha_1 + 7\omega) = 4 \cdot 20 = 80.$$





3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε γεωμετρική πρόοδο;

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

2. Τι χαρακτηριστικά έχει η γεωμετρική πρόοδος;

Η ακολουθία (a_v) είναι γεωμετρική πρόοδος με **λόγο λ**, αν και μόνο αν ισχύει:

$$a_{v+1} = a_v \cdot \lambda \quad \text{ή} \quad \frac{a_{v+1}}{a_v} = \lambda$$

Ο $v^{\text{ος}}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ είναι:

$$a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$$

3. Τι ονομάζουμε γεωμετρικό μέσο τριών διαδοχικών αριθμών μιας γεωμετρικής προόδου;

Ο θετικός αριθμός β με $\beta = \sqrt{a \cdot \gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των a και γ .

4. Πότε τρεις αριθμοί αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου;

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

5. Πώς υπολογίζουμε το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής προόδου;

Το άθροισμα των πρώτων n όρων μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

6. Τι ισχύει στην ειδική περίπτωση όπου $\lambda=1$;

Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 1$, τότε το άθροισμα των όρων της προόδου είναι $S_n = n \cdot a_1$, αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με a_1 .



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Δίνεται ακολουθία με τύπο $a_n = -2 \cdot 3^n$. Να αποδείξετε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος και έπειτα να βρείτε τα a_1, λ της προόδου.

Για να αποδείξουμε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος αρκεί να βρούμε ότι ο λόγος των a_{n+1} και a_n είναι σταθερός αριθμός, ανεξάρτητος του n . Έχουμε:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-2 \cdot 3^{n+1}}{-2 \cdot 3^n} = \frac{3^n \cdot 3}{3^n} = 3, \text{ οπότε βρήκαμε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με } \lambda=3.$$

Για τον όρο a_1 έχουμε $a_1 = -2 \cdot 3^1 = -2 \cdot 3 = -6$.

2. Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$, $1 - 2\alpha$, $\alpha + 1$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου, να υπολογίσετε το α .

Για να βρούμε το α θα αξιοποιήσουμε την έννοια του γεωμετρικού μέσου, δηλαδή τη σχέση $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$. Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \alpha \cdot \gamma \\ (1 - 2\alpha)^2 &= (2\alpha - 1)(\alpha + 1) \\ 1 - 4\alpha + 4\alpha^2 &= 2\alpha^2 + 2\alpha - \alpha - 1 \\ 2\alpha^2 - 5\alpha + 2 &= 0\end{aligned}$$

Θα λύσουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση που προέκυψε.

$$2\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} \alpha_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ \alpha_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Συνεπώς βρήκαμε δύο διαφορετικές τιμές για το α , τις $\alpha = 2$ και $\alpha = \frac{1}{2}$.

Θα ελέγξουμε αν οι τιμές που βρήκαμε «δίνουν» όρους γεωμετρικής προόδου.

Για $\alpha = 2$ παίρνουμε: 3, -3, 3 άρα η $\alpha = 2$ είναι δεκτή τιμή.

Για $\alpha = \frac{1}{2}$ παίρνουμε: 0, ..., άρα η $\alpha = \frac{1}{2}$ δεν είναι δεκτή τιμή αφού οι όροι μιας γεωμετρικής προόδου δεν είναι ποτέ μηδέν.

3. Αν γνωρίζουμε ότι $a_1 = 4$ και $\lambda = 2$, να βρείτε το S_{10} .

Θα αξιοποιήσουμε τον τύπο $S_v = a_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1}$.

$$S_v = a_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} \Leftrightarrow S_{10} = a_1 \cdot \frac{\lambda^{10} - 1}{\lambda - 1} = 4 \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 4(2^{10} - 1)$$

4. Αν για μια γεωμετρική πρόοδο έχουμε ότι $a_3 = 5$ και $a_8 = \frac{5}{16}$ να βρείτε τα a_1, λ της γεωμετρικής προόδου.

Θα αξιοποιήσουμε τον τύπο $a_v = a_1 \cdot \lambda^{v-1}$.

$$a_3 = a_1 \cdot \lambda^{3-1} \Rightarrow 5 = a_1 \cdot \lambda^2$$

$$a_5 = a_1 \cdot \lambda^{5-1} \Rightarrow \frac{5}{16} = a_1 \cdot \lambda^4$$

Θα διαιρέσουμε τις δύο ισότητες που προέκυψαν:

$$\frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{5}} = \frac{a_1 \cdot \lambda^2}{a_1 \cdot \lambda^4} \Leftrightarrow \frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{5}} = \frac{\lambda^2}{\lambda^4} \Leftrightarrow \frac{5 \cdot 16}{5} = \lambda^{2-4} \Leftrightarrow 16 = \lambda^{-2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

Πλέον ξέρουμε τον λόγο της γεωμετρικής προόδου οπότε μπορούμε να βρούμε το a_1 αξιοποιώντας το a_3 (ή το a_5).

$$a_3 = a_1 \cdot \lambda^2 \Leftrightarrow 5 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 5 = a_1 \cdot \frac{1}{16} \Leftrightarrow a_1 = 16 \cdot 5 \Leftrightarrow a_1 = 80$$

5. Μια καλλιέργεια βακτηρίων σε ευνοϊκές εργαστηριακές συνθήκες διπλασιάζεται κάθε μία ώρα. Αν στην αρχή έχουμε πληθυσμό 200 βακτηρίων, σε πόσες ώρες θα έχουμε τουλάχιστον 500 πλάσιο πληθυσμό;

Ο πληθυσμός που ψάχνουμε είναι 100.000. Καταλαβαίνουμε ότι ο πληθυσμός των βακτηρίων αυξάνεται με γεωμετρική πρόοδο, με $\lambda=2$ και $a_1=200$.

Θέλουμε ο πληθυσμός να ξεπεράσει τα 100.000, οπότε ψάχνουμε ένα n τέτοιο ώστε $a_v \geq 100.000$



$$a_v \geq 100.000$$

$$a_1 \cdot \lambda^{v-1} \geq 100.000$$

$$200 \cdot 2^{v-1} \geq 100.000$$

$$2^{v-1} \geq \frac{100.000}{200}$$

$$2^{v-1} \geq 500$$

ξέρουμε ότι $2^9 \approx 500$

$$2^{v-1} \geq 2^9$$

$$v-1 \geq 9$$

$$v \geq 10$$

Δηλαδή σε μόλις 10 ώρες ο πληθυσμός των βακτηρίων θα είναι 500πλάσιος.





*βασικές έννοιες των
συναρτήσεων*



1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ορίζουμε ως συνάρτηση;

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία **κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B** .

π.χ. Η συνάρτηση $x \rightarrow x^2$ αντιστοιχίζει κάθε αριθμό x στην τετραγωνική του δύναμη.

2. Τι ονομάζουμε πεδίο ορισμού συνάρτησης;

Το σύνολο A , του οποίου κάθε στοιχείο αντιστοιχίζεται, λέγεται πεδίο ορισμού ή σύνολο ορισμού της $f(x)$.

π.χ. Η συνάρτηση $x \rightarrow \sqrt{x}$ ορίζεται μόνο για μη αρνητικά x , δηλαδή έχει πεδίο ορισμού $A = [0, +\infty)$

3. Πώς συμβολίζουμε μια συνάρτηση;

Αν έχουμε μια συνάρτηση από το A στο B , ώστε κάθε $x \in A$ να αντιστοιχίζεται σε $y \in B$ τότε γράφουμε: $y = f(x)$. Το $f(x)$ λέγεται τιμή της f στο x .

4. Ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή μιας συνάρτησης;

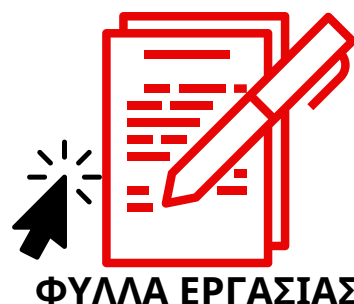
Το γράμμα x , που παριστάνει κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f , ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y , που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x , ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή.

5. Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης;

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και το συμβολίζουμε με $f(A)$

6. Ποια στοιχεία πρέπει να γνωρίζουμε για να ορίσουμε μια συνάρτηση;

- Το πεδίο ορισμού A
- Το σύνολο B
- Το $f(x)$ για κάθε $x \in A$



7. Ποιες συναρτήσεις ονομάζονται πραγματικές;

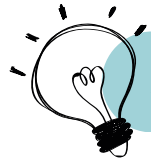
Πραγματικές συναρτήσεις είναι όσες έχουν πραγματική μεταβλητή x και για τις οποίες θεωρούμε ότι:

- Το πεδίο ορισμού A της f είναι το «μεγαλύτερο» από τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα.
- Το σύνολο B είναι όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

8. Τι ονομάζουμε δίκλαδη συνάρτηση;

Μια συνάρτηση με έναν τύπο που έχει κλάδους.

$$\text{π.χ. } f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$



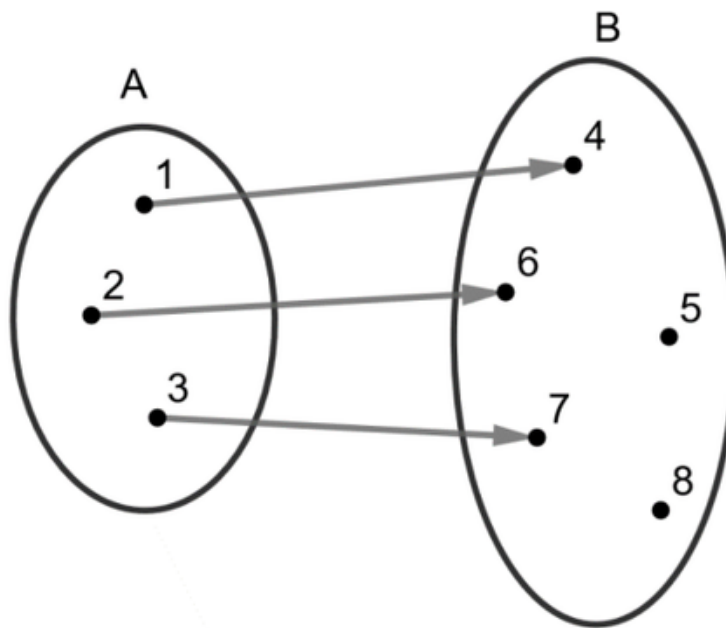
Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

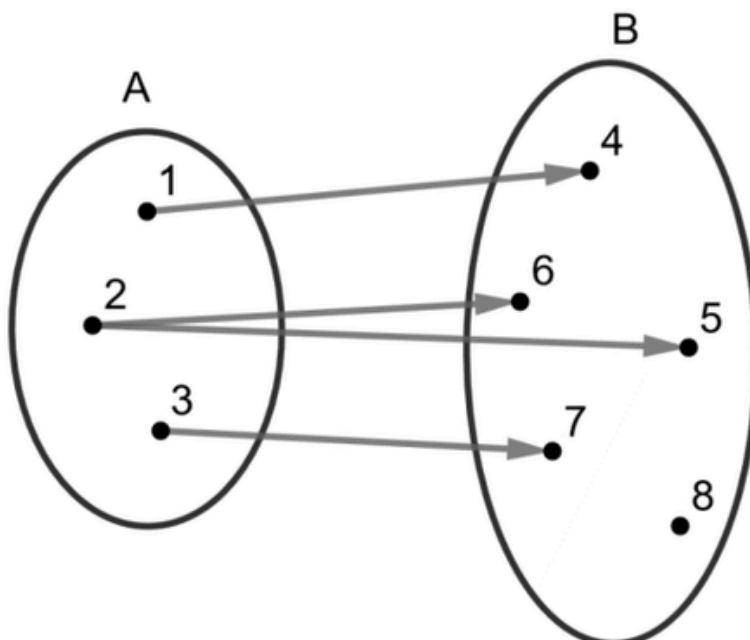
1. Να εξηγήσετε αν τα παρακάτω βελοδιαγράμματα περιγράφουν συναρτήσεις.

Για να ορίζεται μια σχέση ως συνάρτηση πρέπει κάθε στοιχείο του A να αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο του B.

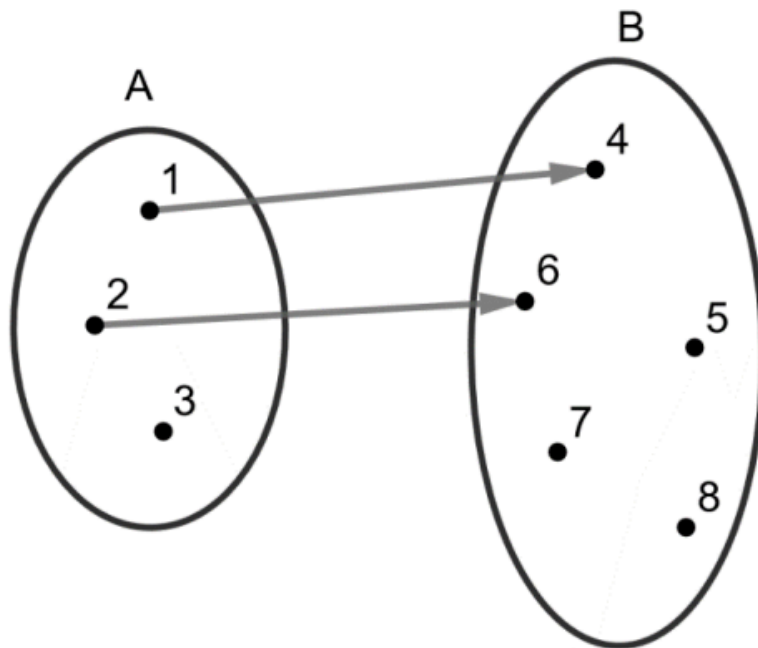


Περιγράφει συνάρτηση αφού όλα τα στοιχεία του A αντιστοιχίζονται με στοιχεία του B.

