

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ



Διαδραστικό Βοήθημα

Θεωρία - VideoΜαθήματα - Ασκήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 :Συστήματα

1.1 Γραμμικά Συστήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Ιδιότητες Συναρτήσεων

2.1 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης

2.2 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Τριγωνομετρία

3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

3.3 Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

3.5 Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Πολυώνυμα-Πολυωνυμικές Εξισώσεις

4.1 Πολυώνυμα

4.2 Διαίρεση Πολυωνύμων

4.3 Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

4.4 Εξισώσεις και Ανισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνυμικές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

5.2 Λογάριθμοι

1

συστήματα



1.1 Γραμμικά συστήματα

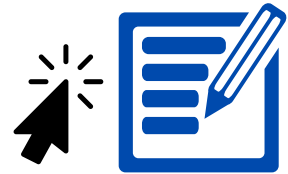
1. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση;

Κάθε εξίσωση με δύο αγνώστους (x,y) της μορφής $ax+by=\gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ ονομάζεται γραμμική εξίσωση. Κάθε γραμμική εξίσωση παριστάνει μια ευθεία γραμμή.

2. Τι ονομάζουμε σύστημα 2 γραμμικών εξισώσεων;

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων είναι το σύστημα:

$$\begin{aligned} ax+by &= \gamma \\ a'x+b'y &= \gamma' \end{aligned}$$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Δηλαδή το σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

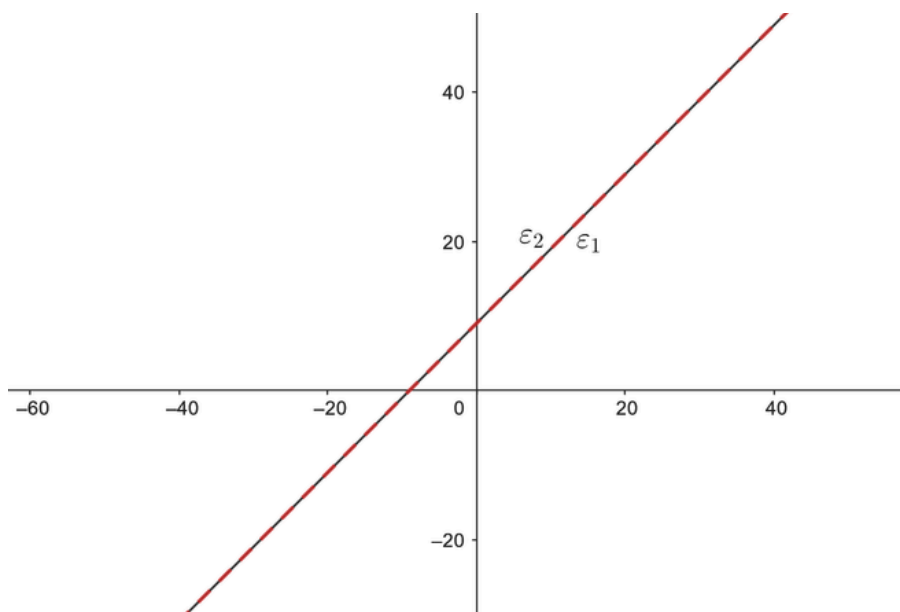
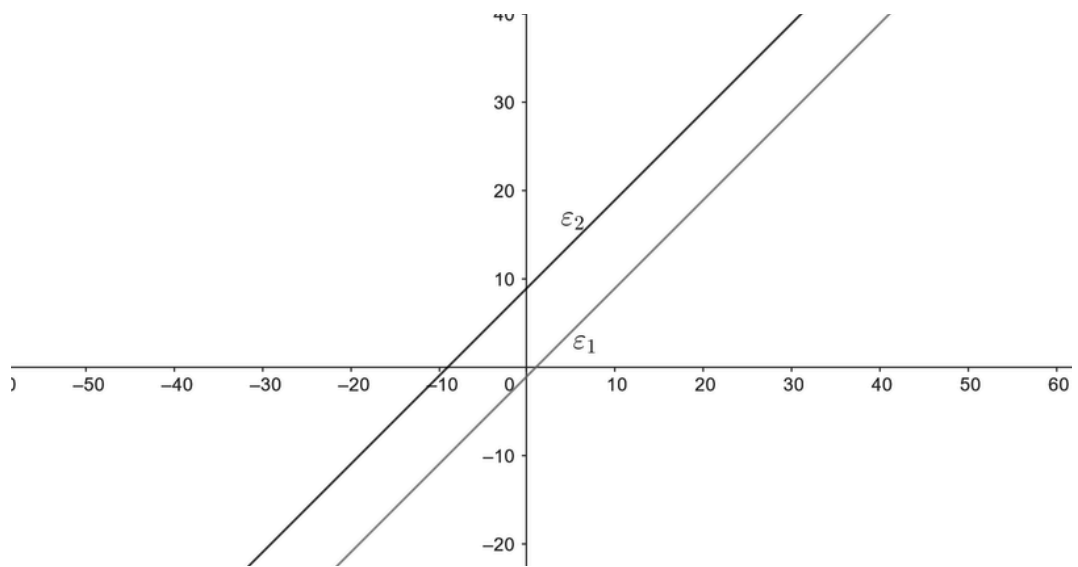
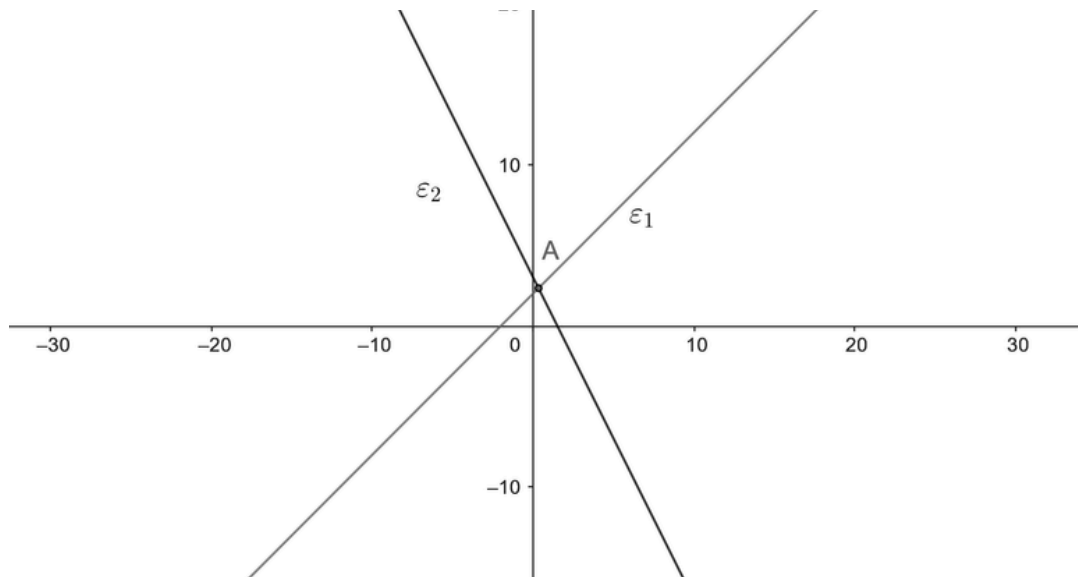
3. Ποια είναι λύση ενός συστήματος;

Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος ονομάζεται λύση του συστήματος.

4. Πώς μπορούμε να επιλύσουμε ένα γραμμικό σύστημα;

α. Με γραφική επίλυση: Για να λύσουμε γραφικά ένα σύστημα πρέπει να σχεδιάσουμε τις δυο ευθείες σε κοινό σύστημα αξόνων και να εξετάσουμε την θέση τους.

- Αν οι δύο ευθείες τέμνονται τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση, τις συντεταγμένες του σημείου τομής.
- Αν οι δύο ευθείες είναι παράλληλες τότε το σύστημα είναι αδύνατο, δηλαδή δεν έχει λύση.
- Αν οι δύο ευθείες συμπίπτουν (ταυτίζονται) τότε το σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.



β. Με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς τον έναν άγνωστο.
- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

$$\left. \begin{array}{l} x+y=4 \\ 5x-y=2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=4-x \\ 5x-y=2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=4-x \\ 5x-(4-x)=2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y=4-x \\ 5x-4+x=2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=4-x \\ 6x=2+4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=4-x \\ 6x=6 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y=4-x \\ x=\frac{6}{6}=1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=4-1 \\ x=1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=3 \\ x=1 \end{array} \right\} (x, y) = (1, 3)$$

Για το σύστημα βρήκαμε ότι έχει λύση $(x, y) = (1, 3)$.

γ. Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σε έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε.
- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.
- Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 2y = 6 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 3x + 4x + 2y - 2y = 6 + 8 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ 7x = 14 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 8 \\ x = \frac{14}{7} = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 2 + 2y = 8 \\ x = 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 6 + 2y = 8 \\ x = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2y = 2 \\ x = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2 \end{array} \right\} (x, y) = (2, 1)$$

5. Τι σημαίνει επαλήθευση της λύσης ενός συστήματος;

Για να επιβεβαιώσουμε ότι έχουμε λύσει σωστά το σύστημα εξετάζουμε αν το ζευγάρι των αριθμών που βρήκαμε επαληθεύει τις αρχικές εξισώσεις.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να σχεδιάσετε και στη συνέχεια να βρείτε τη λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$$

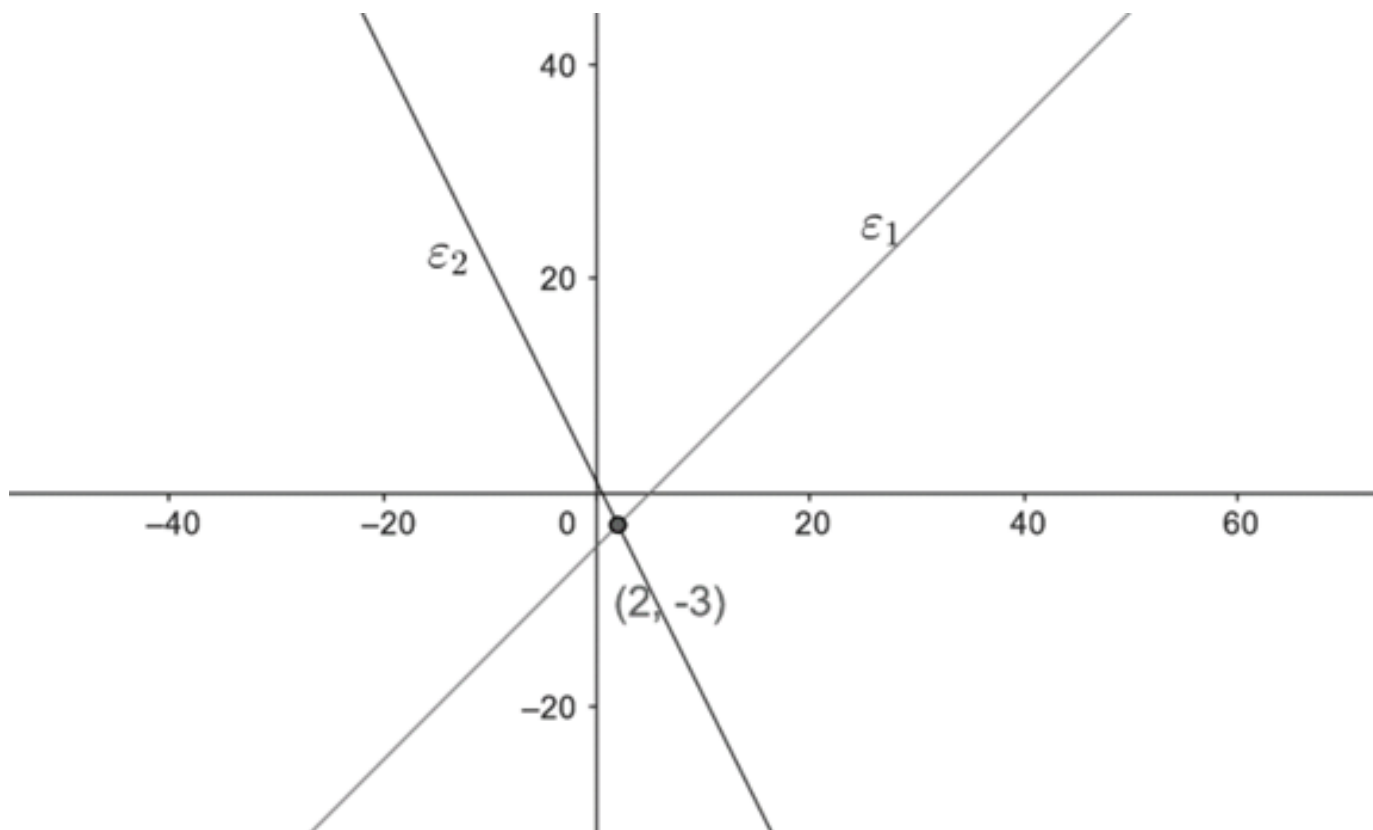
Για να σχεδιάσουμε τις δύο ευθείες:

Για την : $x - y = 5$

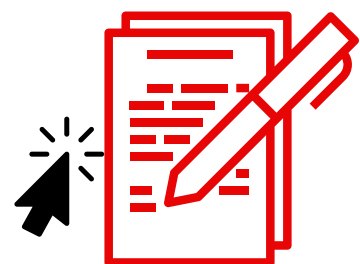
- όταν $x=0$ παίρνουμε $y=-5$ δηλαδή το σημείο $A(0, -5)$
- όταν $y=0$ παίρνουμε $x=5$ δηλαδή το σημείο $B(5, 0)$

Για την : $2x + y = 1$

- όταν $x=0$ παίρνουμε $y=1$ δηλαδή το σημείο $\Gamma(0, 1)$
- όταν $y=0$ παίρνουμε $x=\frac{1}{2}$ δηλαδή το σημείο $\Delta(\frac{1}{2}, 0)$



Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες έχουν σημείο τομής το $E(2,-3)$, άρα η λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(2,-3)$.



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

2. Να λυθεί το σύστημα με τις δύο αλγεβρικές μεθόδους:

$$3x - y = 5$$

$$2x - 3y = 1$$

- Με τη μέθοδο αντικατάστασης:

$$\left. \begin{array}{l} 3x-y=5 \\ 2x-3y=1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=3x-5 \\ 2x-3y=1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=3x-5 \\ 2x-3(3x-5)=1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y=3x-5 \\ 2x-9x+15=1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=3x-5 \\ -7x=-14 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=3x-5 \\ x=2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y=3 \cdot 2-5 \\ x=2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=1 \\ x=2 \end{array} \right\} (x, y) = (2, 1)$$

- Με τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών:

$$\left. \begin{array}{l} 3x-y=5 \\ 2x-3y=1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -9x+3y=-15 \\ 2x-3y=1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x-3y=1 \\ 2x-9x+3y-3y=-15+1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x-3y=1 \\ -7x=-14 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x-3y=1 \\ x=\frac{-14}{-7}=2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x-3y=1 \\ x=2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 2-3y=1 \\ x=2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -3y=1-4 \\ x=2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y=1 \\ x=2 \end{array} \right\} (x, y) = (2, 1)$$

3. Σε ένα παιχνίδι κάθε σωστή απάντηση δίνει 3 πόντους στον παίκτη και κάθε λάθος απάντηση του αφαιρεί έναν πόντο. Αν συνολικά γίνονται 50 ερωτήσεις και ο παίκτης έχει συγκεντρώσει 46 πόντους, πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και πόσες λάθος;

Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα θα πρέπει να δημιουργήσουμε ένα σύστημα που ανταποκρίνεται στα δεδομένα της εκφώνησης.

Υποθέτουμε ότι x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων και y το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων.

Αφού συνολικά είναι 50 ερωτήσεις προκύπτει ότι $x+y=50$

Αφού ο παίκτης έχει συγκεντρώσει 46 πόντους προκύπτει ότι $3x-y=46$

Συνεπώς έχουμε να λύσουμε το σύστημα: $x+y=50$

$$3x - y = 46$$

$$\left. \begin{array}{l} x+y=50 \\ 3x-y=46 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x+y=50 \\ 3x+x+y-y=50+46 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x+y=50 \\ 4x=96 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x+y=50 \\ x=\frac{96}{4}=24 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 24+y=50 \\ x=24 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y=26 \\ x=24 \end{array} \right. \Rightarrow (x, y) = (24, 26)$$

Δηλαδή ο παίκτης απάντησε σωστά σε 24 ερωτήσεις και λάθος σε 26. Για να είμαστε σίγουροι ότι έχουμε λύσει το σύστημα σωστά θα κάνουμε αντικατάσταση στις αρχικές εξισώσεις το ζεύγος των αριθμών που προέκυψε.

$$\left. \begin{array}{l} x+y=50 \\ 3x-y=46 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 26+24=50 \\ 3 \cdot 24-26=46 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 50=50 \\ 72-26=46 \end{array} \right|$$