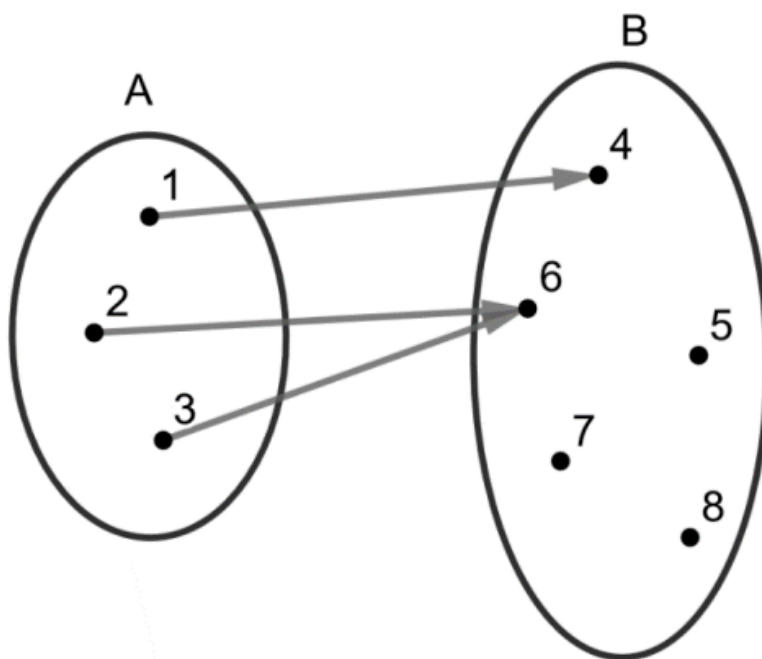
Σχόλιο: Δεν προκύπτει από τον ορισμό ζήτημα αν δεν αντιστοιχίζονται όλα τα σημεία του B.



Δεν περιγράφει συνάρτηση γιατί υπάρχει στοιχείο του A (το 2) που αντιστοιχίζεται με 2 διαφορετικές τιμές του B.



Δεν περιγράφει συνάρτηση γιατί υπάρχει στοιχείο του A (το 3) που δεν αντιστοιχίζεται με καμία τιμή του B.



Περιγράφει συνάρτηση αφού όλα τα στοιχεία του A αντιστοιχίζονται με στοιχεία του B.

Σχόλιο: Δεν προκύπτει από τον ορισμό ζήτημα αν 2 ή παραπάνω στοιχεία του A αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του B.

2. Αν δίνεται ο τύπος της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 4x + 2$, να βρείτε τα $f(0), f(-1), f(2)$

Για να βρούμε συγκεκριμένη τιμή της συνάρτησης αρκεί να αντικαταστήσουμε στη θέση του x το στοιχείο που μας δίνεται.

$$f(x)=x^3 - 4x + 2 \Rightarrow f(0)=0^3 - 4 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$f(x)=x^3 - 4x + 2 \Rightarrow f(-1)=(-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 2 = -1 + 4 + 2 = 5$$

$$f(x)=x^3 - 4x + 2 \Rightarrow f(2)=2^3 - 4 \cdot 2 + 2 = 8 - 8 + 2 = 2$$

Βρήκαμε $f(0)=0, f(-1)=5, f(2)=2$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων.

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού θα σκεφτόμαστε τις περιπτώσεις των συναρτήσεων που έχουμε να διαχειριστούμε.

- Αν η συνάρτηση είναι πολυωνυμικής μορφής (π.χ. $f(x)=x^9 - 3x^5 + \frac{2}{5}x^2 + \sqrt{7}$) τότε έχει πεδίο ορισμού όλους τους αριθμούς και γράφουμε $A = \mathbb{R}$
- Αν η συνάρτηση είναι ρητή (π.χ. $f(x)=\frac{2}{x^2 + 5x - 9} + x - \frac{1}{x}$) τότε έχει πεδίο ορισμού όλους τους αριθμούς που δεν μηδενίζουν τον παρονομαστή. Αν το x_0 μηδενίζει τον παρονομαστή η συνάρτηση θα έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{x_0\}$
- Αν η συνάρτηση έχει υπόρριζη ποσότητα (π.χ. $f(x) = \sqrt{x-1}$) τότε έχει πεδίο ορισμού όλους τους αριθμούς που «κάνουν» την υπόρριζη ποσότητα θετική ή μηδέν.

1. $f(x)=\frac{1}{x^2 - 1}$: Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει να απορρίψουμε όλα τα x για τα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής της συνάρτησης.

Παίρνουμε ότι $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$. Οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι

$$A = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

2. $g(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$: Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει να απορρίψουμε όλα τα x για τα οποία η υπόρριζη ποσότητα γίνεται αρνητική.

$$\begin{aligned}\text{Παίρνουμε } x^2 - 5x + 6 &\geq 0 \\ (x-2)(x-3) &\geq 0 \\ x &\in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)\end{aligned}$$

Οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

4. Για $f(x)=x^2-2x-4$ να βρείτε τα $x \in A$ τέτοια ώστε $f(x)=-1$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\text{Παίρνουμε: } f(x) &= -1 \\ x^2 - 2x - 4 &= -1 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0\end{aligned}$$

Θα λύσουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση που προέκυψε.

Βρίσκουμε $(x+1)(x-3)=0 \Rightarrow x=-1$ ή $x=3$. Οπότε $f(-1)=f(3)=-1$

5. Για $f(x)=\frac{3x-3}{x^2-x}$ να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$\text{Από τον τύπο της } f \text{ παίρνουμε } f(x) = \frac{3x-3}{x^2-x} = \frac{3(x-1)}{x(x-1)} = \frac{3}{x} \text{ και } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Όμως η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ οπότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

6. Να βρείτε τα α, β της συνάρτησης $g(x)=ax^2+\beta x+5$, αν γνωρίζετε ότι $g(1)=5$ και $g(-1)=7$

$$g(x)=ax^2+\beta x+5$$

$$g(1)=5$$

$$\alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 + 5 = 5$$

$$\alpha + \beta = 0$$

και

$$g(x)=ax^2+\beta x+5$$

$$g(-1)=7$$

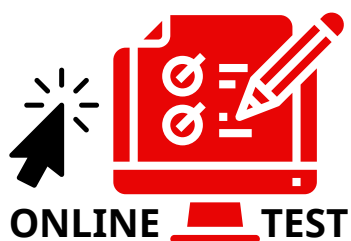
$$\alpha \cdot (-1)^2 + \beta \cdot (-1) + 5 = 7$$

$$\alpha - \beta = 2$$

Θα λύσουμε το σύστημα που εμφανίστηκε αφού αντικαταστήσαμε τις τιμές στη συνάρτηση.

$$\begin{array}{l} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha = 2 \\ \alpha - \beta = 2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ 1 - \beta = 2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{array} \right.$$

Οπότε η συνάρτηση έχει τον τύπο $g(x) = x^2 - x + 5$

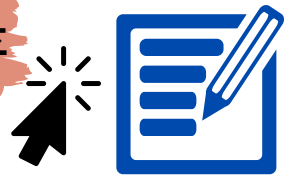




Ενότητα 6η - Άλγεβρα Α' Λυκείου - ΘΕΩΡΙΑ



2. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε συντεταγμένες ενός σημείου;

Σε κάθε σημείο M του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως, σε κάθε ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο M του επιπέδου.

Οι αριθμοί α, β λέγονται συντεταγμένες του M . Ειδικότερα ο α λέγεται **τετμημένη** και ο β **τεταγμένη** του σημείου M . Συμβολίζουμε $M(\alpha, \beta)$.

2. Πώς βρίσκουμε την απόσταση δυο σημείων;

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο με σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ η απόστασή (AB) δίνεται από τον τύπο: $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A . Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x)), x \in A$ λέγεται **γραφική παράσταση** της $f(x)$ και συμβολίζεται συνήθως με C_f .



Λυμένα Παραδείγματα



1. Δίνεται σημείο $A(2\alpha - 4, 3\alpha + 6)$. Να βρείτε το α ώστε το σημείο A :

- ανήκει στον άξονα $x'x$
- ανήκει στον άξονα $y'y$.

Για να ανήκει στον άξονα $x'x$ πρέπει η τεταγμένη $3\alpha + 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$.

Για να ανήκει στον άξονα $y'y$ πρέπει η τετμημένη $2\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

2. Δίνεται σημείο $K(\alpha, \beta)$.

- Για να είναι σημείο στο 1ο τεταρτημόριο πρέπει: $\alpha > 0$ και $\beta > 0$
- Για να είναι σημείο στο 2ο τεταρτημόριο πρέπει: $\alpha < 0$ και $\beta > 0$
- Για να είναι σημείο στο 3ο τεταρτημόριο πρέπει: $\alpha < 0$ και $\beta < 0$
- Για να είναι σημείο στο 4ο τεταρτημόριο πρέπει: $\alpha > 0$ και $\beta < 0$

3. Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(0,4)$ και $B(-1,2)$ ανήκουν στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x-4}{x-1}$.

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

Για να ανήκει το σημείο $A(0,4)$ στην $f(x)$ αρκεί $f(0) = 4 \Rightarrow \frac{2 \cdot 0 - 4}{0 - 1} = \frac{-4}{-1} = 4$ άρα το σημείο $A(0,4)$ ανήκει στην $f(x)$.

Για να ανήκει το σημείο $B(-1,2)$ στην $f(x)$ αρκεί $f(-1) = 2 \Rightarrow \frac{2 \cdot (-1) - 4}{-1 - 1} = \frac{-2 - 4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \neq 2$ άρα το σημείο $B(-1,2)$ δεν ανήκει στην $f(x)$.

4. Αν η γραφική παράσταση της $f(x)=x^2+kx-3k$ διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$, να βρείτε το k .

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.

Αφού η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$ θα ισχύει ότι $f(1)=3$.

$$f(x)=x^2+kx-3k$$

$$f(1)=1^2+k \cdot 1-3k$$

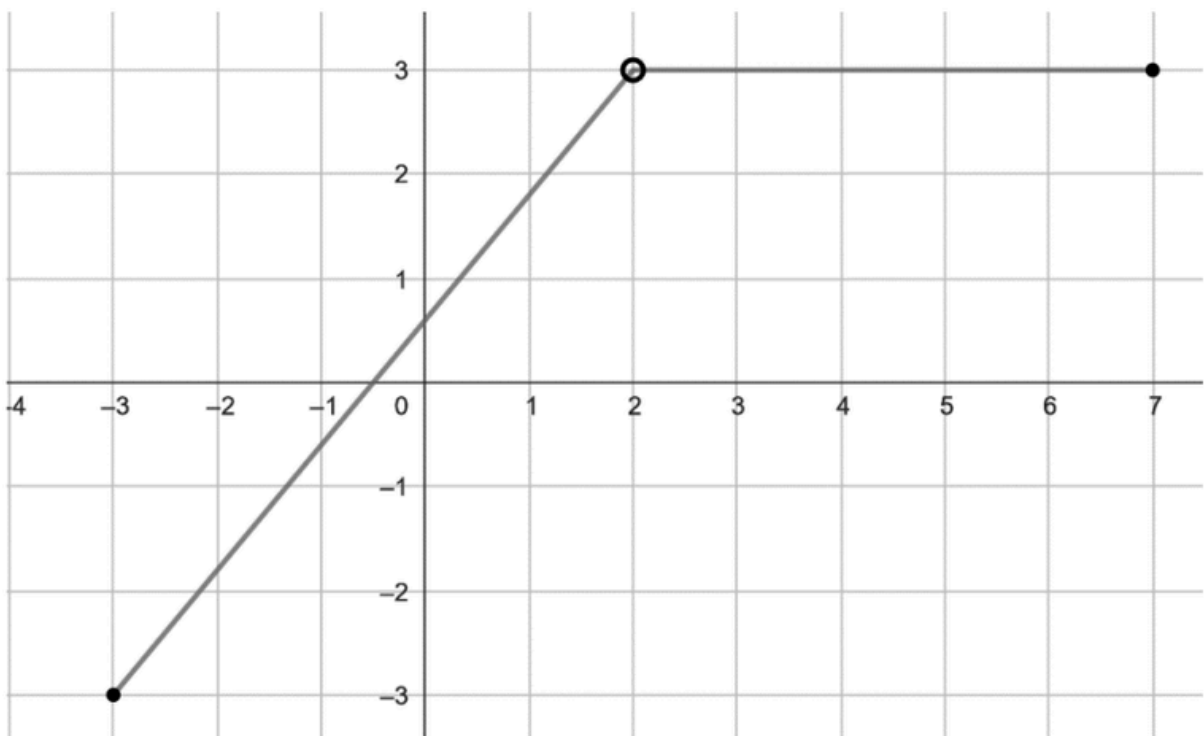
$$3=1+k-3k$$

$$2=-2k$$

$$k=-1$$

Συνεπώς $k=-1$ και $f(x)=x^2-x+3$

5. Μελετώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης, να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.



Για να βρούμε το πεδίο ορισμού αρκεί να βρούμε για ποια x παίρνει τιμή η γραφική παράσταση. Παρατηρούμε ότι $A = [-3, 2) \cup (2, 7]$.

Αφαιρέσαμε το 2 από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης γιατί η γραφική παράσταση έχει «κενό» για $x=2$.

Για να βρούμε το σύνολο τιμών αρκεί να βρούμε ποιες τιμές παίρνει η γραφική παράσταση στα y . Βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών B της γραφικής παράστασης είναι $B = [-3, 3]$.

6. Να βρείτε τα κοινά σημεία της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x - 3$ με τους άξονες.

Το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $A(0, f(0))$.

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 \Rightarrow f(0) = -3, \text{ οπότε έχουμε } A(0, -3).$$

Τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ είναι τα σημεία της μορφής $B(\beta, 0)$. Δηλαδή πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0, \text{ οπότε έχουμε τα σημεία } B(-1, 0) \text{ και } \Gamma(3, 0).$$

7. Να βρείτε τις σχετικές θέσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3x - 6$ σε σχέση με τον άξονα $x'x$.

Οι σχετικές θέσεις μιας συνάρτησης σε σχέση με τον άξονα $x'x$ είναι 2. Για κάθε συνάρτηση έχουμε τις επιλογές:

- Η συνάρτηση $f(x)$ είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ δηλαδή $f(x) > 0$.
- Η συνάρτηση $f(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$ δηλαδή $f(x) < 0$.

Για την $f(x) = 3x - 6$ παίρνουμε:

$$f(x) > 0 \Rightarrow 3x - 6 > 0 \Rightarrow x > 2$$

Δηλαδή για $x \in (2, +\infty)$ η συνάρτηση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ ενώ για $x \in (-\infty, 2)$ η συνάρτηση είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

8. Να βρείτε τις σχετικές θέσεις της συνάρτησης $f(x)=x^2$ σε σχέση με την συνάρτηση $g(x)=5x-6$.