Οι τιμές επαληθεύουν το σύστημα άρα είναι σωστή η λύση του συστήματος



2

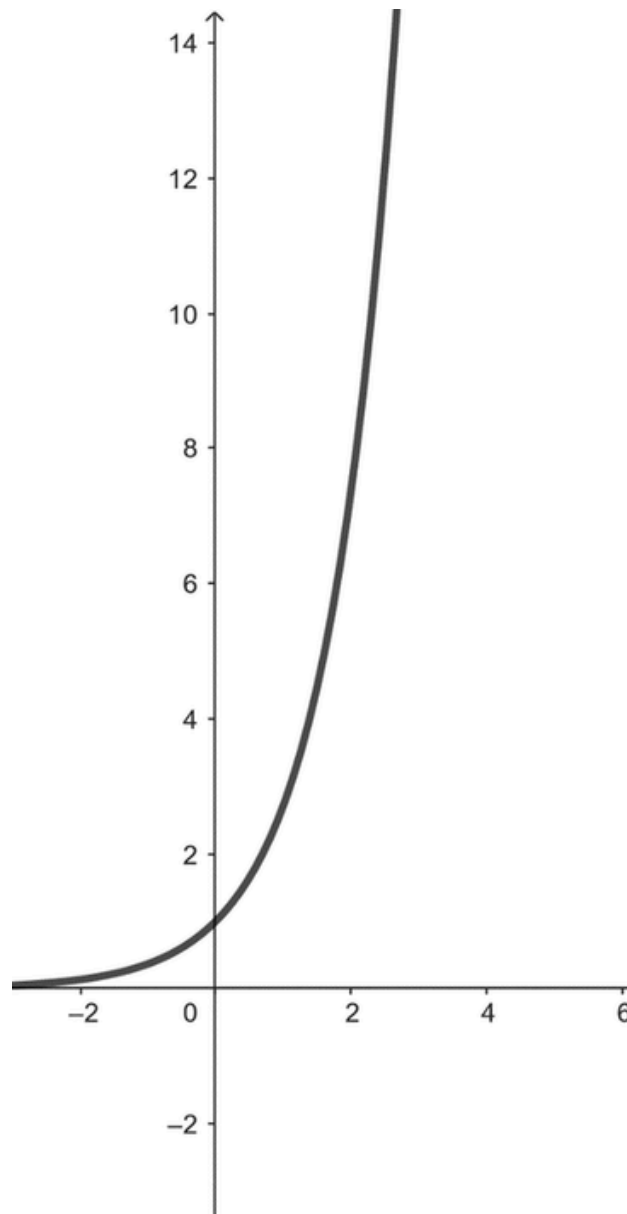
ιδιότητες συναρτήσεων



1. Ιδιότητες συναρτήσεων

1. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

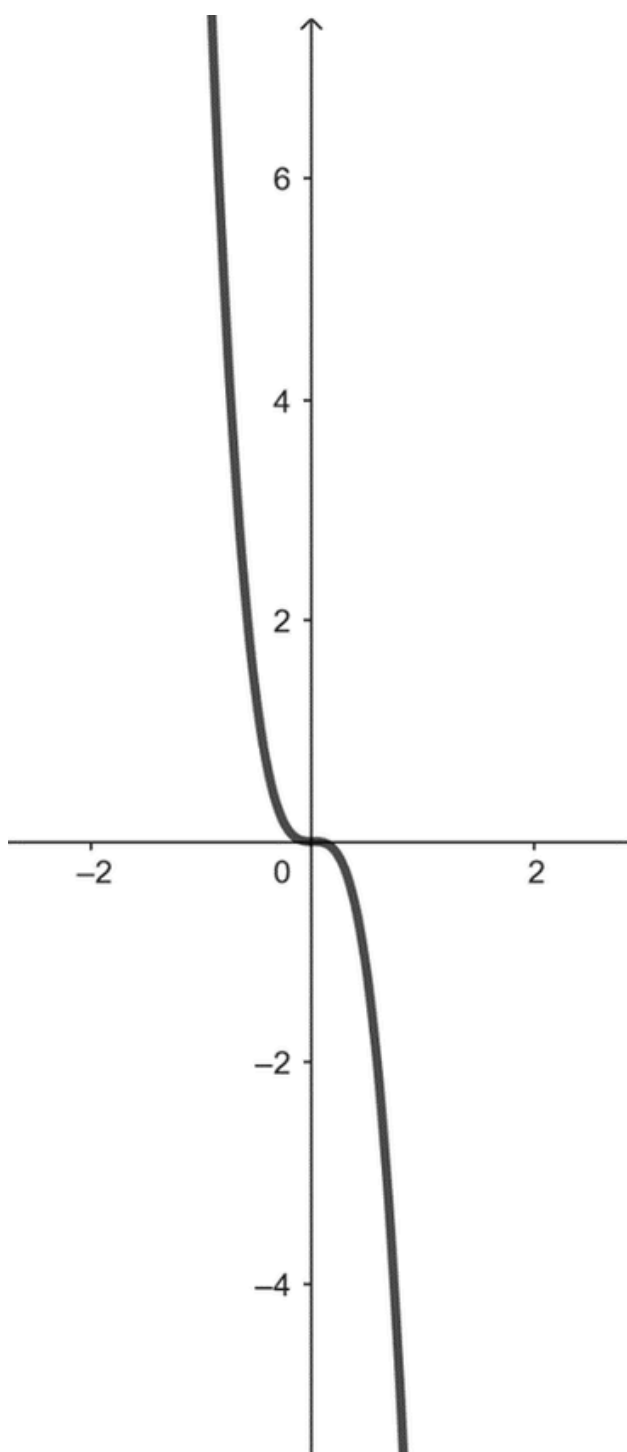
Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$.



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$.

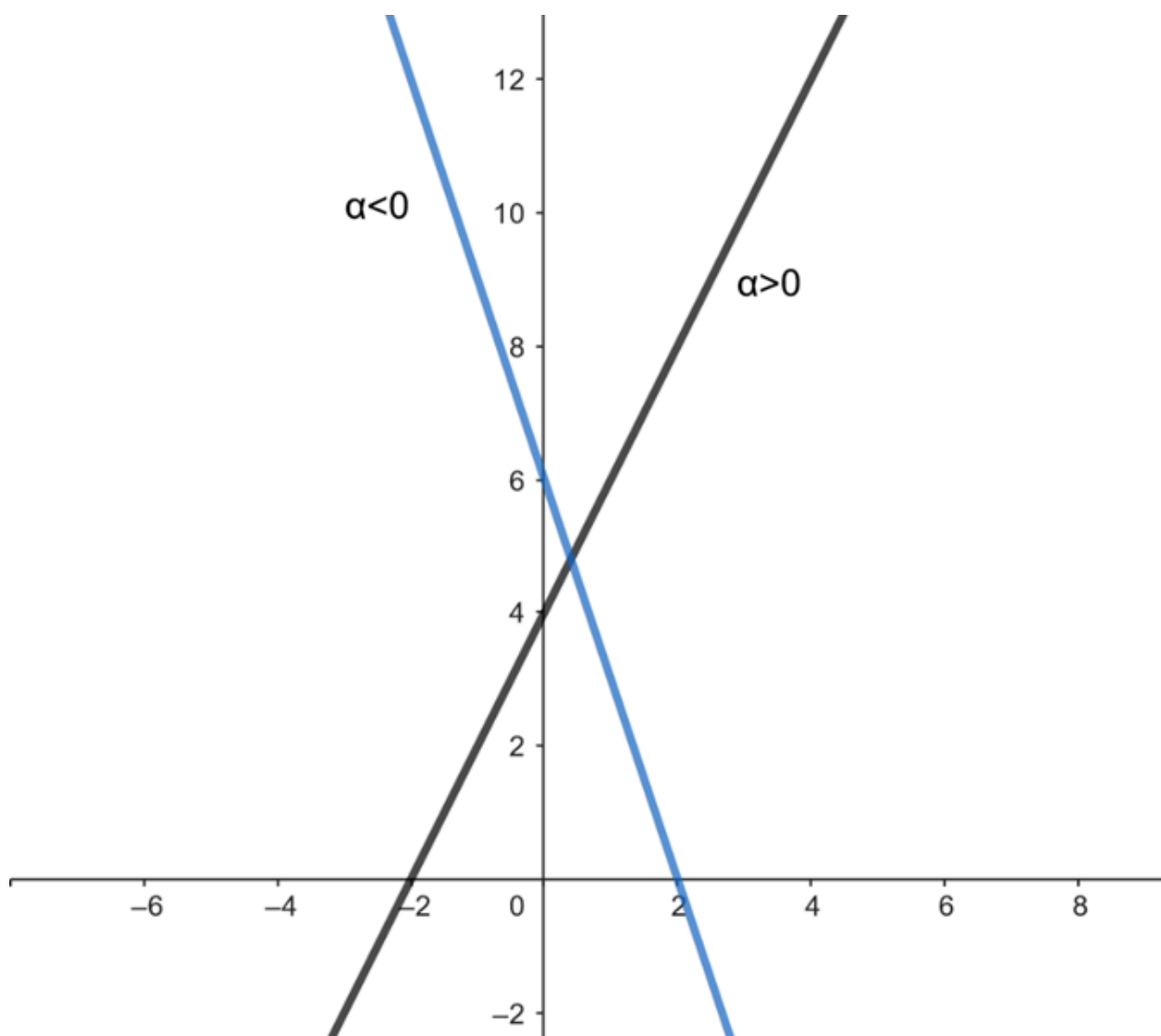


3. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ ;

Μια συνάρτηση λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ όταν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα στο Δ .

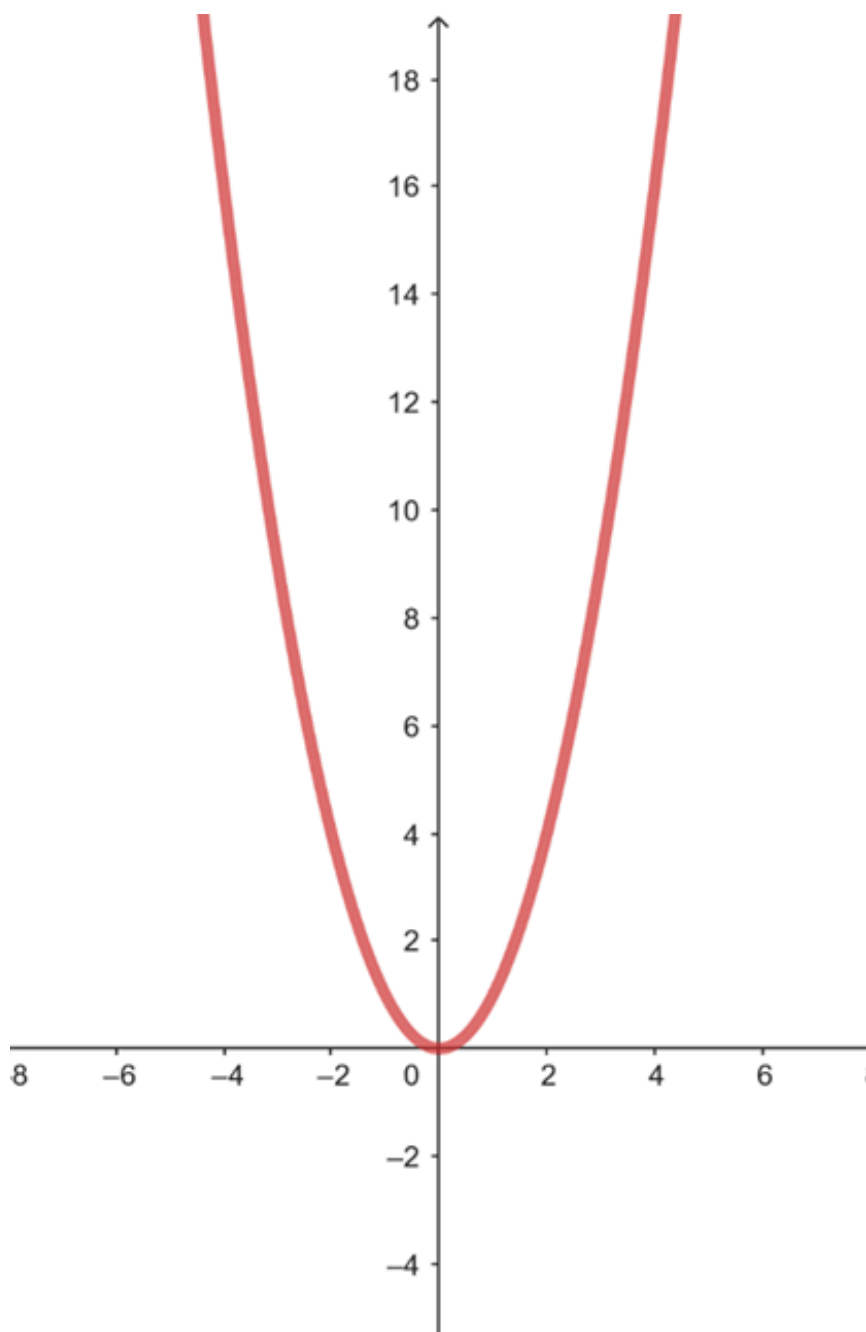
4. Ποια είναι η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$, $a \neq 0$;

Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ με $a > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ενώ αν $a < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.



5. Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ελάχιστο;

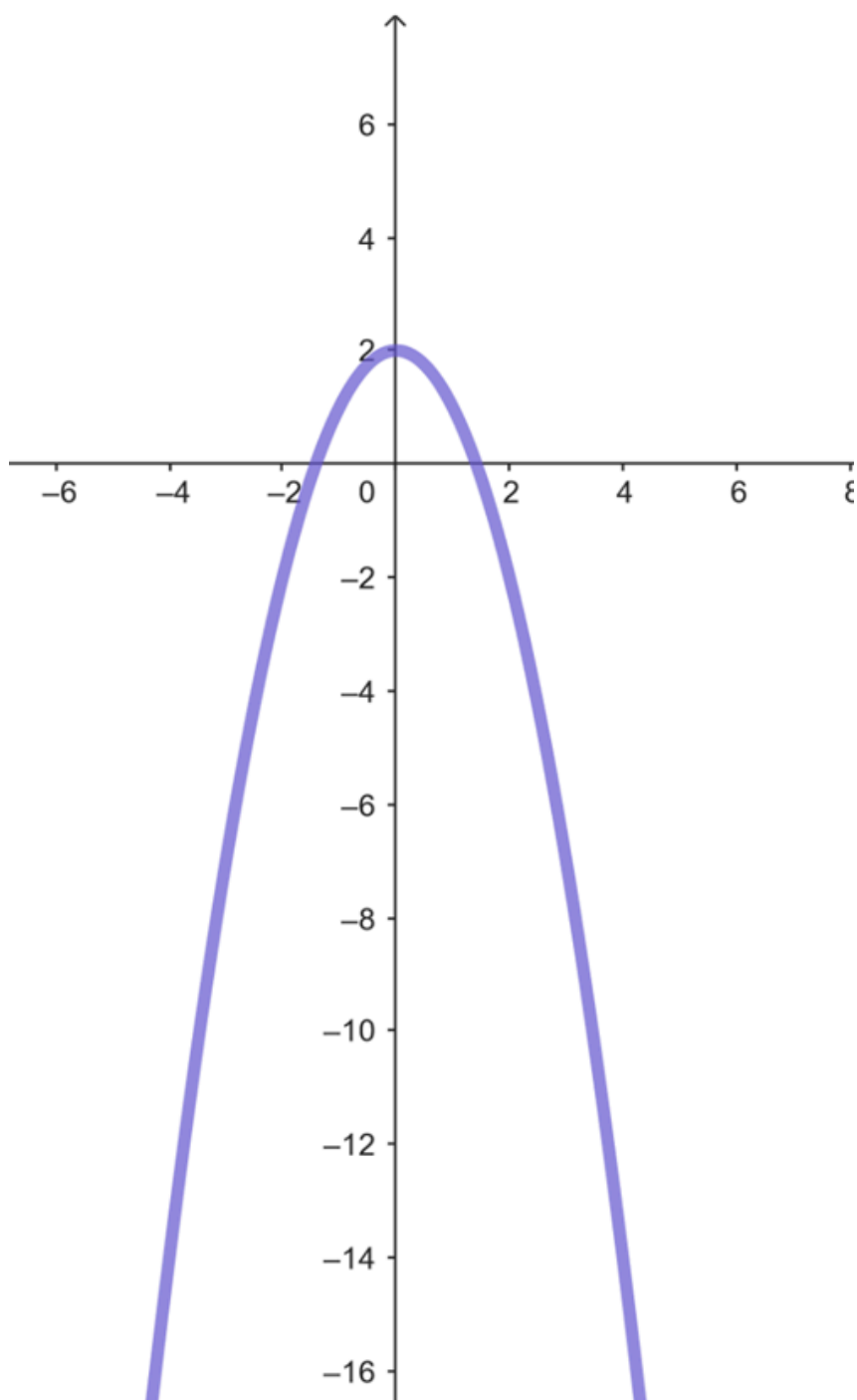
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$. Το x_0 λέγεται θέση ελάχιστου και το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο ή απλά ελάχιστο της f και το συμβολίζουμε με $\min f(x)$.



π.χ. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 γιατί $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in A$, δηλαδή $f(x) \geq f(0)$ και λέμε $\min f(x) = f(0) = 0$.

6. Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει μέγιστο;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$. Το x_0 λέγεται θέση μεγίστου και το $f(x_0)$ ολικό μέγιστο ή απλά μέγιστο της f και το συμβολίζουμε με $\max f(x)$.



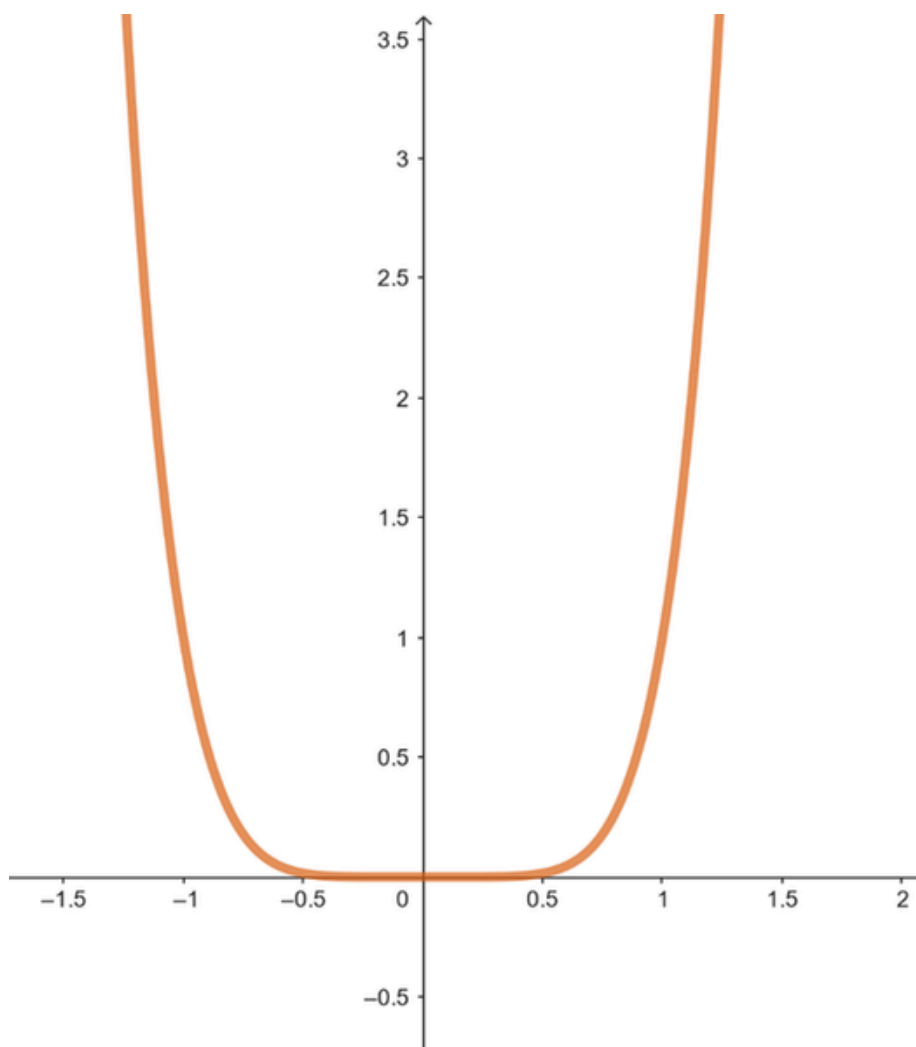
π.χ. Η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2$ παρουσιάζει μέγιστο στο 0 γιατί $-x^2 + 2 \leq 2$ για κάθε $x \in A$, δηλαδή $f(x) \leq f(0)$ και λέμε $\max f(x) = f(0) = 2$

7. Πότε μια συνάρτηση λέγεται άρτια;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A θα λέγεται άρτια όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$

Η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y .

π.χ. Η συνάρτηση $f(x) = x^6$ είναι άρτια αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $-x \in \mathbb{R}$ και $x^6 = (-x)^6$, δηλαδή $f(-x) = f(x)$.