Για τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων έχουμε:

$$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)>g(x) \\ f(x)<g(x) \end{cases}$$

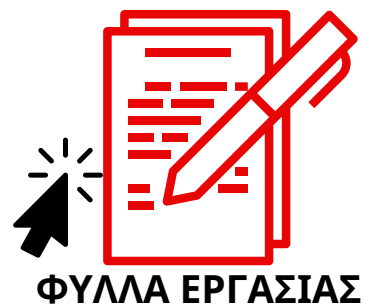
δηλαδή για δυο γραφικές παραστάσεις τα ενδεχόμενα είναι:

- να τέμνονται – να έχουν κοινά σημεία
- η μία να είναι πάνω από την άλλη
- η μία να είναι κάτω από την άλλη

Για τις συναρτήσεις της άσκησης θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 &= 5x - 6 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x - 2)(x - 3) &= 0 \\ x &= 2 \text{ ή } x = 3 \end{aligned}$$

Οπότε οι συναρτήσεις τέμνονται στα σημεία (2,4) και (3,9).



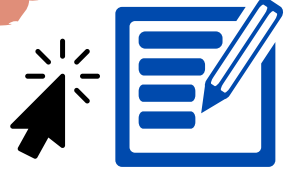
→ Η συνάρτηση f είναι πάνω από τη συνάρτηση g , δηλαδή $f(x)>g(x)$ για $x^2 - 5x + 6 > 0$
δηλαδή για $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

→ Η συνάρτηση f είναι κάτω από τη συνάρτηση g , δηλαδή $f(x)<g(x)$ για $x^2 - 5x + 6 < 0$
δηλαδή για $x \in (2, 3)$





3. Η συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

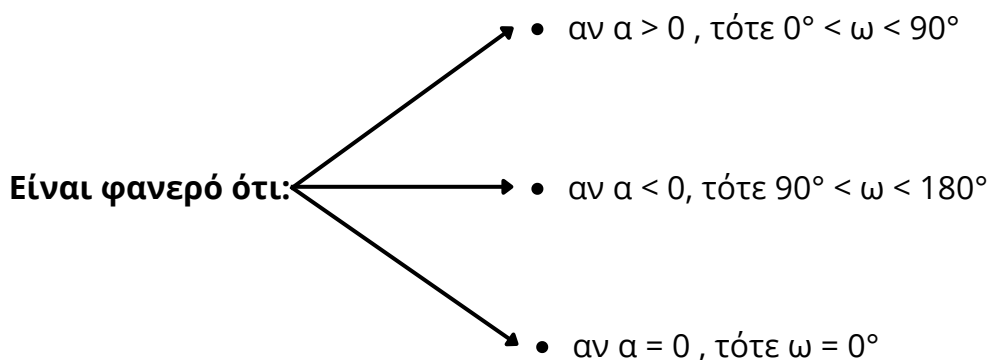
1. Πώς ορίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ;

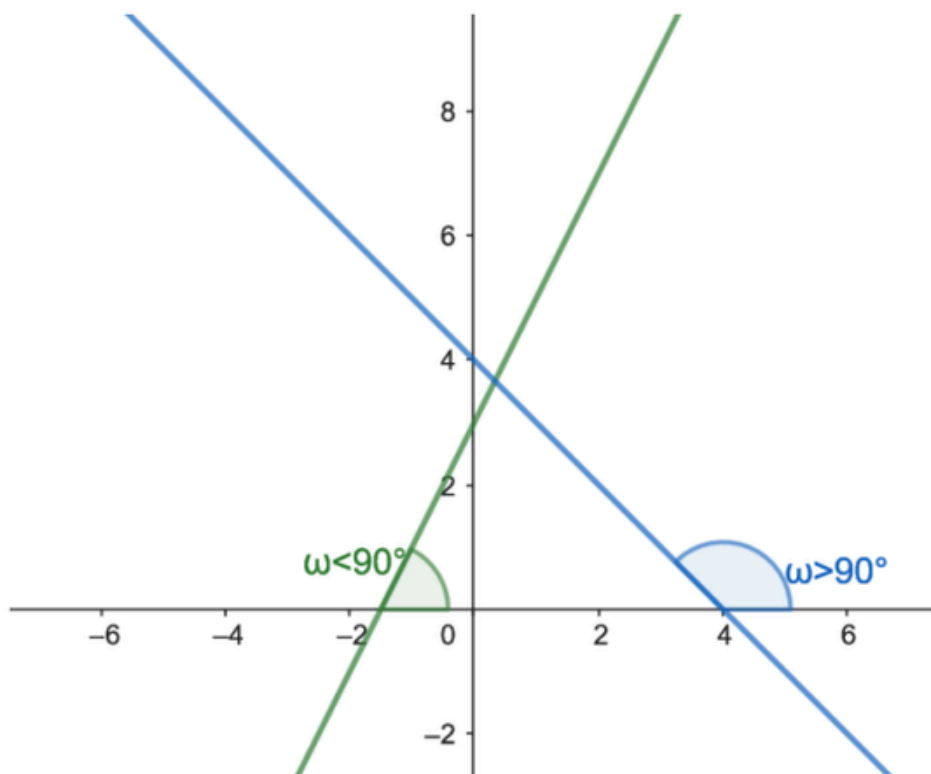
Ως συντελεστή διεύθυνσης ή ως κλίση μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι:

- θετικός, αν η γωνία ω είναι οξεία.
- αρνητικός, αν η γωνία ω είναι αμβλεία.
- μηδέν, αν η γωνία ω είναι μηδέν.
- αν η γωνία ω είναι ίση με 90° , δηλαδή όταν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης.

2. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax+\beta$;

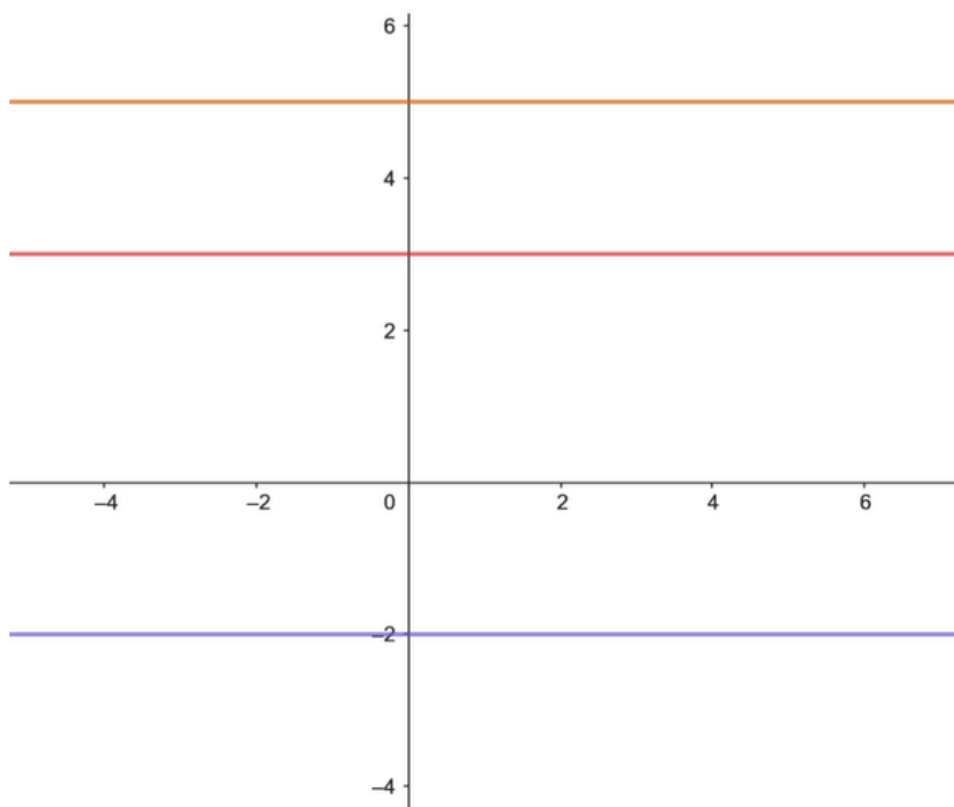
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax+\beta$ είναι μία ευθεία, με εξίσωση $y=ax+\beta$, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $B(0,\beta)$ και έχει κλίση $\lambda=a$.