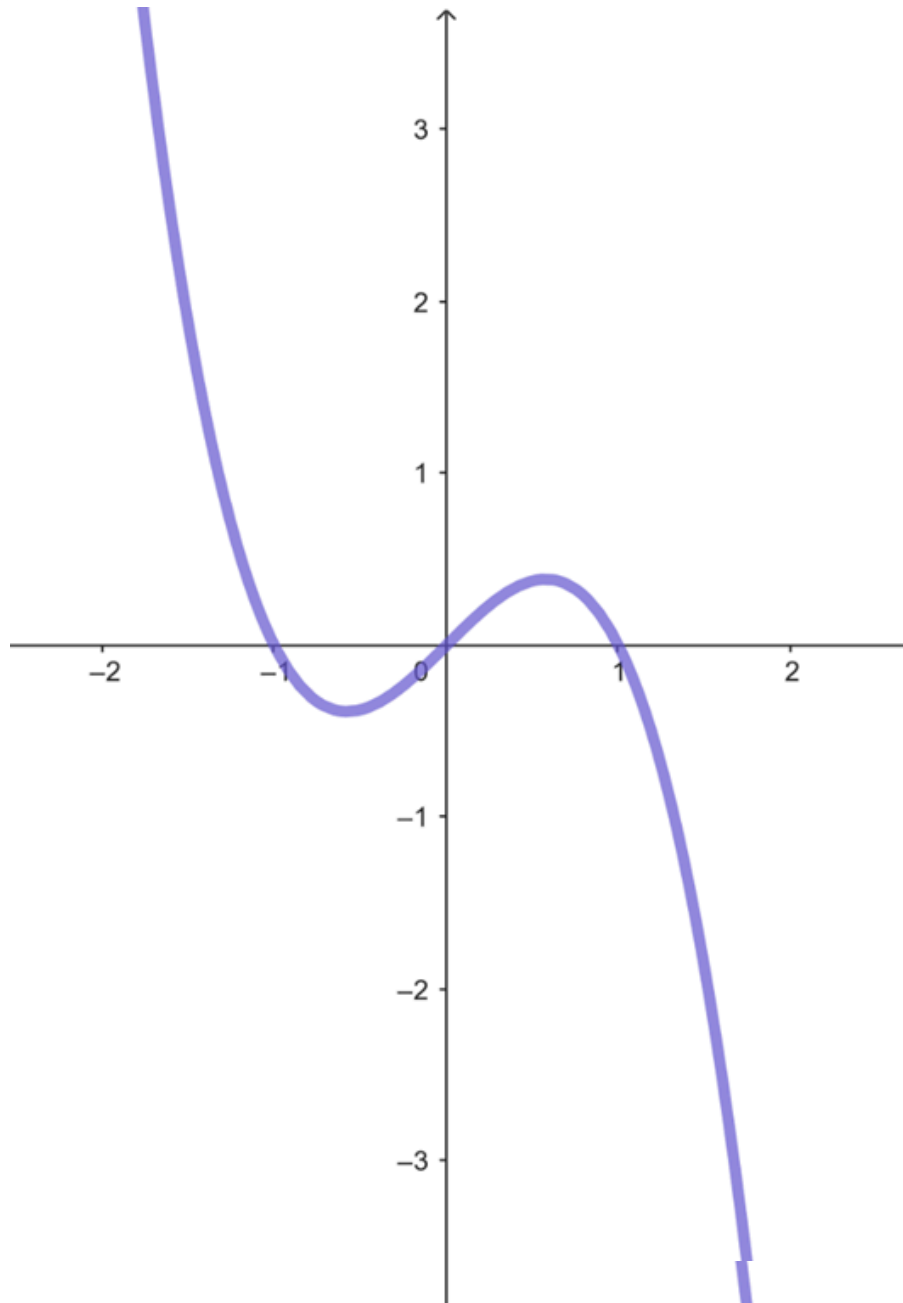
8. Πότε μια συνάρτηση λέγεται περιττή;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A θα λέγεται περιττή όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.

π.χ. Η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + x$ είναι άρτια αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = -(-x)^3 + (-x)$.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 10$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x=3$.

Για να παρουσιάζει ελάχιστο στο 3 αρκεί $f(x) \geq f(3)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Κάνοντας πράξεις παίρνουμε:

$$x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10$$

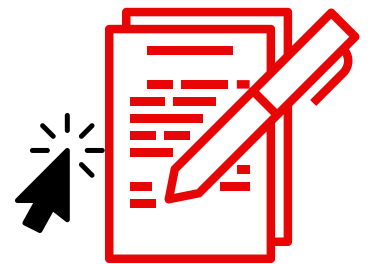
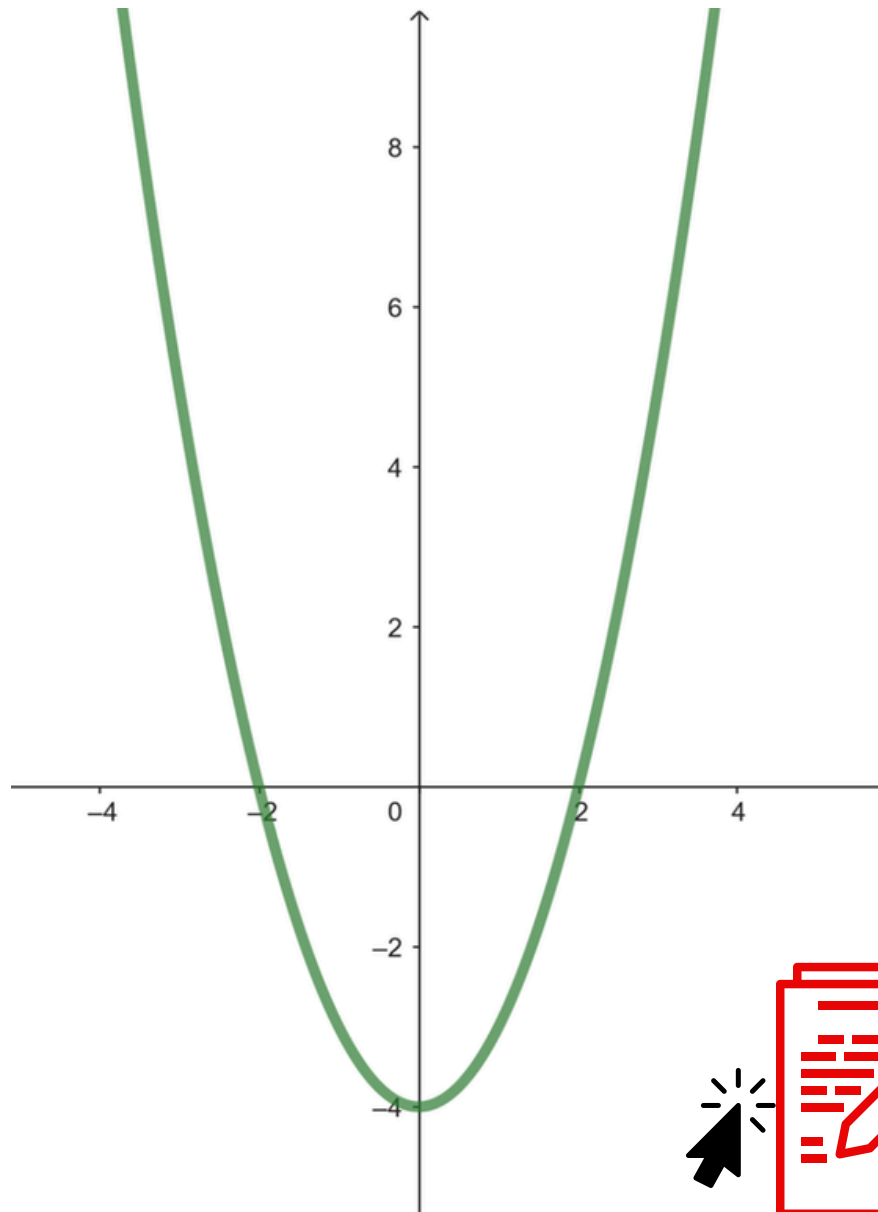
$$x^2 - 6x + 10 \geq 9 - 18 + 10$$

$$x^2 - 6x + 10 \geq 1$$

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

$$(x - 3)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει και παίρνουμε } (x - 3)^2 = 0 \text{ για } x=3.$$

2. Να εξετάσετε την παρακάτω γραφική παράσταση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. Μπορούμε να καταλάβουμε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή;



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Για την παραπάνω γραφική παράσταση έχουμε:

- Στο διάστημα $(-\infty, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.
- Στο διάστημα $[0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.
- Η συνάρτηση παρουσιάζει στο 0 ελάχιστο, το $f(0)=-4$.
- Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια, αφού η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

3. Βασισμένο στο θέμα 15114 από Τράπεζα Θεμάτων.

Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

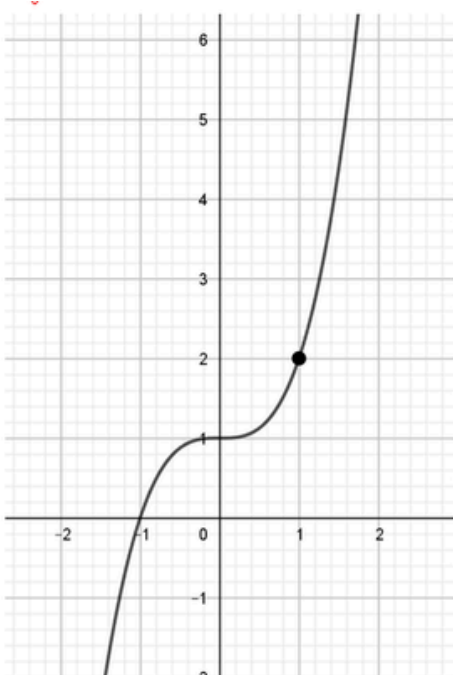
α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2,9)$;

Η γραφική παράσταση θα μπορούσε να διέρχεται από το σημείο $B(2,9)$ αφού η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και θα πρέπει για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ να είναι $f(x_1) < f(x_2)$.

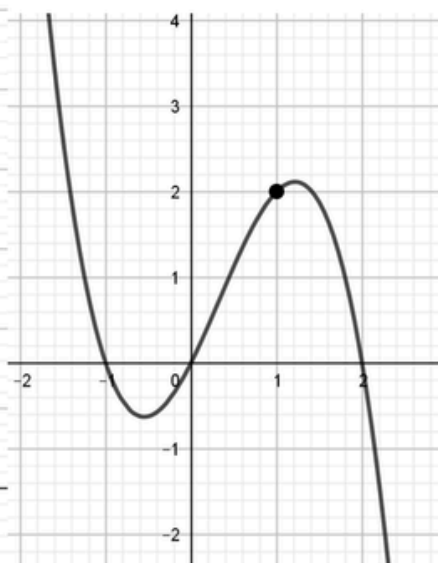
Για τα σημεία A, B παίρνουμε: $1 < 2$ και $f(1) < f(2)$, δηλαδή $2 < 9$ άρα το B είναι ένα πιθανό σημείο της γραφικής παράστασης.

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ;

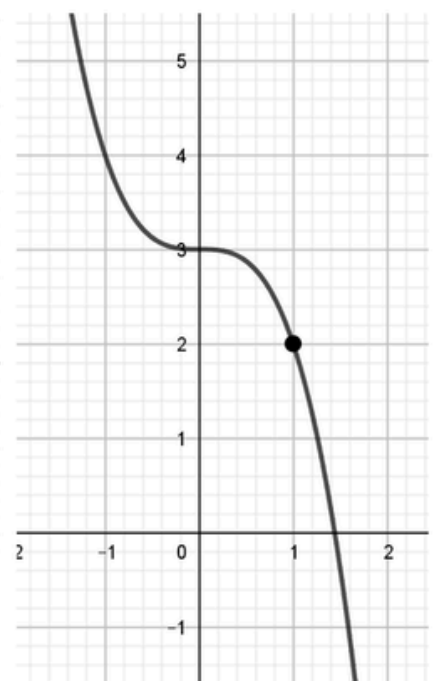
i)



ii)



iii)



Η συνάρτηση μας είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να αντιστοιχίζεται μόνο στην i.





2. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ - ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

1. Τι γνωρίζετε για την κατακόρυφη μετατόπιση της καμπύλης;

Έχουμε μια συνάρτηση $f(x)$ και συναρτήσεις $g(x)=f(x)+c$ και $h(x)=f(x)-c$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης **$g(x)=f(x)+c$, $c>0$** προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά c μονάδες **προς τα πάνω**.

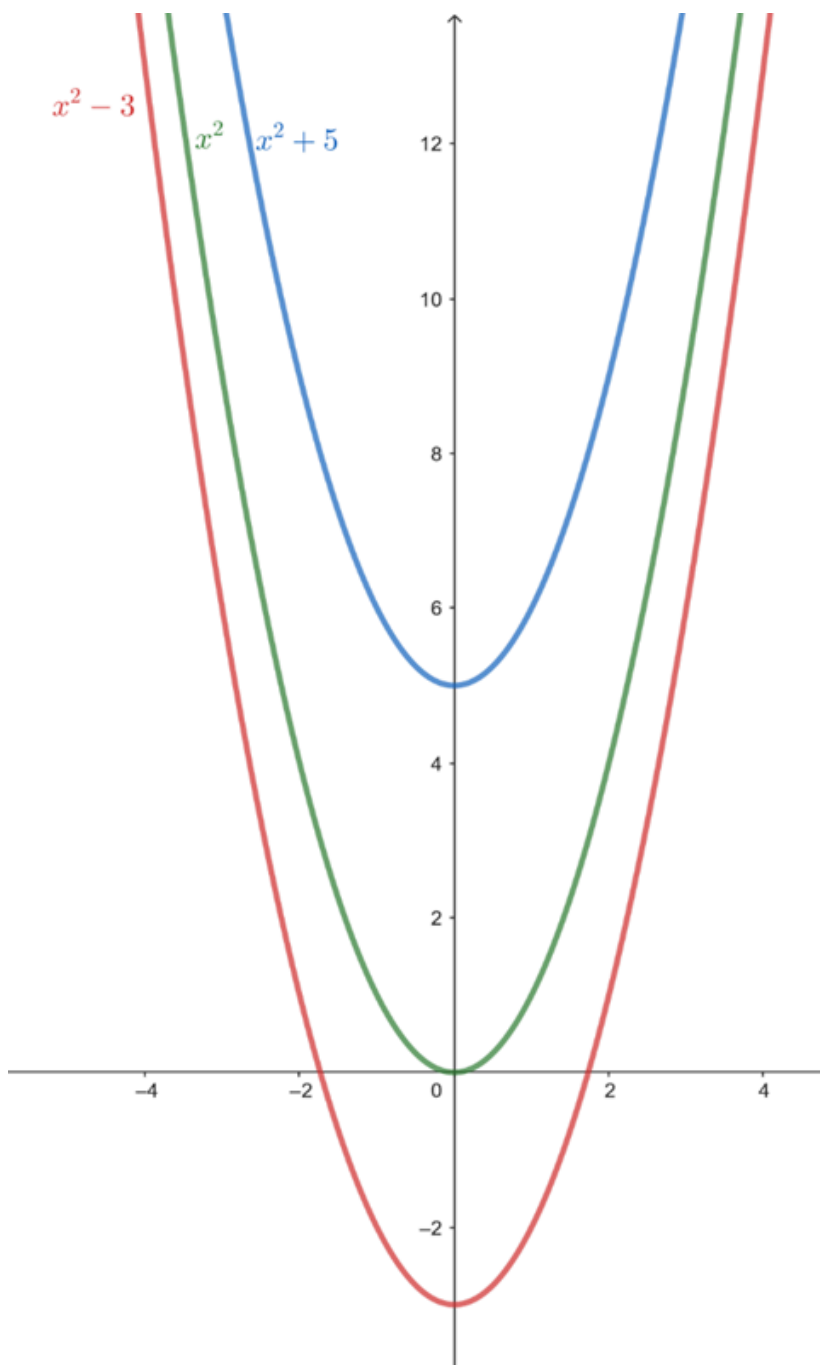
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης **$h(x)=f(x)-c$, $c>0$** προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά c μονάδες **προς τα κάτω**.

π.χ. Έχουμε την $f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+5$, $h(x)=x^2-3$



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

Για τις γραφικές παραστάσεις παίρνουμε:



Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση της $g(x)$ (μπλε χρώμα) είναι «ανεβασμένη» κατά 5 και η συνάρτηση $h(x)$ είναι «κατεβασμένη» κατά 3.

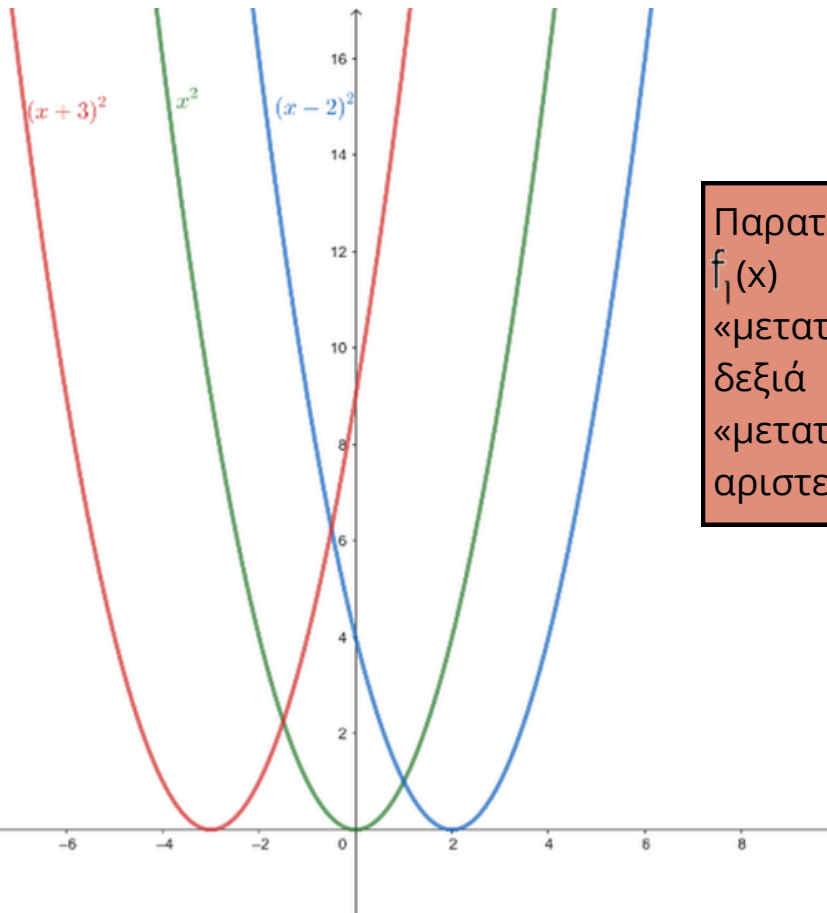
2. Τι γνωρίζετε για την οριζόντια μετατόπιση της καμπύλης;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με: $f(x) = \varphi(x - c)$, $c > 0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά**.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με: $f(x) = \varphi(x + c)$, $c > 0$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά**.

π.χ. Έχουμε την $\varphi(x)=x^2$, $f_1(x)=(x-2)^2$, $f_2(x)=(x+3)^2$.