3. Ποια συνάρτηση ονομάζουμε σταθερή;

Η συνάρτησης της μορφής $f(x)=\beta$ λέγεται **σταθερή συνάρτηση**, διότι η τιμή της είναι η ίδια για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

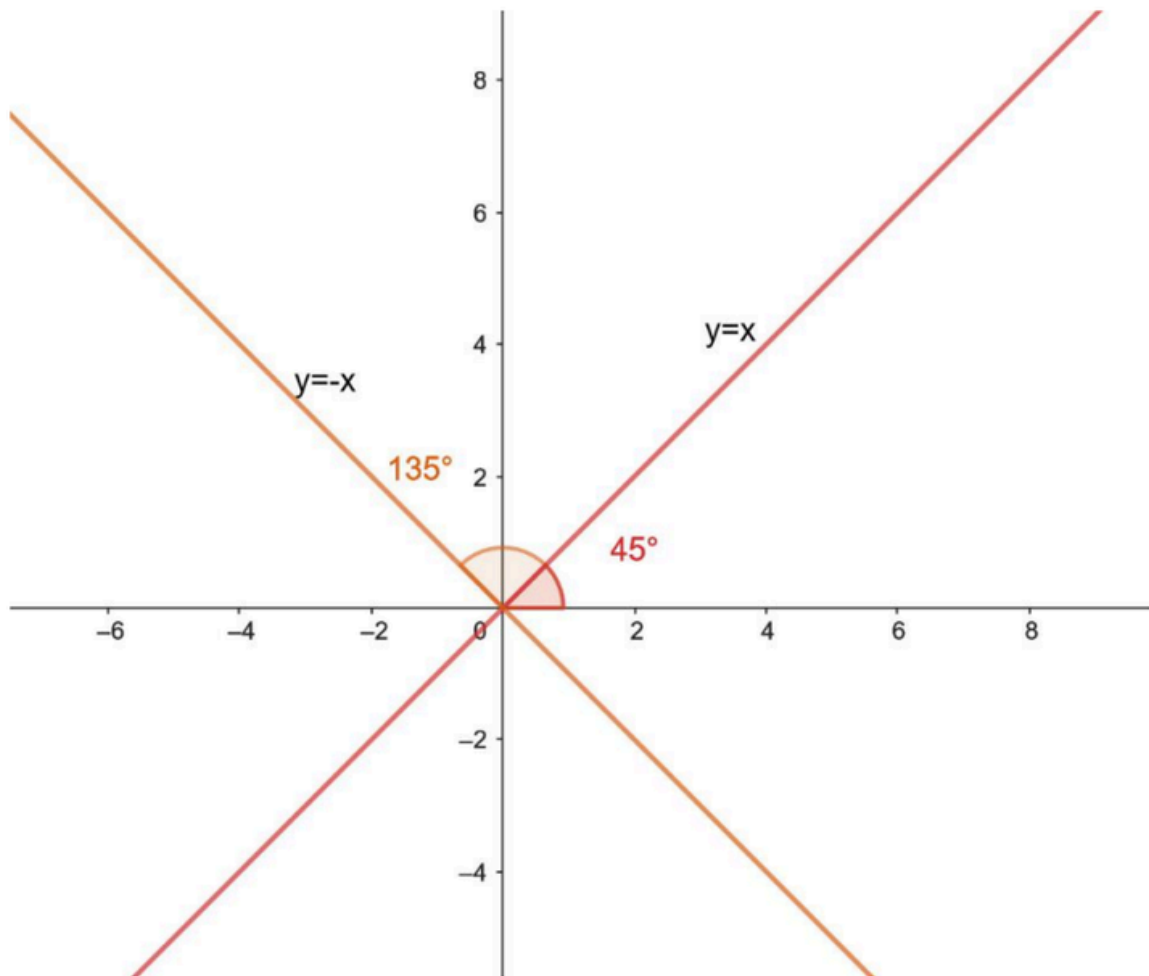


4. Τι χαρακτηριστικά έχει η συνάρτηση $f(x)=ax$;

Η γραφική παράσταση της $f(x)=ax$ είναι η ευθεία $y=ax$ και περνάει από την αρχή των αξόνων.

Ειδικότερα:

- Για $a = 1$ έχουμε την ευθεία $y=x$. Για τη γωνία ω , που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$ ισχύει $\epsilon\varphi\omega = a = 1$, δηλαδή $\omega = 45^\circ$. Επομένως η ευθεία $y=x$ είναι διχοτόμος των γωνιών των αξόνων.
- Για $a = -1$ έχουμε την ευθεία $y=-x$. Για τη γωνία ω , που σχηματίζει η ευθεία αυτή με τον άξονα $x'x$, ισχύει $\epsilon\varphi\omega = a = -1$, δηλαδή $\omega = 135^\circ$. Επομένως η ευθεία $y=-x$ είναι διχοτόμος των γωνιών των αξόνων.



5. Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών;

Θεωρούμε δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις $y = a_1x + \beta_1$ και $y = a_2x + \beta_2$ αντιστοίχως οι οποίες σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνίες ω_1 και ω_2 αντιστοίχως. Τότε:

- Αν $a_1 = a_2$, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2$ οπότε $\omega_1 = \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.

Ειδικότερα :

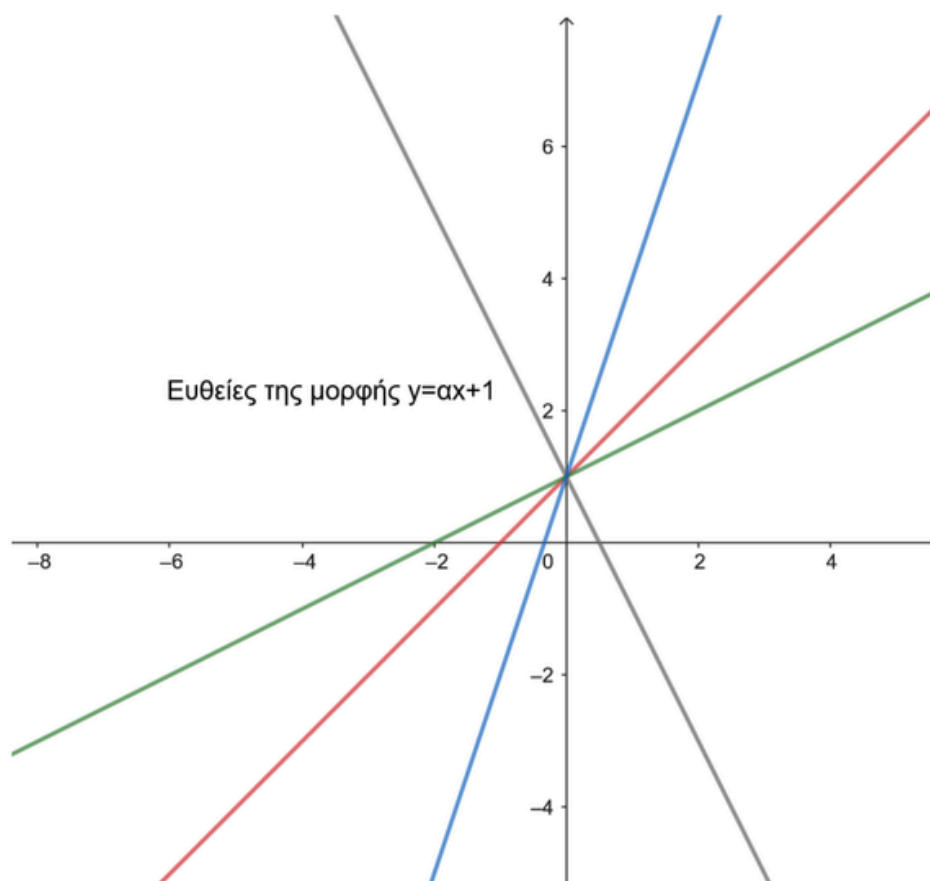
Αν $a_1 = a_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.

Αν $a_1 = a_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

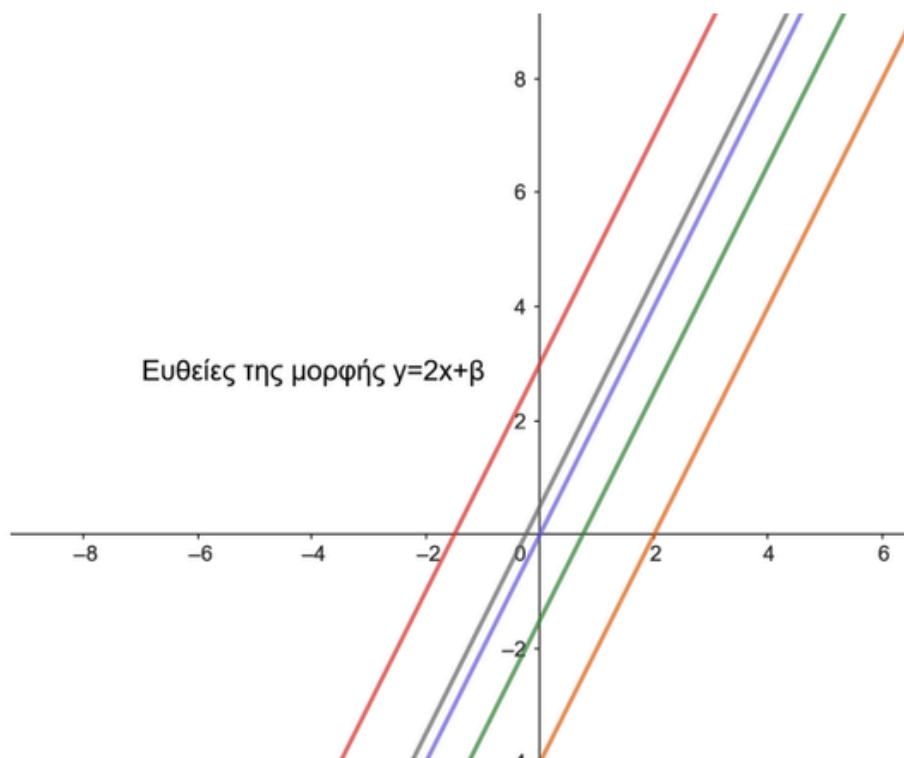
- Αν $a_1 \neq a_2$, τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 \neq \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1 \neq \omega_2$, άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται.

6. Τι συμπεράσματα βγαίνουν για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = ax + \beta$;

Οι ευθείες της μορφής $y = ax + \beta$, όπου **β σταθερό και a μεταβλητό** διέρχονται όλες από το σημείο β του άξονα $y'y$.



Οι ευθείες της μορφής $y=ax+\beta$, όπου **α σταθερό και β μεταβλητό**, είναι όλες παράλληλες μεταξύ τους.



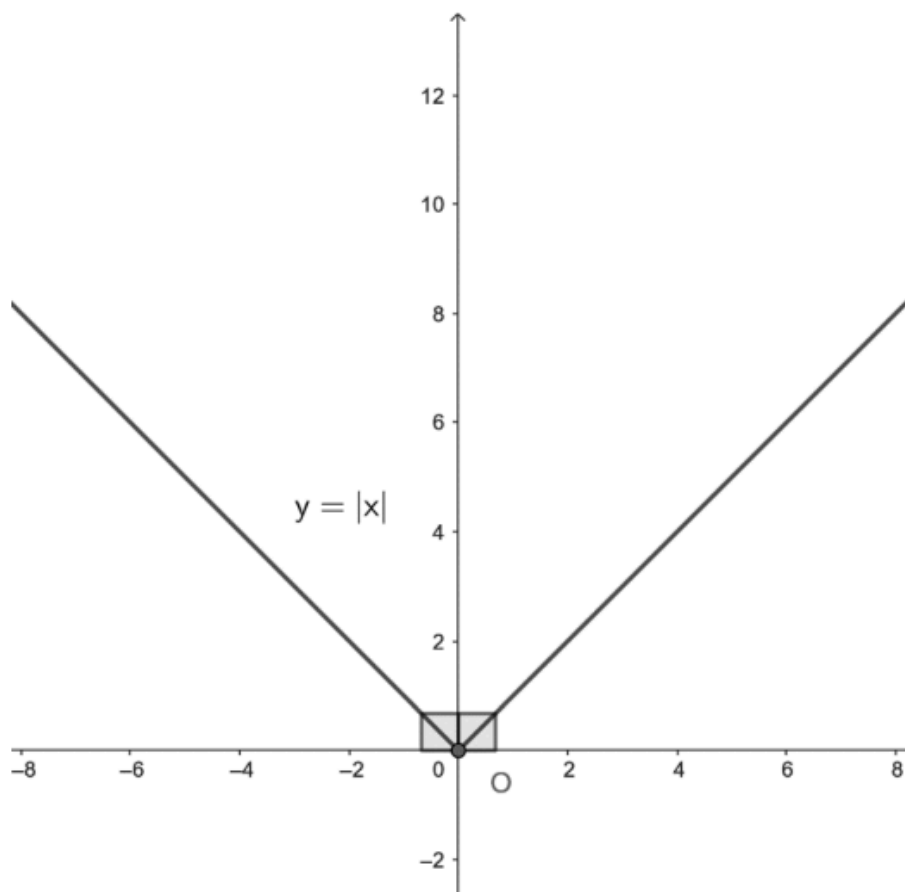
7. Τι γνωρίζουμε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x|$;

$$f(x)=|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x|$ αποτελείται από τις δύο ημιευθείες:

- $y = -x$, με $x < 0$ και
- $y = x$, με $x \geq 0$

που διχοτομούν τις γωνίες $x'Oy$ και xOy αντιστοίχως.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να βρείτε την κλίση της ευθείας με εξίσωση $2x + 3y - 4 = 0$

Για να βρούμε την κλίση της ευθείας αρκεί να την γράψουμε σε μορφή $y = ax + b$.

$$\text{Παίρνουμε } 2x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow 3y = -2x + 4 \Rightarrow y = \frac{-2x + 4}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$\text{Οπότε η κλίση της ευθείας είναι } a = -\frac{2}{3}$$

2. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία $y = (3\lambda - 4)x + 3$ να έχει κλίση $a = 2$.

$$\text{Πρέπει } 3\lambda - 4 = 2 \Rightarrow 3\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 2$$

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$ και έχει κλίση $\alpha = -1$.