Για τις γραφικές παραστάσεις παίρνουμε:



Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση της $f_1(x)$ (μπλε χρώμα) είναι «μετατοπισμένη» κατά 2 προς τα δεξιά και η συνάρτηση $f_2(x)$ είναι «μετατοπισμένη» κατά 3 προς τα αριστερά.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

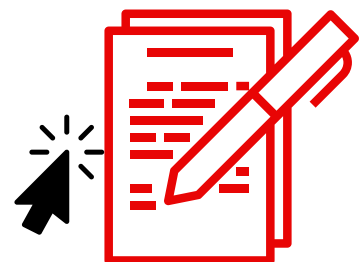
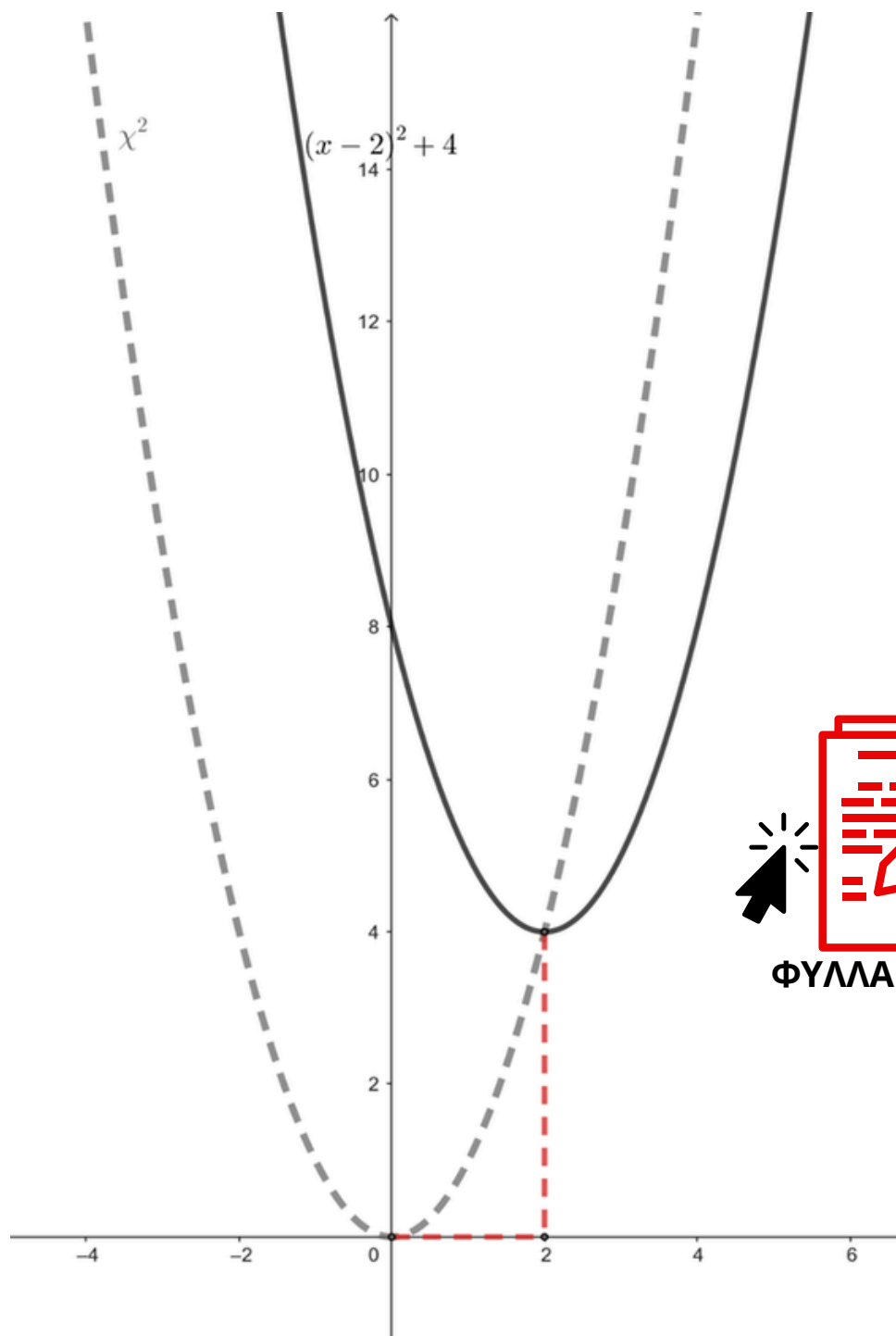
1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+8$. Να δείξετε ότι η $f(x)$ γράφεται στη μορφή $f(x)=(x-2)^2+4$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

Για την συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+8$ παίρνουμε

$$f(x)=x^2-4x+8=x^2-4x+4+4=(x-2)^2+4.$$

Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση αρκεί να σκεφτούμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει προέλθει από την x^2 μετατοπισμένη κατά 2 προς τα δεξιά (άρα προκύπτει $(x-2)^2$) και στη συνέχεια με τη μετατόπισή της κατά 4 προς τα πάνω (άρα προκύπτει η $(x-2)^2 + 4$).

Για τη γραφική παράσταση, θα κάνουμε τις κατάλληλες μετατοπίσεις στην βασική συνάρτηση x^2 .



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

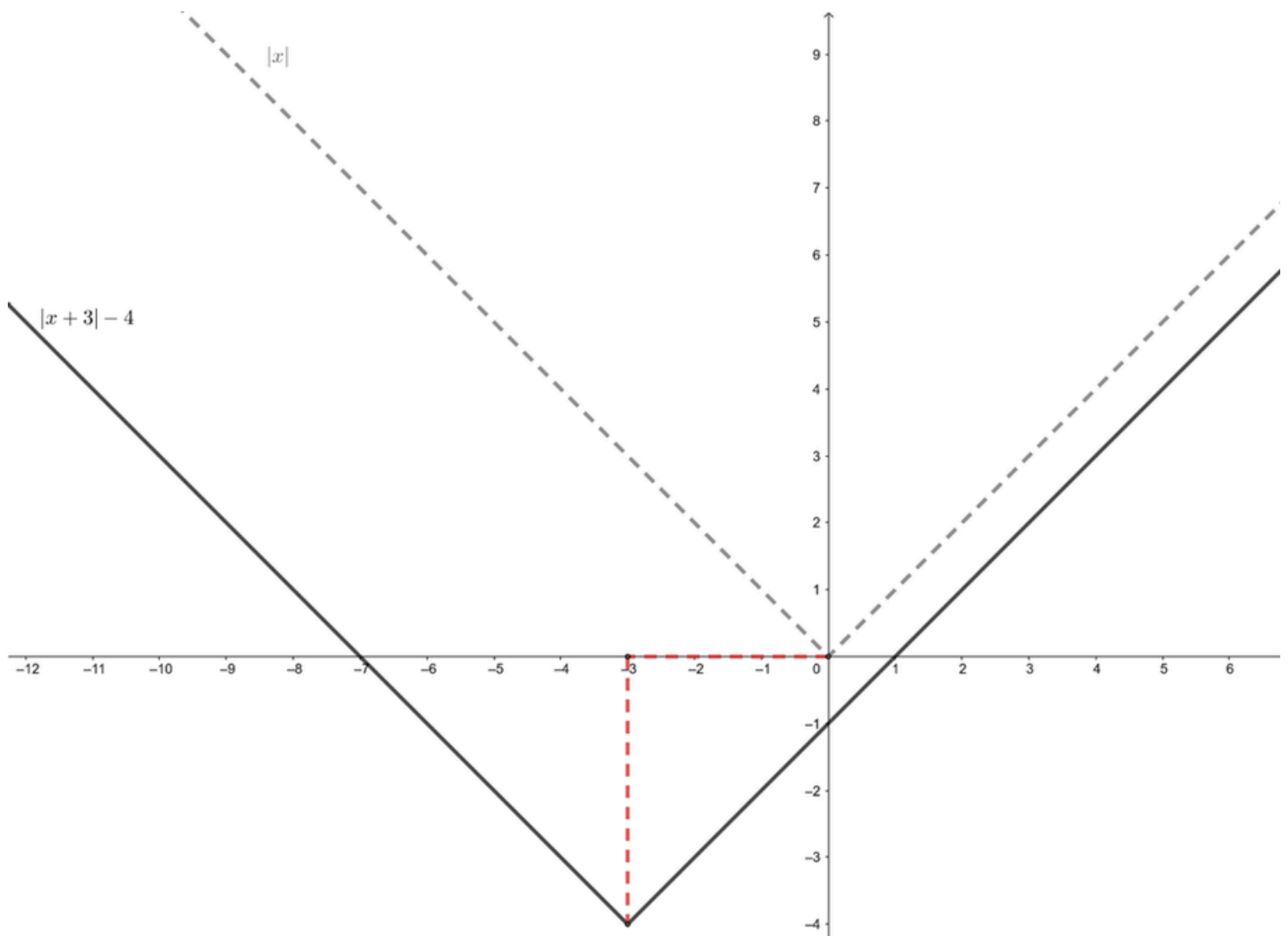
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x|$ και η συνάρτηση $g(x)$ που προκύπτει αν μετατοπίσουμε την $f(x)$ 3 μονάδες προς τα αριστερά και 4 μονάδες προς τα κάτω. Αφού προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης, να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

Η συνάρτηση $g(x)$ προκύπτει μετά από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $f(x)$.

3 μονάδες προς τα αριστερά σημαίνει ότι έχω $|x + 3|$.

4 μονάδες προς τα κάτω σημαίνει ότι έχω $|x + 3| - 4$.

Άρα για τη συνάρτηση παίρνω $g(x) = |x + 3| - 4$.



3

τριγωνομετρία



1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου;

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται εφαπτομένη της γωνίας ω .

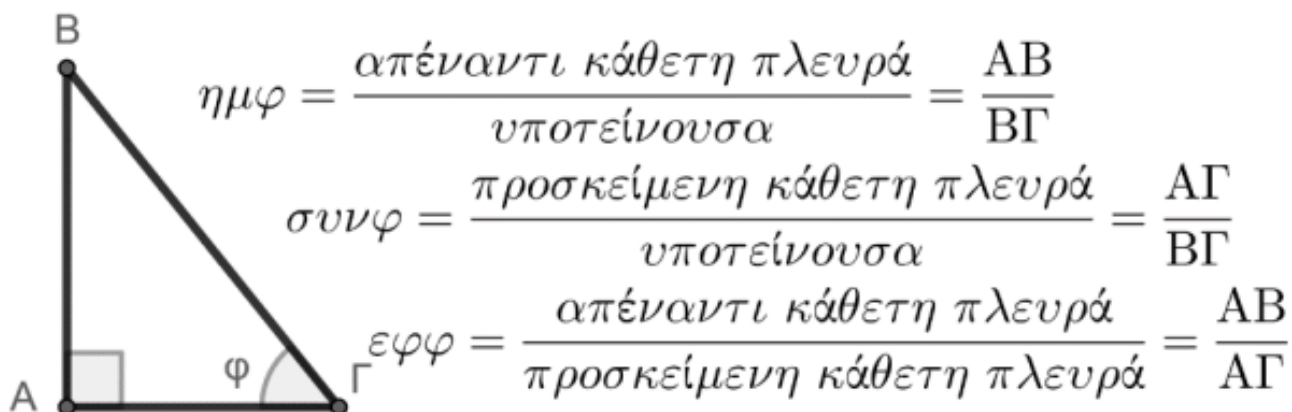
$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται ημίτονο της γωνίας ω .

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται συνημίτονο της γωνίας ω .

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

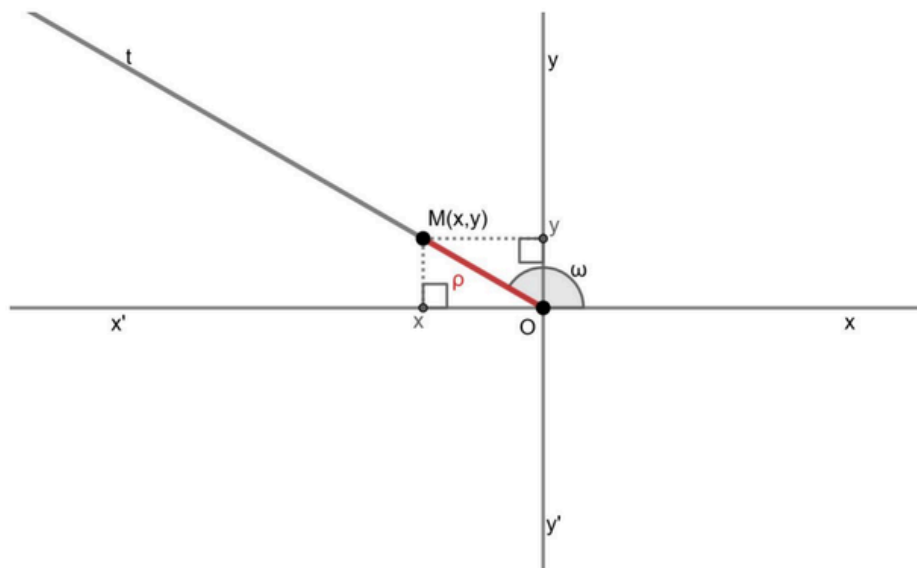


2. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω , με $0 < \omega < 360^\circ$;

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, Ot μία ημιευθεία αυτού και ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox αν περιστραφεί κατά τη θετική φορά γύρω από το O μέχρι να συμπίσει για πρώτη φορά με την ημιευθεία Ot . Ο θετικός ημιάξονας Ox λέγεται αρχική πλευρά της γωνίας ω , ενώ η ημιευθεία Ot λέγεται τελική πλευρά της ω . Πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας ω παίρνουμε τυχαίο σημείο $M(x, y)$.

Θα έχουμε:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y}, \text{ με } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



3. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που είναι μεγαλύτερες από 360 καθώς και οι αρνητικές γωνίες;

Παίρνουμε τις γωνίες: $\omega = v \cdot 360^\circ + \mu^\circ$ όπου $v \in \mathbb{N}^*$ και $0^\circ \leq \mu \leq 360^\circ$
 $\omega = - (v \cdot 360^\circ + \mu^\circ)$, όπου $v \in \mathbb{N}$ και $0^\circ \leq \mu \leq 360^\circ$

Και γενικά, για $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε: $\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$ $\epsilon\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$
 $\sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$ $\sigma\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$

Για παράδειγμα:

- $\eta\mu(940^\circ) = \eta\mu(2 \cdot 360^\circ + 220^\circ) = \eta\mu(220^\circ)$
- $\sigma\upsilon\nu(-1080^\circ) = \sigma\upsilon\nu(-3 \cdot 360^\circ) = \sigma\upsilon\nu(0^\circ)$

4. Πως ορίζεται το συνημίτονο και το ημίτονο μιας γωνίας ω στον τριγωνομετρικό κύκλο;

Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, τότε ισχύει:

$$\text{συν}\omega = x = \text{τετμημένη του σημείου } M$$

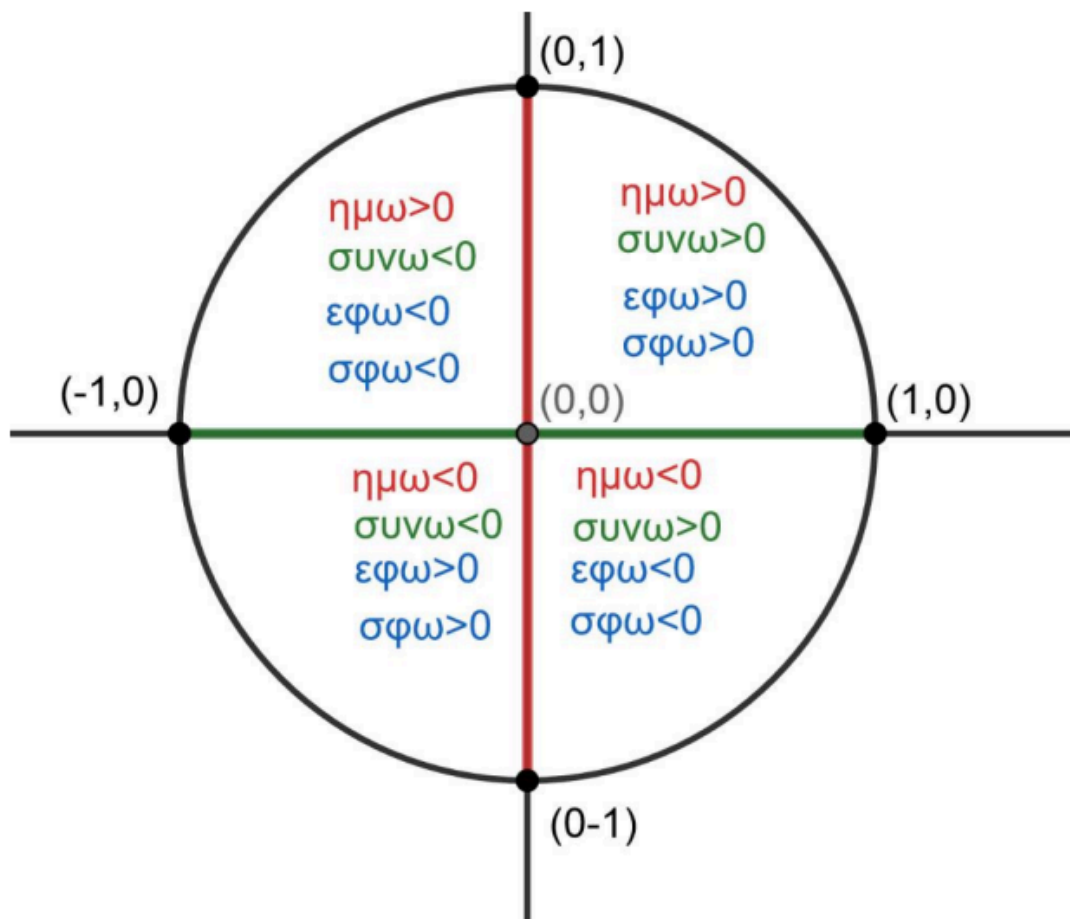
$$\text{ημ}\omega = y = \text{τεταγμένη του σημείου } M$$

Για το λόγο αυτό ο άξονας x' λέγεται και άξονας των συνημίτονων, ενώ ο άξονας y' λέγεται και άξονας των ημίτονων.

Προκύπτει ότι: $-1 \leq \text{ημ}\omega \leq 1$ και $-1 \leq \text{συν}\omega \leq 1$.

5. Ποιο είναι το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών στα τέσσερα τεταρτημόρια;

	1ο	2ο	3ο	4ο
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-



6. Ποιο τόξο ονομάζεται τόξο ενός ακτινίου ή 1 rad; Τι είναι το ακτίνιο ή rad;

Τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad) είναι το τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου. Ακτίνιο (ή 1 rad) είναι η γωνία η οποία, όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad).

7. Αν μια γωνία είναι μ μοίρες και α ακτίνια, τότε ποιος τύπος συνδέει το μ με το α ;

Για παράδειγμα: $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180^\circ}$

Έχουμε γωνία 90° και θέλουμε να τις μετατρέψουμε σε rad.

Οπότε παίρνουμε: $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{90^\circ}{180^\circ} \Leftrightarrow 180^\circ \alpha = 90^\circ \pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{90^\circ \pi}{180^\circ}$ άρα $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad.

8. Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

Γωνία ω	$\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\eta\omega$	$\epsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi\omega$
$0^\circ / 0\text{rad}$	0	1	0	Δεν ορίζεται
$30^\circ / \frac{\pi}{6}\text{rad}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ / \frac{\pi}{4}\text{rad}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ / \frac{\pi}{3}\text{rad}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ / \frac{\pi}{2}\text{rad}$	1	0	Δεν ορίζεται	0



Λυμένα Παραδείγματα

1. Να εκφραστούν οι γωνίες σε rad.

α. 60° β. 135° γ. 270° δ. 30°



Έχουμε: **α.** $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{60}{180} \Leftrightarrow 180\alpha = 60\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

β. $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{135}{180} \Leftrightarrow 180\alpha = 135\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$

γ. $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{270}{180} \Leftrightarrow 180\alpha = 270\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}$

δ. $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{30}{180} \Leftrightarrow 180\alpha = 30\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

2. Να εκφραστούν σε μοίρες οι γωνίες:

α. $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

β. $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

γ. $3\pi \text{ rad}$

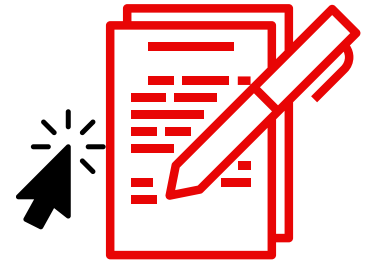
δ. 4 rad

Έχουμε: α. $\frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = \frac{180}{4} = 45^\circ$

β. $\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = \frac{180}{2} = 90^\circ$

γ. $\frac{3\pi}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow 3 = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 180 \cdot 3 = 540^\circ$

δ. $\frac{4}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow 4 \cdot 180 = \pi \cdot \mu \Leftrightarrow \mu = \frac{720^\circ}{\pi}$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

3. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή της παράστασης $A = -2\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{1}{2\eta\mu\chi + 3}$

Γνωρίζουμε ότι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\chi \leq 1$ και $-1 \leq \eta\mu\chi \leq 1$

Οπότε θα πάρουμε:

$$-2 \leq \sigma\upsilon\nu\chi \leq 2$$

και

$$2 \leq -2\sigma\upsilon\nu\chi \leq 2$$

$$-2 \leq 2\eta\mu\chi \leq 2$$

$$-2+3 \leq 2\eta\mu\chi+3 \leq 2+3$$

$$1 \leq 2\eta\mu\chi+3 \leq 5$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{2\eta\mu\chi+3} \leq 1$$

Για τη παράσταση $A = -2\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{1}{2\eta\mu\chi + 3}$ παίρνουμε:

$$-2 + \frac{1}{5} \leq -2\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{1}{2\eta\mu\chi + 3} \leq 2 + 1$$

$$-\frac{9}{5} \leq A \leq 3$$



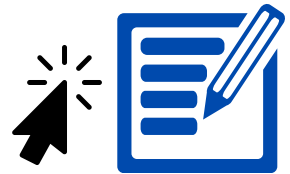


2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. Ποιες είναι οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες;

- Για κάθε γωνία ω ισχύει:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

- Για $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και αντίστοιχα $\eta\mu\omega \neq 0$ ισχύει:

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

- Εφόσον $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και $\eta\mu\omega \neq 0$ έχουμε:

$$\epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$$

- Για κάθε γωνία ω ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2\omega} \text{ και } \eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$$

Αποδείξεις:

1. Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι :

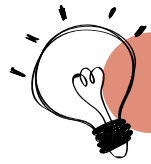
$$x = \text{συν}\omega \text{ και } y = \eta\mu\omega$$

Επειδή όμως $(OM) = 1$ και $(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$ θα ισχύει : $x^2 + y^2 = 1$
οπότε θα έχουμε : $\eta\mu^2\omega + \text{συν}^2\omega = 1$.

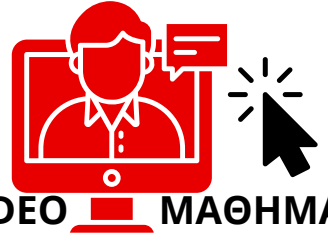
2. Έχουμε ότι $\epsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y}$. Οπότε παίρνουμε:

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\varphi\omega} \text{ και } \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\varphi\omega}{\eta\mu\omega}$$

3. $\epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\varphi\omega} \cdot \frac{\sigma\varphi\omega}{\eta\mu\omega} = 1$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Αν γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ και $0 < \omega < 90^\circ$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Θα αξιοποιήσουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\frac{16}{25} + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{9}{25}$$

Επειδή για τη γωνία έχουμε $0 < \omega < 90^\circ$, γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$, οπότε έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = +\sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$$

Για να υπολογίσουμε τις $\epsilon\phi\omega$ και $\sigma\phi\omega$ έχουμε:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{3}{4}$$

2. Αν γνωρίζουμε ότι $\sigma\varphi\omega=2$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$ οπότε έχουμε $2\varepsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{2}$.

Για να βρούμε τα $\eta\mu\omega$ και τα $\sigma\upsilon\nu\omega$ παίρνουμε:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

Γνωρίζουμε για τη γωνία ω ότι $180^\circ < \omega < 270^\circ$ οπότε τόσο το $\eta\acute{\mu}\tau\omicron\nu\omega$ όσο και το $\sigma\upsilon\nu\eta\acute{\mu}\tau\omicron\nu\omega$ θα είναι αρνητικοί αριθμοί.

$$\eta\mu\omega = -\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}$$

Πλέον έχουμε βρει το $\eta\mu\omega$ σε συνάρτηση του $\sigma\upsilon\nu\omega$, οπότε παίρνουμε:

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

$$2 = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{-\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}}$$

$$-2\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega} = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$4(1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega) = \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$4 - 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$4 = 5\sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{4}{5}$$

Γνωρίζουμε για τη γωνία ω ότι $180^\circ < \omega < 270^\circ$ οπότε $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$ άρα:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{και} \quad \eta\mu\omega = -\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega} = -\sqrt{1 - \frac{4}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

3. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^4\omega - \eta\mu^4\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1$.

Παίρνουμε διαδοχικά: $\sigma\upsilon\nu^4\omega - \eta\mu^4\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1$

$$(\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega)(\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega) = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1$$

$$1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega$$

$$1 = \sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega, \text{ που ισχύει}$$

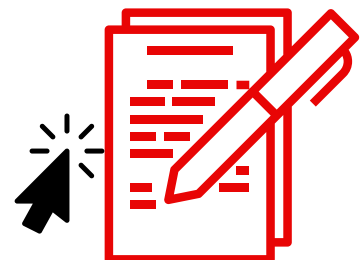
4. Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega + 1}{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 1} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - \eta\mu\omega}$

Παίρνουμε διαδοχικά: $\frac{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega + 1}{\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 1} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - \eta\mu\omega}$

$$(1 - \eta\mu\omega)(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega + 1) = \sigma\upsilon\nu\omega(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 1)$$

$$\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega + 1 - \eta\mu^2\omega + \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega - \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$1 = \sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega, \text{ που ισχύει}$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

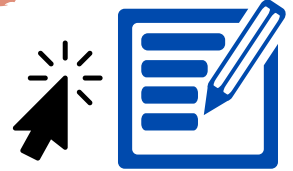


ONLINE TEST



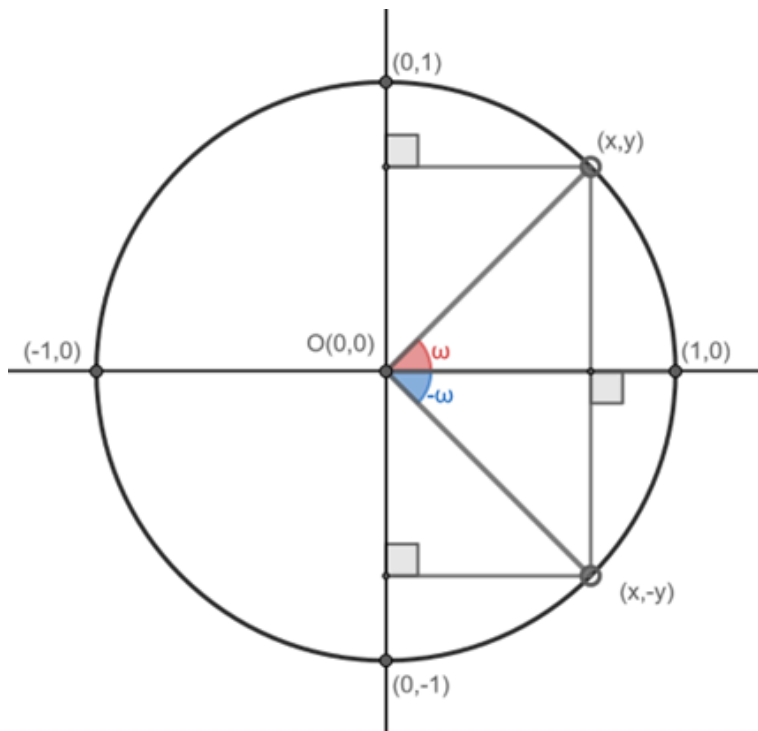
3. ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Αντίθετες γωνίες



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Δυο γωνίες ω και ω' λέγονται αντίθετες αν για κάθε ω , ω' ισχύει $\omega' = -\omega$.



Για τους τριγωνικούς αριθμούς αντίθετων γωνιών έχουμε:

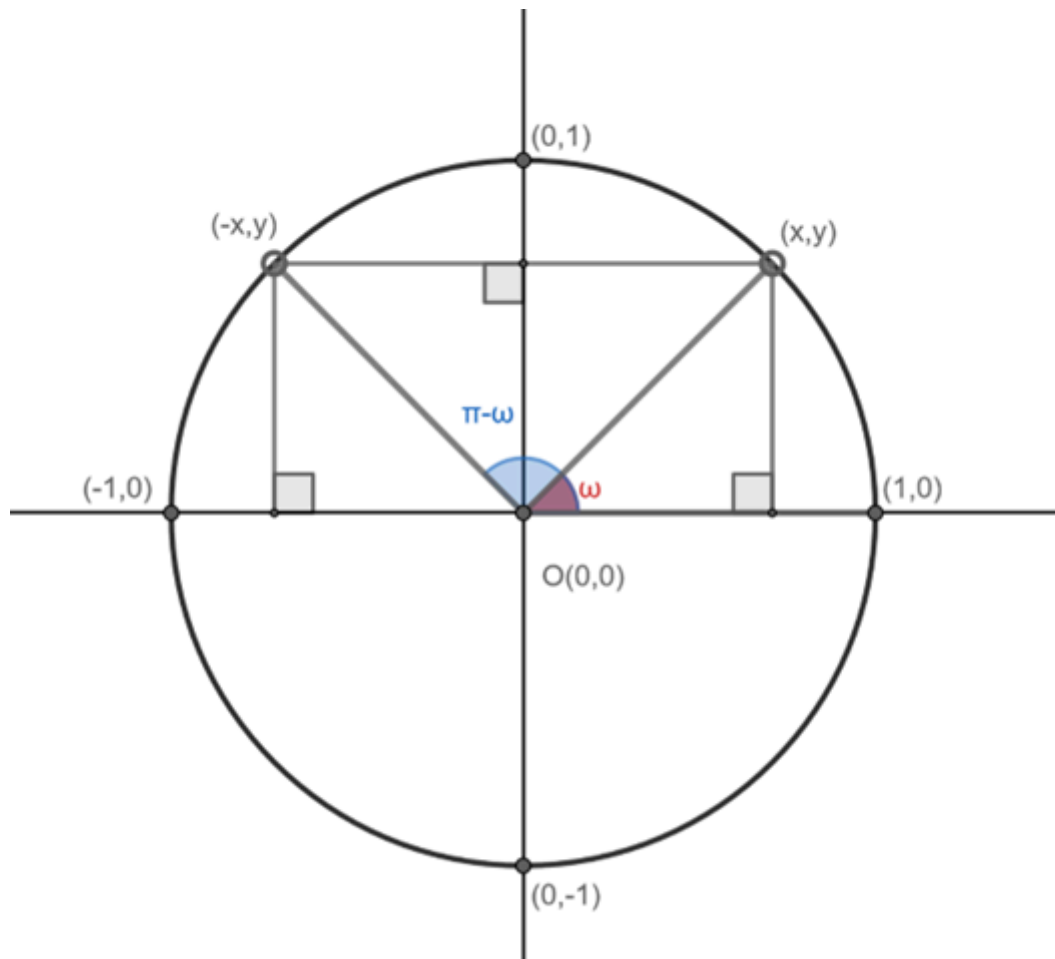
$$\begin{aligned}\sin(-\omega) &= -\sin\omega & \cos(-\omega) &= \cos\omega \\ \tan(-\omega) &= -\tan\omega & \cot(-\omega) &= -\cot\omega\end{aligned}$$

Π.χ. Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $-\frac{\pi}{4}$ παίρνουμε:

$$\sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{4}) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \eta\mu(-\frac{\pi}{4}) = -\eta\mu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\epsilon\phi(-\frac{\pi}{4}) = -\epsilon\phi\frac{\pi}{4} = -1 \quad \sigma\phi(-\frac{\pi}{4}) = -\sigma\phi\frac{\pi}{4} = -1$$

Γωνίες με άθροισμα π (180°) - Παραπληρωματικές γωνίες:



Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών έχουμε:

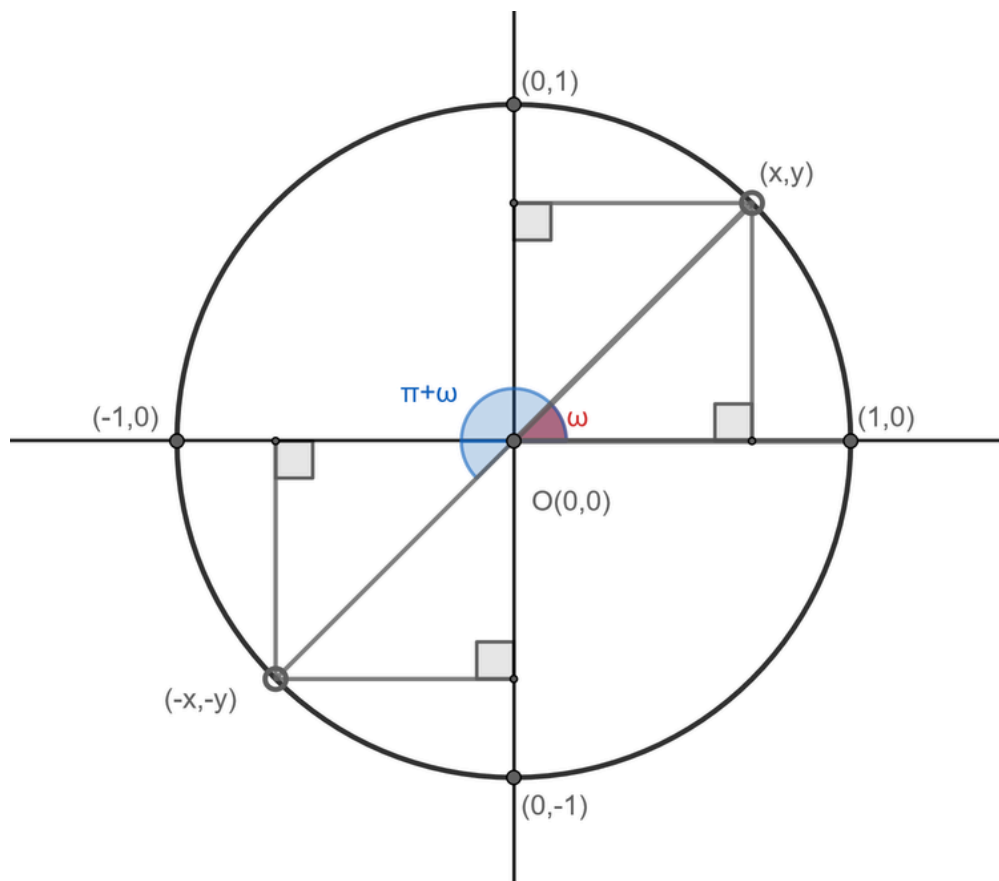
$$\begin{aligned}\sin(\pi - \omega) &= \sin \omega & \cos(\pi - \omega) &= -\cos \omega \\ \tan(\pi - \omega) &= -\tan \omega & \cot(\pi - \omega) &= -\cot \omega\end{aligned}$$

Π.χ. Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{2\pi}{3}$ παίρνουμε:

$$\rightarrow \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}, \text{ άρα:}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) &= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) &= -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} & \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) &= -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Γωνίες που διαφέρουν κατά π (180°):



Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που διαφέρουν κατά π (180°) έχουμε:

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \omega) &= -\sin \omega & \eta\mu(\pi + \omega) &= -\eta\mu \omega \\ \epsilon\phi(\pi + \omega) &= \epsilon\phi \omega & \sigma\phi(\pi + \omega) &= \sigma\phi \omega\end{aligned}$$

Π.χ. Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{7\pi}{6}$ παίρνουμε:

$$\rightarrow \frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}, \text{ άρα:}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) &= -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) &= -\eta\mu \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \epsilon\phi\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) &= \epsilon\phi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} & \sigma\phi\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) &= \sigma\phi \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

Γωνίες με άθροισμα $\frac{\pi}{2}$ (90°) - Συμπληρωματικές γωνίες:

Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συμπληρωματικών γωνιών έχουμε:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) &= \eta\mu \omega & \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) &= \sin \omega \\ \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) &= \sigma\phi \omega & \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) &= \epsilon\phi \omega\end{aligned}$$

Π.χ. Για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\pi}{3}$ παίρνουμε:

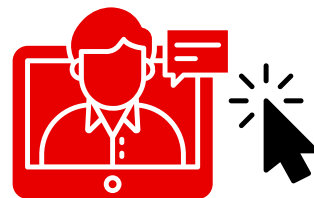
$$\rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, \text{ άρα:}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = \frac{\sin(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x) \cdot \sin(-x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

Θα υπολογίσουμε κάθε όρο του πηλίκου χωριστά αξιοποιώντας την αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο:

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

Οπότε για την παράσταση A παίρνουμε:

$$A = \frac{-\sigma\upsilon\nu(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(x) \cdot (-\sigma\phi(x))}{\eta\mu(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(x) \cdot \sigma\phi(x)} = \frac{\sigma\upsilon\nu(x)}{\eta\mu(x)} = \sigma\phi(x)$$

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$B = \frac{\eta\mu(\frac{3\pi}{2} - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \omega)}{\epsilon\phi(\frac{\pi}{2} + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} + \omega)}$$

Θα κινηθούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Σε αυτή την αριθμητική παράσταση εμφανίζονται γωνίες για τις οποίες δεν γνωρίζουμε πώς ανάγονται στο 1^ο τεταρτημόριο. Συνεπώς πρέπει να τις φέρουμε σε γνωστή μορφή.