Η γενική εξίσωση της ευθείας είναι $y = \alpha x + \beta$. Αφού κλίση $\alpha = -1$ παίρνουμε $y = -x + \beta$.

Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$ παίρνουμε $y = -x + \beta \Rightarrow 2 = -2 + \beta \Rightarrow \beta = 4$

Συνεπώς η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -x + 4$.

4. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ ώστε οι ευθείες $\begin{cases} y = |3\lambda + 2|x \\ y = 4x - 3 \end{cases}$ να είναι παράλληλες.

Για να έχουμε παράλληλες ευθείες αρκεί να έχουμε ευθείες με ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή $\alpha_1 = \alpha_2$.

Παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 \\ |3\lambda + 2| &= 4 \\ 3\lambda + 2 &= 4 \quad \text{ή} \quad 3\lambda + 2 = -4 \\ 3\lambda &= 2 \quad \text{ή} \quad 3\lambda = -6 \\ \lambda &= \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad \lambda = -\frac{6}{3} = -2 \end{aligned}$$



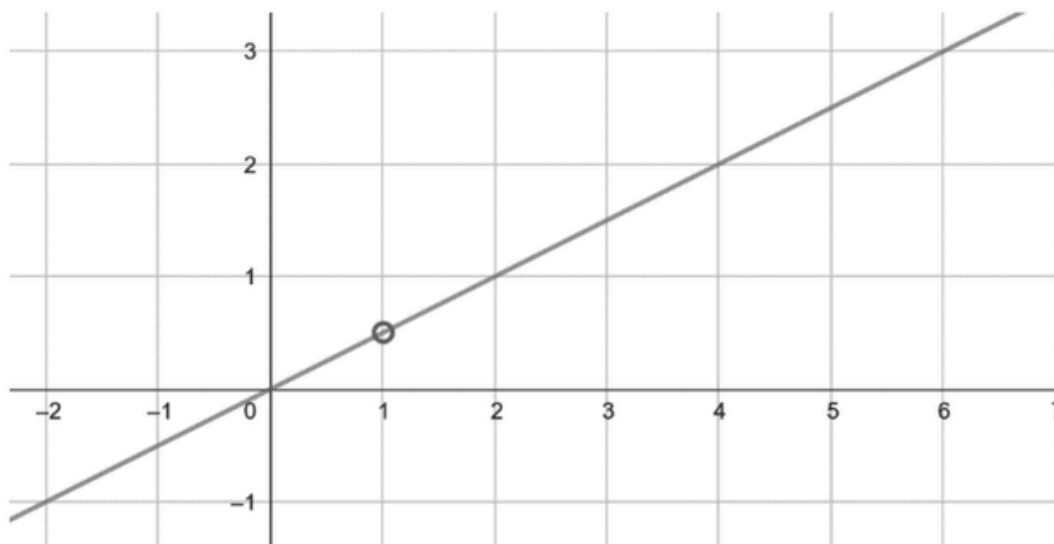
Δηλαδή οι ευθείες είναι παράλληλες για $\lambda = \frac{2}{3}$ ή $\lambda = -2$

5. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - x}{2x - 2}$

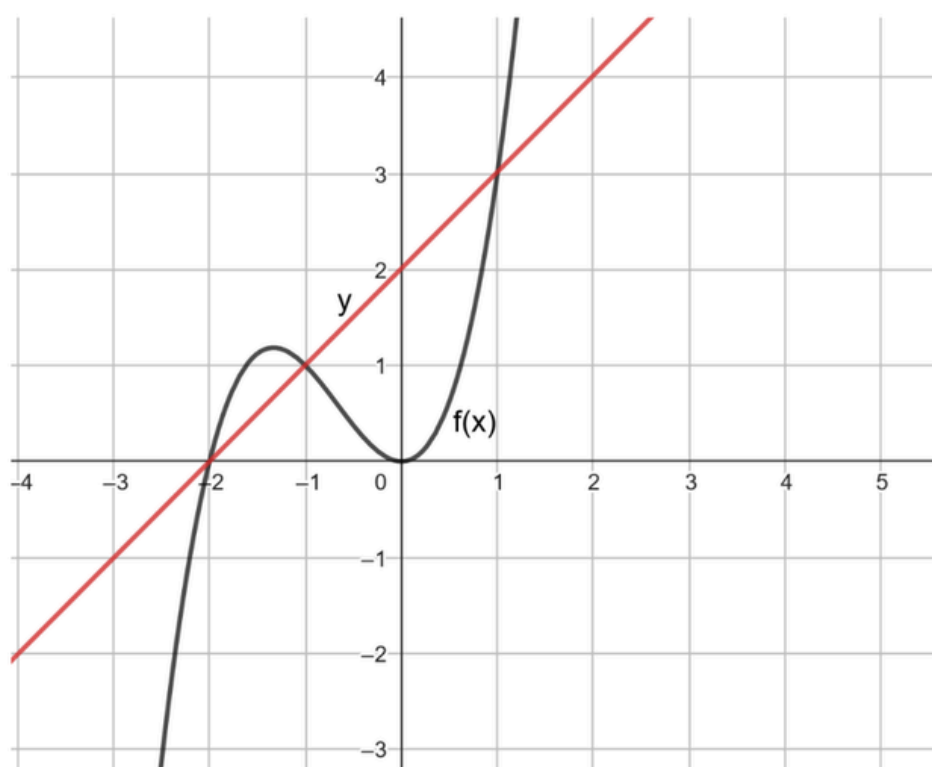
Η συνάρτηση $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{1\}$

Παίρνουμε $f(x) = \frac{x^2 - x}{2x - 2} = \frac{x(x-1)}{2(x-1)} = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της $f(x)$ είναι μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = \frac{1}{2}$, η οποία δεν διέρχεται από το σημείο με τετμημένη $x=1$.



6. Μελετώντας τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις να βρείτε για ποια x έχουμε $y=f(x)$ και $y>f(x)$



Παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται σε τρία διαφορετικά σημεία, τα $(2,0)$, $(-1, 1)$ και $(1,3)$. Άρα $y=f(x)$ για $x=-2$, $x=-1$ και $x=1$.

Η y είναι πάνω από την $f(x)$ για $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1)$.



ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΚΔΟΣΗΣ:
Πρόδρομος Μιχαλάκης

© ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΛΥΣΑΡΙ | LISARI.GR
& Πρόδρομος Μιχαλάκης



Πανόρμου 14 & Σμύρνης,
12242, Αιγάλεω
τηλ.: 210 5982 614
e-mail: info@lisari.gr
www.lisari.gr

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται από τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και από τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η χωρίς γραπτή άδεια του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή οποιοδήποτε μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