$$\eta\mu(\frac{3\pi}{2} - \omega) = \eta\mu(\pi + \frac{\pi}{2} - \omega) = \eta\mu(\pi + (\frac{\pi}{2} - \omega)) = -\eta\mu(\frac{\pi}{2} - \omega) = -\sigma\upsilon\nu(\omega)$$

$$\sigma\upsilon\nu(2\pi - \omega) = \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu(\omega)$$

$$\epsilon\phi(\frac{\pi}{2} + \omega) = \epsilon\phi(\pi - \frac{\pi}{2} + \omega) = \epsilon\phi(\pi - (\frac{\pi}{2} - \omega)) = -\epsilon\phi(\frac{\pi}{2} - \omega) = -\sigma\phi(\omega)$$

$$\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} + \omega) = \sigma\upsilon\nu(\pi + \frac{\pi}{2} + \omega) = -\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \omega) = -\sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{2} + \omega) = -\sigma\upsilon\nu(\pi - (\frac{\pi}{2} - \omega)) =$$

$$\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - \omega) = \eta\mu(\omega)$$

Οπότε για την παράσταση B παίρνουμε:

$$B = \frac{\eta\mu(\frac{3\pi}{2} - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \omega)}{\epsilon\phi(\frac{\pi}{2} + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} + \omega)} = \frac{-\sigma\upsilon\nu(\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega)}{-\sigma\phi(\omega) \cdot \eta\mu(\omega)} = \frac{\sigma\upsilon\nu(\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega)}{\frac{\sigma\upsilon\nu(\omega)}{\eta\mu(\omega)} \cdot \eta\mu(\omega)} = \frac{\sigma\upsilon\nu(\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega)}{\sigma\upsilon\nu(\omega)} = \sigma\upsilon\nu(\omega)$$

3. Να απλοποιηθεί η παράσταση $\Gamma = \frac{\sigma\varphi(180^\circ - \varphi) \cdot \eta\mu(540^\circ - \varphi)}{\eta\mu(450^\circ + \varphi) \cdot \sigma\varphi(900^\circ - \varphi)}$

Θα υπολογίσουμε τους όρους ξεχωριστά:

$$\sigma\varphi(180^\circ - \varphi) = -\sigma\varphi(\varphi)$$

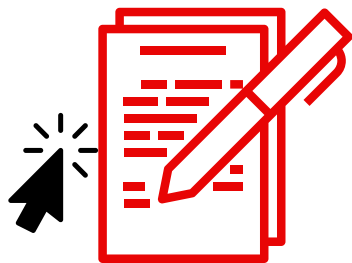
$$\eta\mu(540^\circ - \varphi) = \eta\mu(360^\circ + 180^\circ - \varphi) = \eta\mu(180^\circ - \varphi) = \eta\mu(\varphi)$$

$$\eta\mu(450^\circ + \varphi) = \eta\mu(360^\circ + 90^\circ + \varphi) = \eta\mu(90^\circ + \varphi) = \eta\mu(180^\circ - (90^\circ - \varphi)) = \eta\mu(90^\circ - \varphi) = \sigma\upsilon\nu(\varphi)$$

$$\sigma\varphi(900^\circ - \varphi) = \sigma\varphi(2 \cdot 360^\circ + 180^\circ - \varphi) = \sigma\varphi(180^\circ - \varphi) = -\sigma\varphi(\varphi)$$

Οπότε για την παράσταση Γ παίρνουμε:

$$\Gamma = \frac{\sigma\varphi(180^\circ - \varphi) \cdot \eta\mu(540^\circ - \varphi)}{\eta\mu(450^\circ + \varphi) \cdot \sigma\varphi(900^\circ - \varphi)} = \frac{-\sigma\varphi(\varphi) \cdot \eta\mu(\varphi)}{\sigma\upsilon\nu(\varphi) \cdot (-\sigma\varphi(\varphi))} = \varepsilon\varphi(\varphi)$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

4.Βασισμένο στο θέμα 21237 από Τράπεζα Θεμάτων.

Να υπολογίσετε το $\eta\mu\theta$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ αν γνωρίζετε ότι $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu \frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4}}$ και στη συνέχεια να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\theta$.

Για το $\eta\mu\theta$ έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu \frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\eta\mu(\pi - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2}}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\eta\mu \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}-1$$

Οπότε για το $\sigma\upsilon\nu\theta$ θα έχουμε:

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

$$(\sqrt{3}-1)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - (3 - 2\sqrt{3} + 1)$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2\sqrt{3} - 3$$

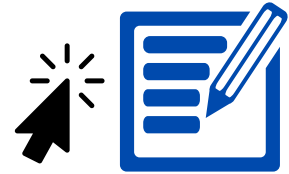
Επειδή γνωρίζουμε ότι $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$ οπότε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2\sqrt{3} - 3$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$$



4. ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



**ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ**

1. Τι ονομάζεται περιοδική συνάρτηση;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

$$x+T \in A, x-T \in A$$

και

$$f(x+T)=f(x-T)=f(x)$$

2. Τι ονομάζουμε περίοδο μιας συνάρτησης;

Ο πραγματικός αριθμός T για τον οποίο ισχύει $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$ ονομάζεται περίοδος της συνάρτησης f .

3. Τριγωνομετρική συνάρτηση ημίτονο

Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο $\eta\mu(x\text{rad})$ είναι η συνάρτηση ημίτονο.

Ορίζουμε $\eta\mu x = \eta\mu(x \text{ rad})$.

Ισχύει ότι $\eta\mu(x+2\pi) = \eta\mu(x-2\pi) = \eta\mu x$, άρα η **συνάρτηση ημίτονο** είναι περιοδική με **περίοδο 2π** .

4. Τριγωνομετρική συνάρτηση συνημίτονο

Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο $\sigma\upsilon\nu(x \text{ rad})$ είναι η συνάρτηση συνημίτονο.

Ορίζουμε $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(x \text{ rad})$.

Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu(x+2\pi) = \sigma\upsilon\nu(x-2\pi) = \sigma\upsilon\nu x$, άρα η **συνάρτηση συνημίτονο** είναι περιοδική με **περίοδο 2π** .

5. Τριγωνομετρική συνάρτηση εφαπτομένη

Η συνάρτηση εφαπτομένη ορίζεται ως $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{x \mid \sigma\upsilon\nu x \neq 0\}$.

Ισχύει ότι $\epsilon\phi(x+\pi) = \epsilon\phi(x-\pi) = \epsilon\phi x$, άρα η **συνάρτηση εφαπτομένη** είναι περιοδική με **περίοδο π** .

6. Τριγωνομετρική συνάρτηση συνεφαπτομένη

Η συνάρτηση συνεφαπτομένη ορίζεται ως $\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, με πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{x \mid \eta\mu x \neq 0\}$.

Ισχύει ότι $\sigma\phi(x+\pi) = \sigma\phi(x-\pi) = \sigma\phi x$, άρα η **συνάρτηση συνεφαπτομένη** είναι περιοδική με **περίοδο π** .

Γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Η **συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$** είναι περιοδική συνάρτηση, με περίοδο $T=2\pi$.

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 1 και η ελάχιστη -1.

Στο διάστημα $[0,2\pi]$ έχουμε:

$$\eta\mu 0 = 0$$

$$\eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\eta\mu \pi = 0$$

$$\eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\eta\mu 2\pi = 0$$

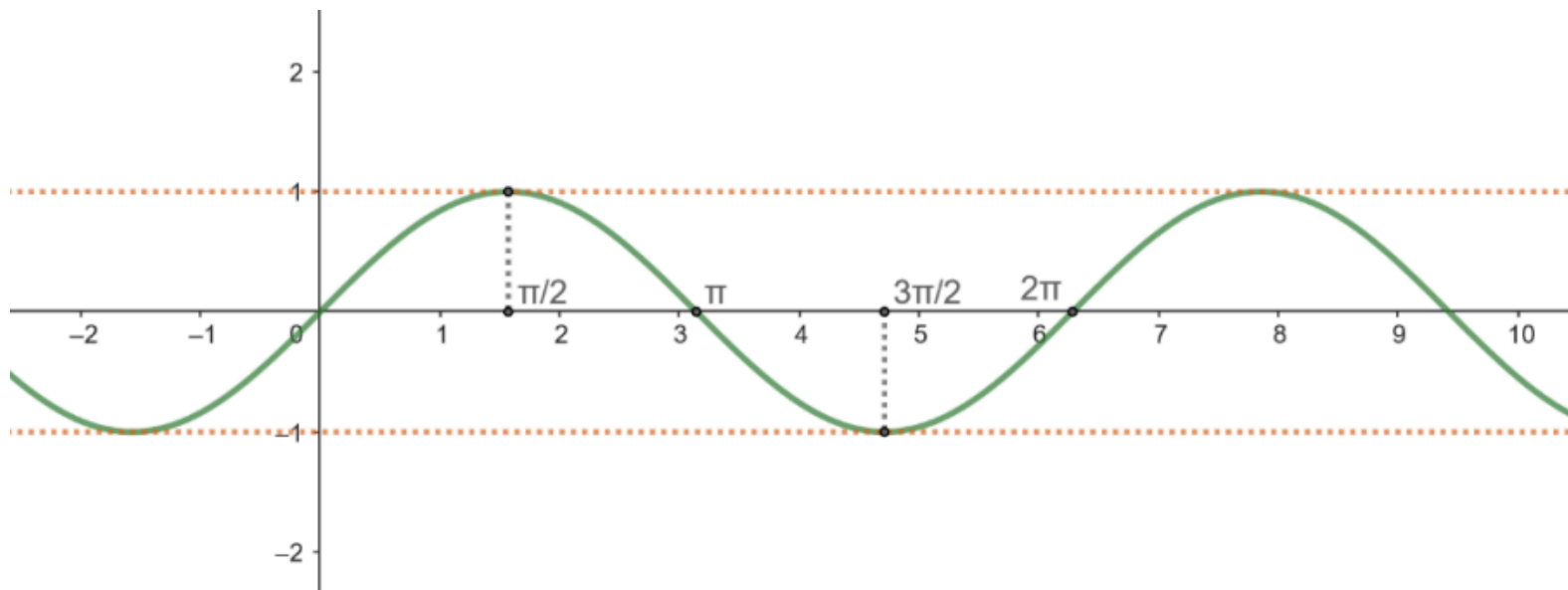
Επειδή ισχύει ότι $\eta\mu(-x)=-\eta\mu(x)$, η συνάρτηση είναι περιττή με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Για την μονοτονία της συνάρτησης παίρνουμε:

$$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \eta\mu x \nearrow$$

$$x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow \eta\mu x \searrow$$

$$x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \rightarrow \eta\mu x \nearrow$$



Η συνάρτηση $f(x)=\cos x$ είναι περιοδική συνάρτηση, με περίοδο $T=2\pi$.

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 1 και η ελάχιστη -1.

Στο διάστημα $[0,2\pi]$ έχουμε:

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

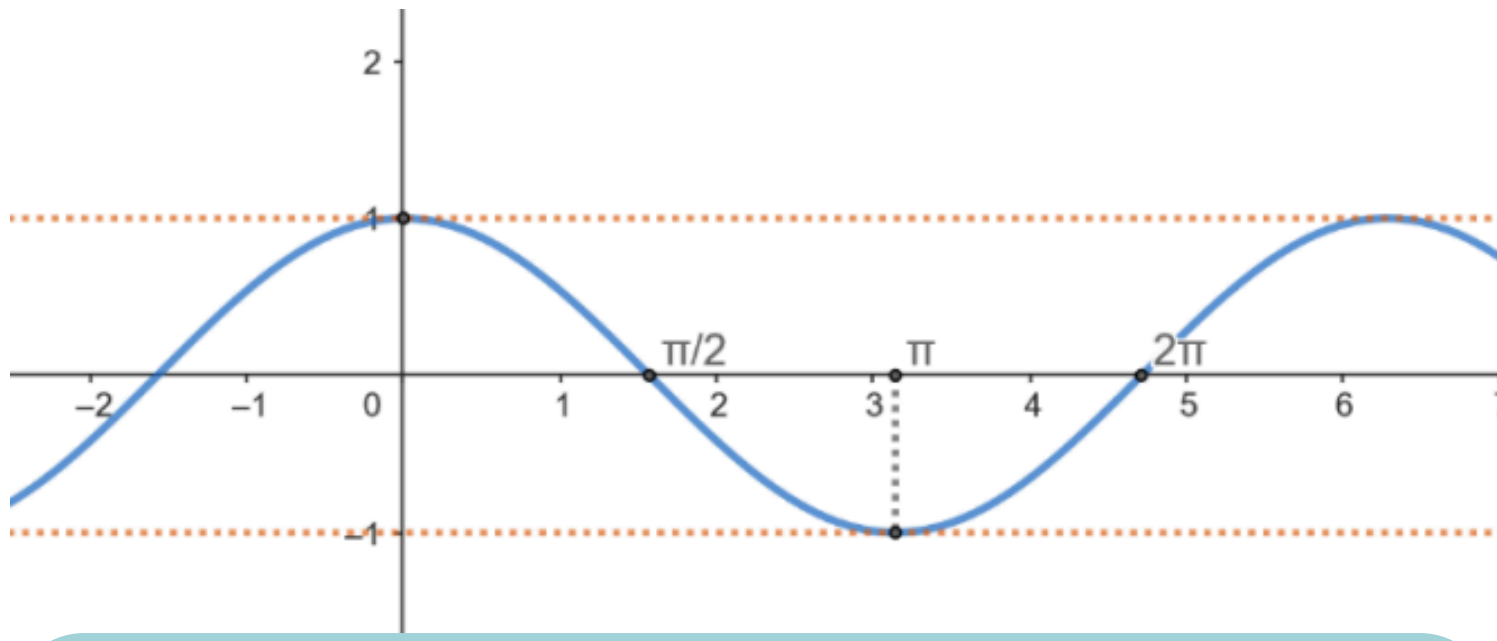
$$\cos 2\pi = 1$$

Επειδή ισχύει ότι $\cos(-x)=\cos(x)$, η συνάρτηση είναι άρτια με άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

Για την μονοτονία της συνάρτησης παίρνουμε:

$$x \in (0, \pi) \rightarrow \cos x \searrow$$

$$x \in (\pi, 2\pi) \rightarrow \cos x \nearrow$$



Η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική συνάρτηση, με περίοδο $T=\pi$.

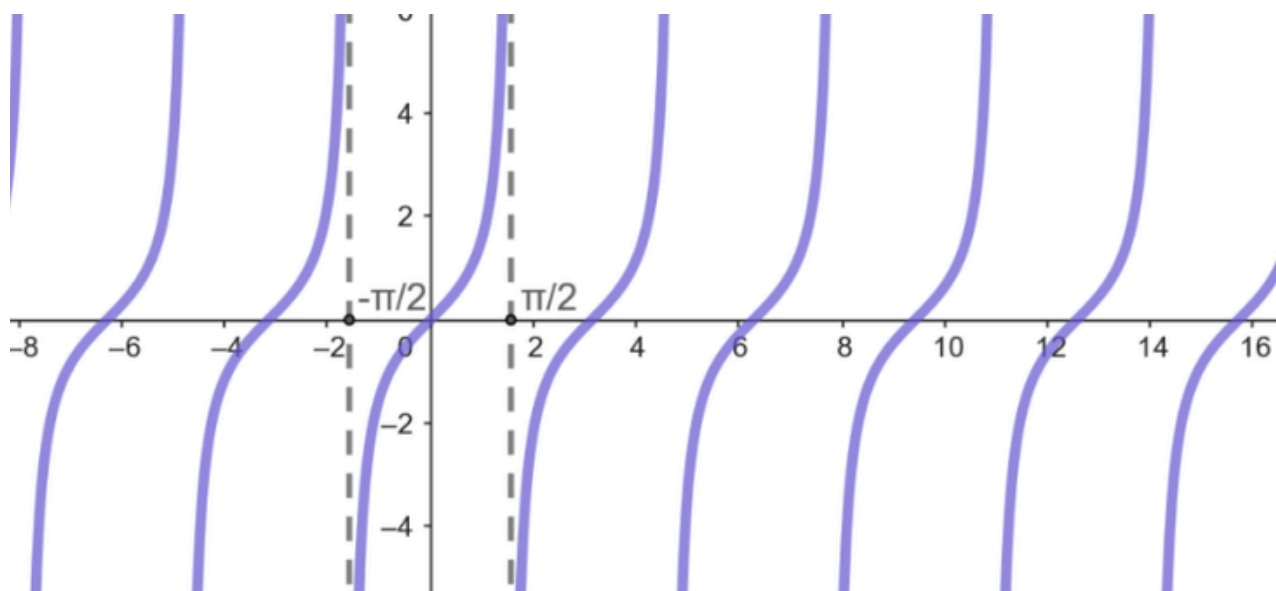
Η συνάρτηση δεν ορίζεται στα σημεία $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$

Δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

Οι ευθείες $x=\frac{\pi}{2}$ και $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης.

Για την μονοτονία της συνάρτησης παίρνουμε: $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \varepsilon\varphi x \nearrow$

Επειδή ισχύει ότι $\varepsilon\varphi(-x)=-\varepsilon\varphi(x)$, η συνάρτηση είναι περιττή με κέντρο συμμετρίας το σημείο $O(0,0)$.





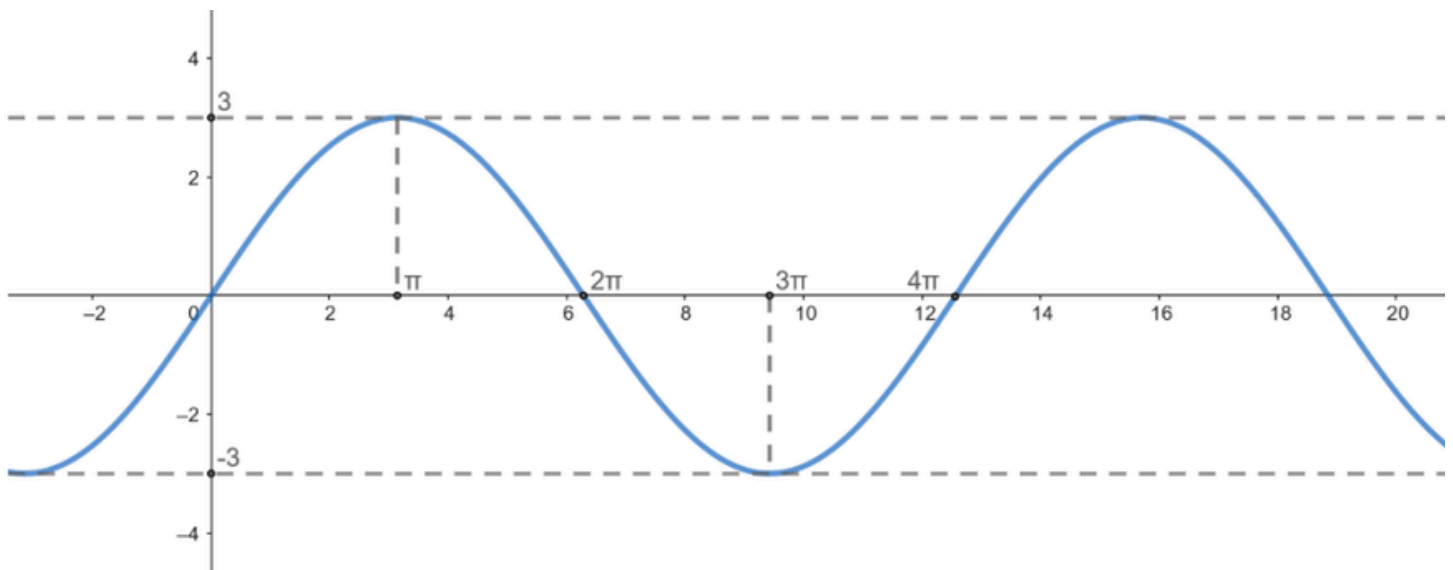
1. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3\eta\mu(\frac{x}{2})$.

Κάθε τιμή της συνάρτησης $g(x) = \eta\mu(\frac{x}{2})$ επαναλαμβάνεται, όταν το $\frac{x}{2}$ αυξηθεί κατά 2π που σημαίνει ότι η τιμή αυτή επαναλαμβάνεται, όταν το x αυξηθεί κατά 4π .

Επομένως, η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu(\frac{x}{2})$ είναι περιοδική με περίοδο 4π .

Οι τιμές της συνάρτησης $h(x) = 3\eta\mu(x)$ είναι προφανώς τριπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$.

Οπότε παίρνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:



Γενικά όταν έχουμε μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, $\rho > 0$ και αντίστοιχα $g(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega x)$ παίρνουμε :

- μέγιστη τιμή ρ και ελάχιστη τιμή $-\rho$
- περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin(\pi + 4x) + 3\eta\mu(\frac{9\pi}{2} - 4x)$.

Να απλοποιήσετε την συνάρτηση και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Για την συνάρτηση παίρνουμε:

$$\sin(\pi + 4x) = -\sin(4x)$$

$$\eta\mu(\frac{9\pi}{2} - 4x) = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - 4x) = \sin(4x)$$

Οπότε έχουμε $f(x) = \sin(\pi + 4x) + 3\eta\mu(\frac{9\pi}{2} - 4x) = -\sin(4x) + 3\sin(4x) = 2\sin(4x)$.

$f(x) = 2\sin(4x)$, άρα έχει μέγιστη τιμή 2 και ελάχιστη τιμή -2.

Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Παίρνουμε διαδοχικά για τη συνάρτηση:

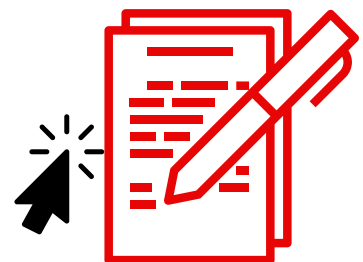
$$f(0) = 2\sin(4 \cdot 0) = 2\sin 0 = 0$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin(4 \cdot \frac{\pi}{2}) = 2\sin 2\pi = 0$$

$$f(\pi) = 2\sin(4 \cdot \pi) = 0$$

$$f(\frac{3\pi}{2}) = 2\sin(4 \cdot \frac{3\pi}{2}) = 2\sin 6\pi = 0$$

$$f(2\pi) = 2\sin(4 \cdot 2\pi) = 2\sin(8\pi) = 0$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Επιπλέον βρίσκουμε εύκολα ότι:

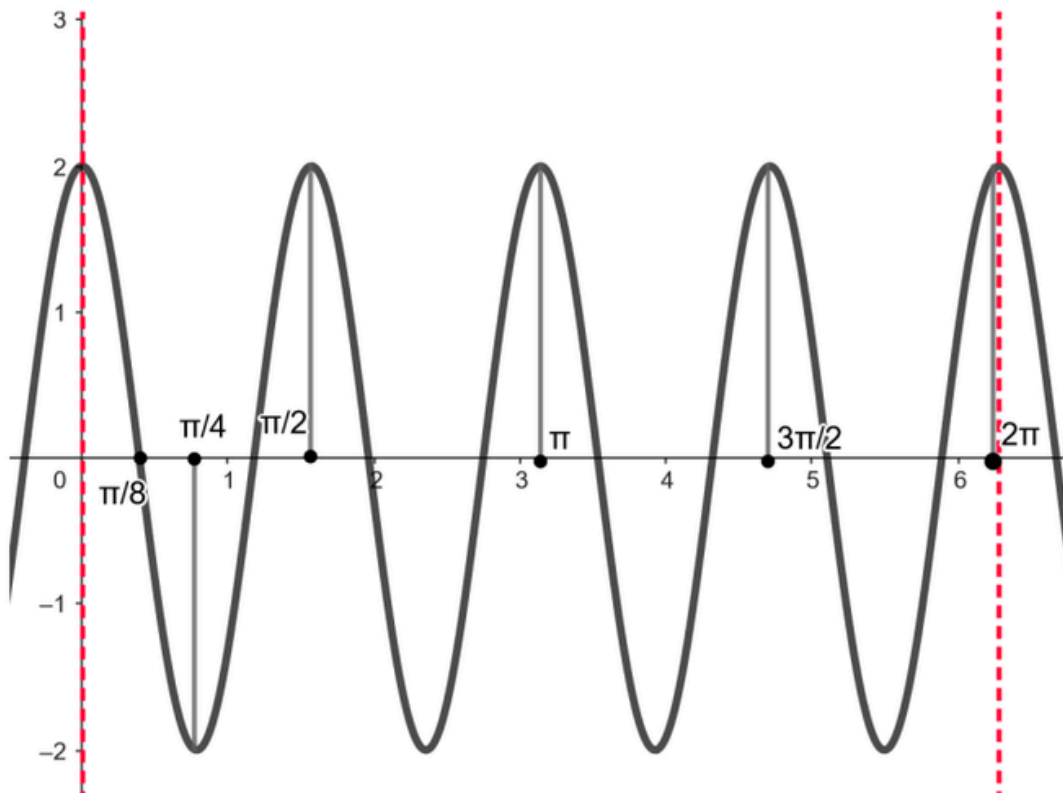
$$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sigma\upsilon\nu\left(4\cdot\frac{\pi}{8}\right)=2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sigma\upsilon\nu\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2\sigma\upsilon\nu\pi=-2$$

Οπότε πλέον έχουμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης που θα μας βοηθήσει στη σχεδίαση της γραφικής παράστασης.

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
f(x)	2	0	-2	2	2	2

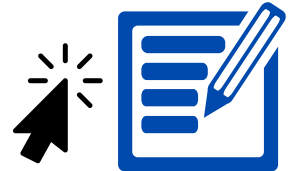
Η συνάρτηση έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$ και όπως επιβεβαιώνει ο πίνακας τιμών, θα ολοκληρώνει έναν «κύκλο» κάθε $\frac{\pi}{2}$.





5. ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η εξίσωση $\eta\mu x = a$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = a$, δηλαδή αν ισχύει ότι $\eta\mu \theta = a$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x = 2k\pi + \theta$$

$$\text{ή} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi + (\pi - \theta)$$

Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = a$

Αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = a$, δηλαδή αν ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu \theta = a$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x = 2k\pi + \theta$$

$$\text{ή} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi - \theta$$

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \alpha$

Αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης $\varepsilon\varphi x = \alpha$, δηλαδή αν ισχύει ότι $\varepsilon\varphi \theta = \alpha$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x = 2k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Τον ίδιο τύπο χρησιμοποιούμε για να λύσουμε και την εξίσωση $\sigma\varphi x = \alpha$.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$.

Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ οπότε $\eta\mu(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

Συνεπώς παίρνουμε την εξίσωση $\eta\mu x = \eta\mu(-\frac{\pi}{6})$.

Χρησιμοποιώντας τους τύπους παίρνουμε:

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$

ή $k \in \mathbb{Z}$

$$x = 2k\pi + (\pi - (-\frac{\pi}{6})) = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση $\sin 2x = 1$.

Γνωρίζουμε ότι $\sin 0 = 1$, συνεπώς έχουμε $\sin 2x = \sin 0$ και χρησιμοποιώντας τους τύπους παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 2x &= 2k\pi \\ \text{ή} \quad , k \in \mathbb{Z} \quad \text{δηλαδή} \quad 2x &= 2k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{άρα} \quad x = k\pi + \frac{\theta}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x &= 2k\pi \end{aligned}$$

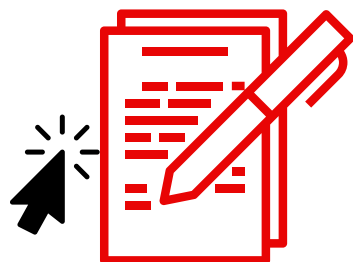
Παρατηρούμε ότι στη παραπάνω εξίσωση, ο άγνωστος μέσα στον τριγωνομετρικό αριθμό έχει την μορφή $2x$ οπότε αφού επιλύσουμε την εξίσωση, θα χρειαστεί να διαιρέσουμε το αποτέλεσμα με το 2.

3. Να λυθεί η εξίσωση $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Γνωρίζουμε ότι $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε $\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Συνεπώς παίρνουμε: $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{3\pi}{4}$ και οι λύσεις της εξίσωσης προκύπτουν με την αξιοποίηση των τύπων:

$$\begin{aligned} x + \frac{\pi}{4} &= 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \\ \text{ή} \quad , k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x + \frac{\pi}{4} &= 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \\ \text{ή} \quad , k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad x &= 2k\pi - \pi \end{aligned}$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

4. Να λυθεί η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Οπότε παίρνουμε $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6}$.

Από τον τύπο προκύπτει ότι $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

5. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu(2\omega + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, με $0 \leq \omega \leq 4\pi$.

Ξέρουμε ότι $\eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ δηλαδή έχουμε $\eta\mu(2\omega + \frac{\pi}{3}) = \eta\mu \frac{\pi}{6}$ και παίρνουμε:

$$\begin{array}{lll} 2\omega + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} & 2\omega = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} & \omega = \kappa\pi - \frac{\pi}{12} \\ \text{ή} & \text{ή} & \text{ή} \\ & , \kappa \in \mathbb{Z} & , \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow & , \kappa \in \mathbb{Z} \\ 2\omega + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} & 2\omega = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} & \omega = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \end{array}$$

Γνωρίζουμε ότι $0 \leq \omega \leq 4\pi$ οπότε παίρνουμε τις περιπτώσεις:

$$\begin{array}{ll} 0 \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{12} \leq 4\pi & 0 \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq 4\pi \\ \frac{\pi}{12} \leq \kappa\pi \leq \frac{13\pi}{3} & \text{και} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \kappa\pi \leq \frac{15\pi}{4} \\ \frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{13}{3} & -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{15}{4} \\ \kappa = 1, 2, 3, 4 & \kappa = 0, 1, 2, 3 \end{array}$$

Και τις γωνίες ω που προκύπτουν αντίστοιχα.

6. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Δίνεται προς επίλυση μία εξίσωση που περιέχει δύο διαφορετικούς τριγωνομετρικούς αριθμούς. Συνεπώς θα χρειαστεί να εμφανίσουμε έναν τριγωνομετρικό αριθμό για να λύσουμε την εξίσωση. Θα αξιοποιήσουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες και παίρνουμε:

$$\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega - (1 - \eta\mu^2\omega) = 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2\omega = 2 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm 1$$

και στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση με τον γνωστό τρόπο.

7. Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2\omega - 5\sigma\upsilon\nu\omega + 4 = 0$.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση παραπέμπει σε δευτεροβάθμια εξίσωση οπότε θα αντικαταστήσουμε $\sigma\upsilon\nu\omega = \kappa$, $-1 \leq \kappa \leq 1$ και παίρνουμε:

$$\kappa^2 - 5\kappa + 4 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 16 = 9 > 0 \quad \text{και} \quad \kappa_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{matrix} \kappa_1 = 4 > 1, \text{απορ.} \\ \kappa_2 = 1 \end{matrix}$$

Δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\omega = 1$ και λύνουμε την εξίσωση με τον γνωστό τρόπο.

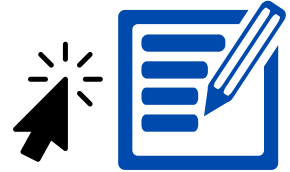


4

πολυώνυμα-πολυωνυμικές Εξισώσεις



1. ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Τι ονομάζεται μονώνυμο;

Μονώνυμο του x είναι κάθε παράσταση της μορφής ax^v , όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός και v ένας θετικός ακέραιος. Μονώνυμο καλούμε επίσης κάθε πραγματικό αριθμό.

Τι ονομάζεται πολυώνυμο;

Πολυώνυμο του x είναι κάθε παράσταση της μορφής $a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ όπου v είναι φυσικός αριθμός και $a_v, a_{v-1}, \dots, a_0$ πραγματικοί αριθμοί.

Ποιοι είναι οι σταθεροί όροι ενός πολυωνύμου;

Τα μονώνυμα $a_v x^v, a_{v-1} x^{v-1}, \dots, a_0$ λέγονται όροι του πολυωνύμου, το a_0 ειδικά λέγεται σταθερός όρος και οι αριθμοί $a_v, a_{v-1}, \dots, a_0$ συντελεστές.

Πότε δύο πολυώνυμα λέγονται ίσα;

Δυο πολυώνυμα $a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_\mu x + \beta_0$ θα λέγονται ίσα όταν $a_0 = \beta_0, a_1 = \beta_1, \dots, a_v = \beta_v$ και $a_{v+1} = a_{v+2} = \dots = 0$.

Τι ονομάζουμε βαθμό πολυωνύμου;

Βαθμό πολυωνύμου $P(x)$ ονομάζουμε τον αριθμό που είναι ίσος με τον μεγαλύτερο εκθέτη με τον οποίο εμφανίζεται η μεταβλητή του πολυωνύμου.

Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν και για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

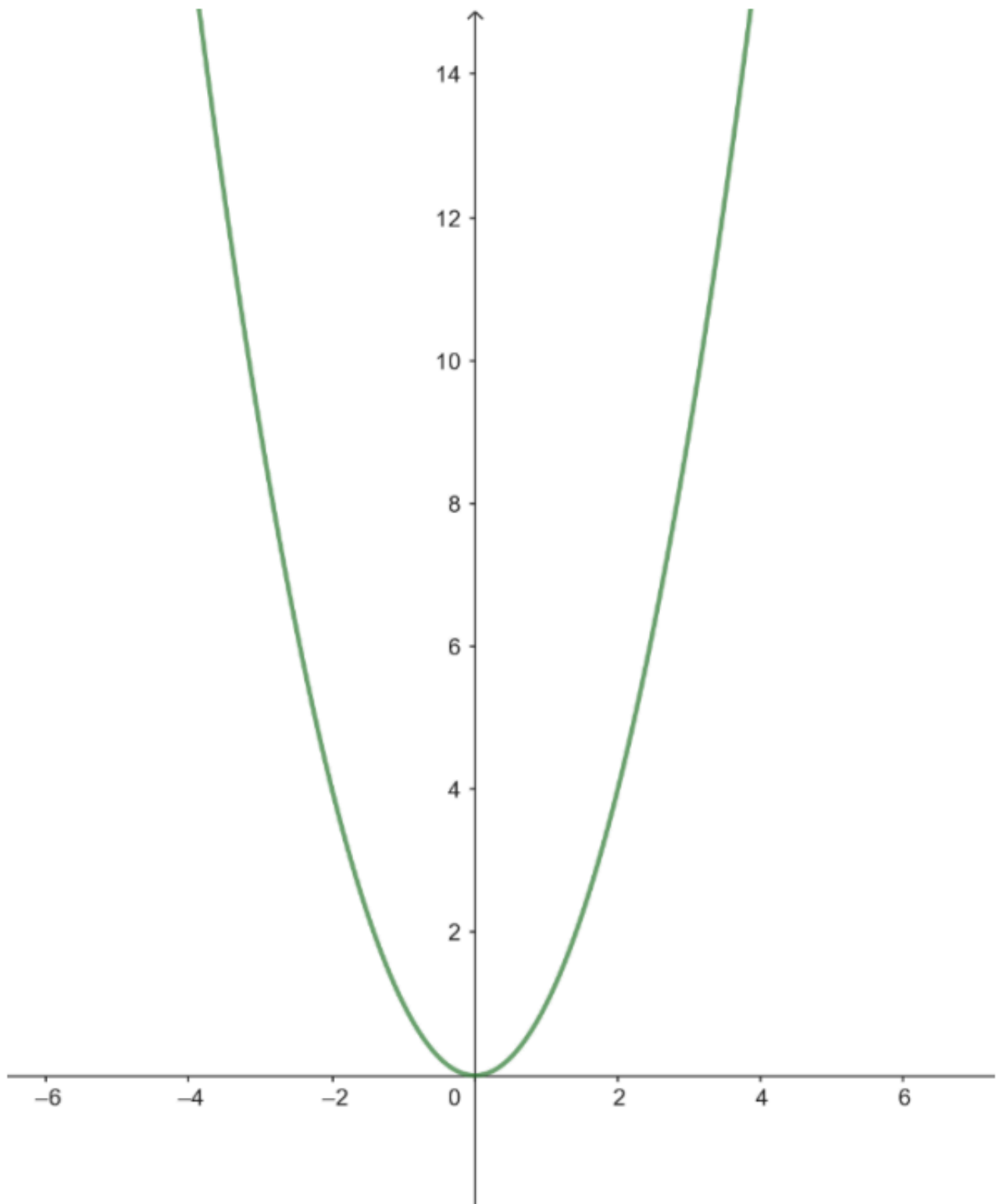
Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή πολυωνύμου;

Αριθμητική τιμή $P(\rho)$ πολυωνύμου για $x=\rho$ είναι ο πραγματικός αριθμός που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό ρ . Αν είναι $P(\rho) = 0$, τότε ο ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου.

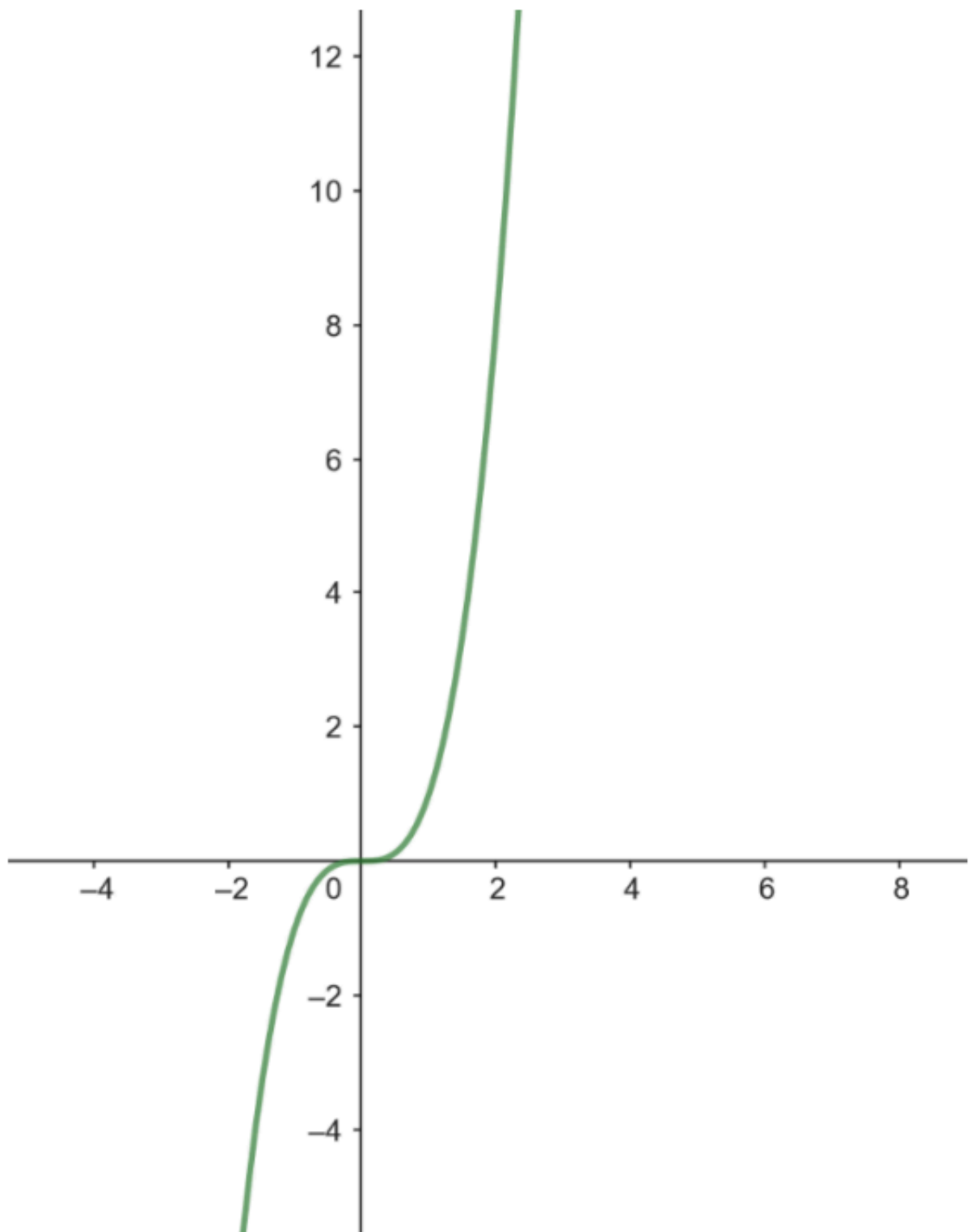
Τα πολυώνυμα είναι και πολυωνυμικές συναρτήσεις, οπότε μπορούν να αναπαρασταθούν με τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Για παράδειγμα:

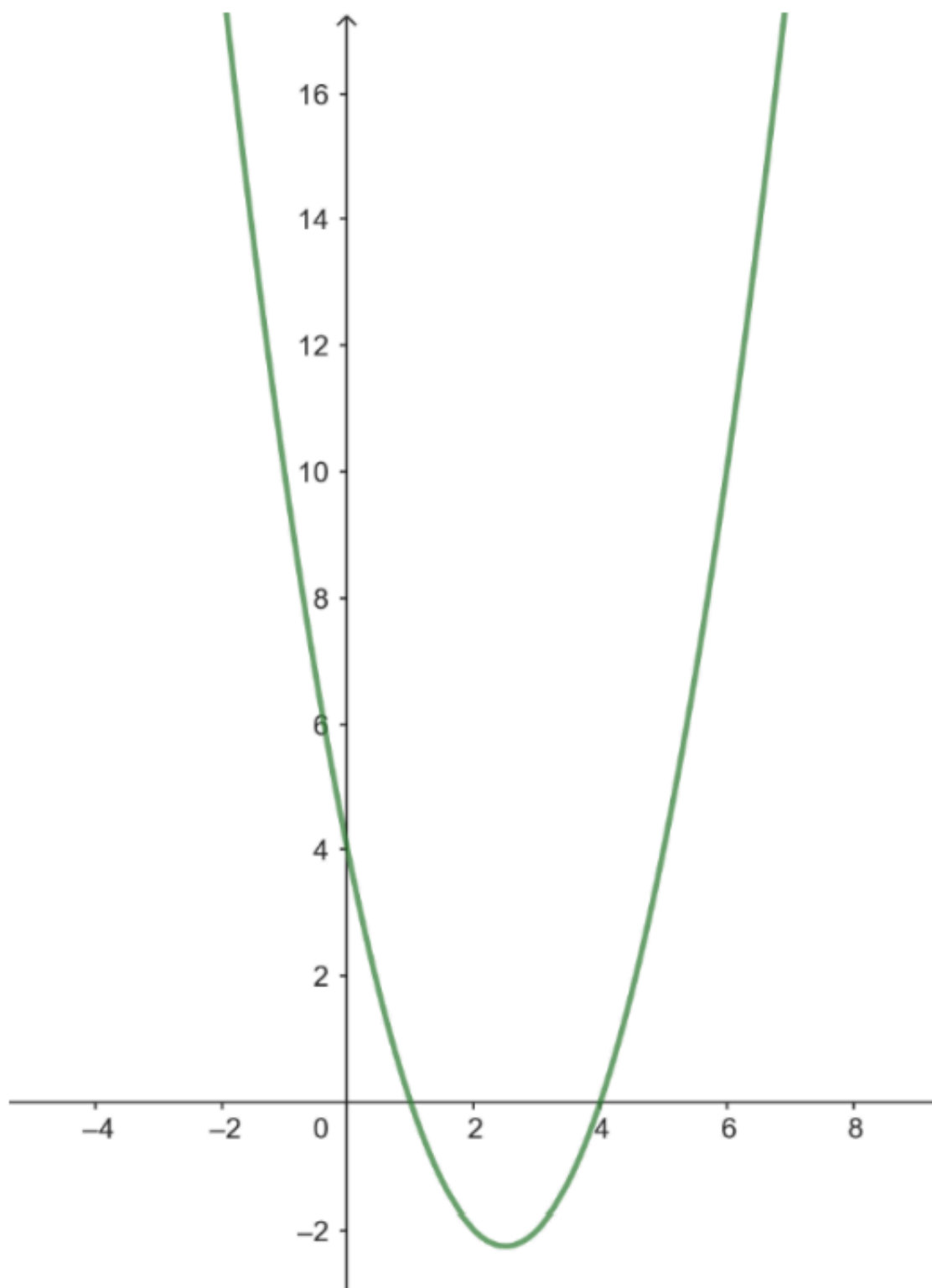
Για το πολυώνυμο $P(x) = x^2$ έχουμε:



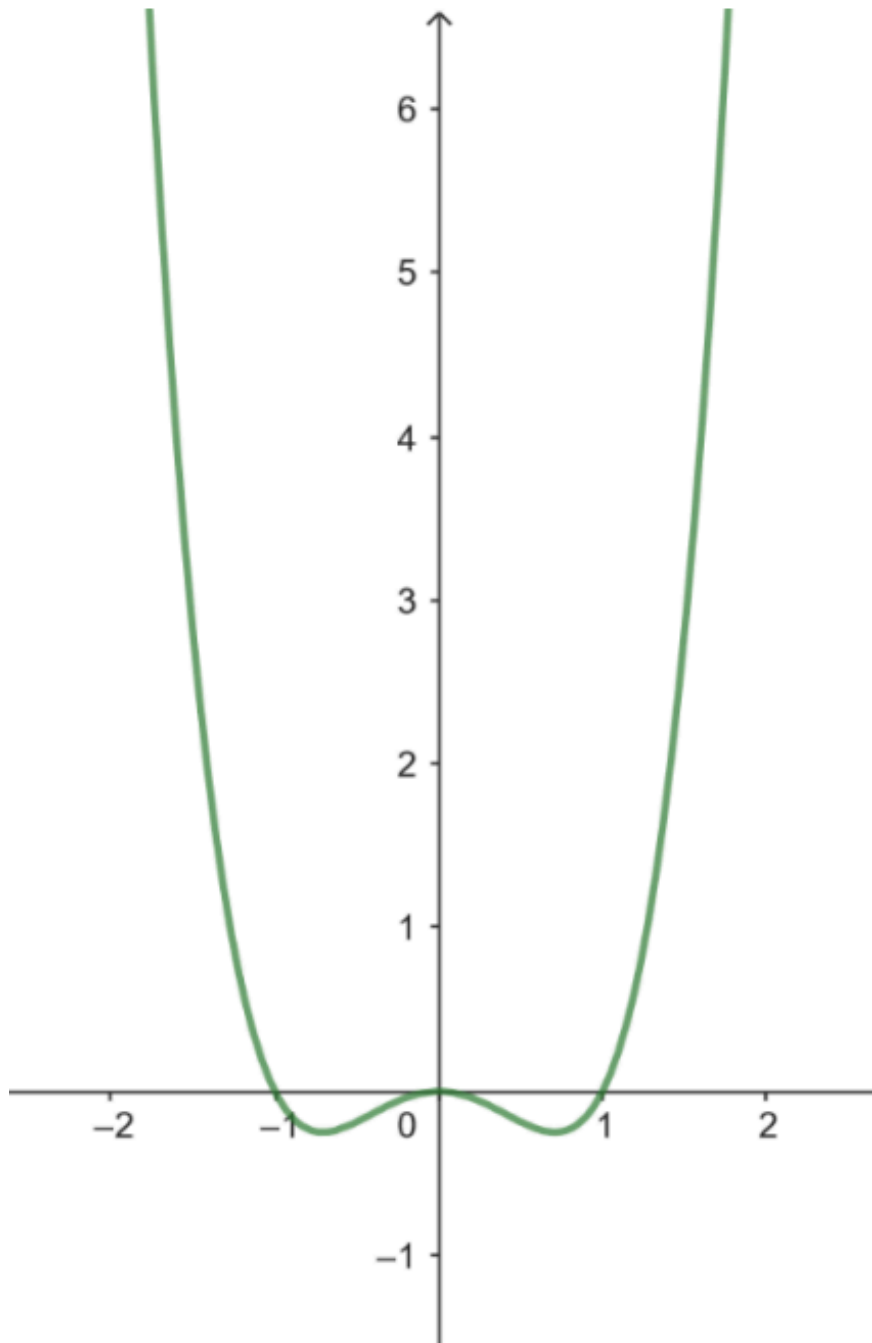
Για το πολυώνυμο $P(x) = x^3$ έχουμε:



Για το πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 5x + 4$ έχουμε:



Για το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^2$ έχουμε:



Παρατηρούμε ότι με τις γραφικές παραστάσεις των πολυωνυμικών συναρτήσεων μπορούμε να εντοπίσουμε τις ιδιότητες, τα σημεία τομής με τους άξονες, κ.λ.π.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x ;

α. $2x - x^2$

β. $\sqrt{x} + \frac{1}{2}$

γ. $\frac{x}{3} - \sqrt{2}$

δ. $\frac{2}{x} + x^{\frac{1}{2}}$

Πολυώνυμα είναι οι παραστάσεις α και γ.

Η παράσταση β δεν είναι πολυώνυμο γιατί εμφανίζεται ο όρος $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, συνεπώς ο εκθέτης της μεταβλητής δεν είναι φυσικός αριθμός.

Η παράσταση δ δεν είναι πολυώνυμο γιατί οι εκθέτες της μεταβλητής δεν είναι φυσικοί αριθμοί.

**2. Αν $P(x) = x^2 - 3x + 2$ και $K(x) = x^2 - 1$, να βρείτε τα πολυώνυμα:
 $\Lambda(x) = P(x) - K(x)$ και $M(x) = P(x) \cdot K(x)$.**

$$\Lambda(x) = P(x) - K(x) = x^2 - 3x + 2 - (x^2 - 1) = x^2 - 3x + 2 - x^2 + 1 = -3x + 3$$

$$M(x) = P(x) \cdot K(x) = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 1) = x^5 - x^2 - 3x^3 + 3x + 2x^2 - 2 = x^5 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$$

**3. Να βρείτε για ποια τιμή του λ ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου:
 $P(x) = x^3 - \lambda x^2 - 4x + 2$**

Για να είναι ρίζα ο αριθμός 2 πρέπει

$$\begin{aligned} P(2) &= 0 \\ 2^3 - \lambda \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 &= 0 \\ 8 - 4\lambda - 8 + 2 &= 0 \\ -4\lambda &= -2 \\ \lambda &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



4. Να βρείτε για ποιες τιμές των α, β το πολυώνυμο $P(x) = -2x^4 + 3x^3 - \alpha x + \beta$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -1.

Για να έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -1 ισχύει:

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^3 - \alpha \cdot 1 + \beta = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \beta = -1$$

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot (-1)^4 + 3 \cdot (-1)^3 - \alpha \cdot (-1) + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$$

Συνεπώς έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} -\alpha + \beta &= -1 \\ \alpha + \beta &= 5 \end{aligned} \quad , \text{ και εύκολα βρίσκουμε } \alpha=3 \text{ και } \beta=2.$$

5. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει ότι:

$$P(x) \cdot (x - 1) = 10x^3 - 7x^2 + 2x - 5$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο είναι ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού. Αφού το $x-1$ είναι 1ου βαθμού συμπεραίνουμε ότι το $P(x)$ πρέπει να είναι 2ο βαθμού. Συνεπώς θα είναι της μορφής $P(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

$$P(x) \cdot (x - 1) = 10x^3 - 7x^2 + 2x - 5 \Leftrightarrow (ax^2 + bx + \gamma) \cdot (x - 1) = 10x^3 - 7x^2 + 2x - 5$$

$$ax^3 - ax^2 + bx^2 - bx + \gamma x - \gamma = 10x^3 - 7x^2 + 2x - 5$$

$$ax^3 + (-a + b)x^2 + (-b + \gamma)x - \gamma = 10x^3 - 7x^2 + 2x - 5$$

$$a = 10$$

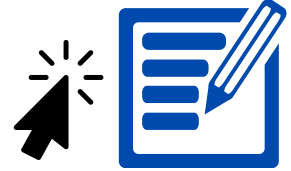
$$-a + b = -7 \Leftrightarrow b = 3$$

$$-b + \gamma = 2 \Leftrightarrow \gamma = 5$$





2. ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Πώς ορίζεται η διαίρεση στα πολυώνυμα;

Η διαίρεση των πολυωνύμων είναι ανάλογη με την Ευκλείδεια Διαίρεση.

Συγκεκριμένα ισχύει:

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$ όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης, το $\pi(x)$ πηλίκο και το $\upsilon(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης.

2. Πότε μια διαίρεση λέγεται τέλεια;

Αν σε μία διαίρεση είναι $\upsilon(x)=0$, τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται: $\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x)$

Σε αυτή τη περίπτωση λέμε:

- το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$
- το $\delta(x)$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$
- το $\delta(x)$ είναι διαιρέτης του $\Delta(x)$
- το $\Delta(x)$ διαιρείται με το $\delta(x)$

3. Θεώρημα: Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Δηλαδή $u=P(\rho)$.

Απόδειξη:

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-\rho$ γράφεται:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + u(x)$$

Ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο u .

Έτσι έχουμε: $P(x) = (x - \rho)\pi(x) + u$ και αν θέσουμε $x=\rho$ παίρνουμε:

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + u = 0 + u = u.$$

Επομένως έχουμε: $P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$

4. Θεώρημα: Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$.

Απόδειξη:

Έστω ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

$$\text{Τότε: } P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x).$$

Από την ισότητα, για $x=\rho$, παίρνουμε: $P(\rho) = (\rho - \rho) \cdot \pi(\rho) = 0$, που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντιστρόφως: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho)=0$. Τότε από τη σχέση $P(x) = (x - \rho)\pi(x) + P(\rho)$ παίρνουμε $P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x)$, που σημαίνει ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

5. Διαίρεση με σχήμα Horner:

Αν θέλουμε να βρούμε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με ένα πολυώνυμο της μορφής $x - \rho$ τότε μπορούμε να αξιοποιήσουμε το σχήμα Horner.

Κατασκευάζουμε έναν πίνακα ως εξής:

- Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου $P(x)$ και στην πρώτη θέση της τρίτης γραμμής τον πρώτο συντελεστή του $P(x)$.
- Κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής προκύπτει με πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της τρίτης γραμμής επί ρ .
- Κάθε άλλο στοιχείο της τρίτης γραμμής προκύπτει ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης και δεύτερης γραμμής.

Το τελευταίο στοιχείο της τρίτης γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - \rho)$, δηλαδή η τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$. Τα άλλα στοιχεία της τρίτης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.

Αν λείπει κάποια δύναμη του x , τότε συμπληρώνουμε με 0 τους συντελεστές των δυνάμεων του x που δεν υπάρχουν.



Λυμένα Παραδείγματα



VIDEO ΜΑΘΗΜΑ

1. Κάνε τη διαίρεση $24x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 20$ με $2x^2 + 5$.

$$\begin{array}{r|l}
 24x^5 - 10x^3 + 12x^2 - 20 & 2x^2 + 5 \\
 \underline{-24x^5 - 60x^3} & 12x^3 - 35x + 6 \\
 -70x^3 + 12x^2 & \\
 \underline{-70x^3 + 0x^2 + 175x} & \\
 12x^2 + 175x - 20 & \\
 \underline{12x^2 + 0x + 30} & \\
 175x - 50 &
 \end{array}$$

Οπότε παίρνουμε $24x^4 - 10x^3 + 12x^2 - 20 = (2x^2 + 5) \cdot (12x^3 - 35x + 6) + 175x - 50$

2. Βρες το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x) = 50x^{70} - 32x^{24} + 67x^3 - 4$ με το $x-1$.

Για να βρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x-1$ αρκεί να υπολογίσουμε το $P(1)$.

$$P(1) = 50 \cdot 1^{70} - 32 \cdot 1^{24} + 67 \cdot 1^3 - 4 = 50 - 32 + 67 - 4 = 81.$$

$$\text{Άρα } \upsilon = P(1) = 81$$

3. Βρες για ποια τιμή του μ , το $x+2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = \mu x^2 + (\mu^2 - 1)x + 4$.

Για να είναι παράγοντας το $x+2$ αρκεί να πάρουμε $P(-2)=0$. Οπότε έχουμε:

$$P(-2) = \mu(-2)^2 + (\mu^2 - 1)(-2) + 4 = 0$$

$$4\mu - 2\mu^2 + 2 + 4 = 0$$

$$-2\mu^2 + 4\mu + 6 = 0$$

$$\mu^2 - 2\mu - 3 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$\mu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$\mu_1 = 3 \quad \mu_2 = -1$$

Συνεπώς για $\mu=3$ ή $\mu=-1$, το $x+2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

4. Κάνε τις διαιρέσεις αξιοποιώντας το σχήμα Horner.

- $(-2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 3x + 4)(x + 2)$

Θα φτιάξουμε τον πίνακα:

$$\begin{array}{cccc|c} -2 & -4 & 2 & -3 & 4 & -2 \\ \downarrow & & & & & \\ -2 & 0 & 2 & -7 & 18 & \end{array}$$



Οπότε έχουμε:

$$\pi(x) = -2x^3 + 0x^2 + 2x - 7 = -2x^3 + 2x - 7$$

$$\upsilon(x) = 18$$

- $(x^5 + x^3 - 1)(x - 1)$

Θα φτιάξουμε τον πίνακα, προσέχοντας να βάλουμε μηδέν για τις δυνάμεις του x που λείπουν.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \downarrow & & & & & & \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & -1 & \end{array}$$

Οπότε έχουμε:

$$\pi(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2$$

$$\upsilon(x) = -1$$

5. Βρες το $P(5)$ και το $P(-3)$ στο πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 + 20x - 6$.

Για να βρούμε τα $P(2)$ και $P(-3)$ αρκεί να υπολογίσουμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με τα $x-2$ και $x+3$ αντίστοιχα. Θα αξιοποιήσουμε το σχήμα Horner και παίρνουμε:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 0 & -4 & 0 & 20 & -6 & 2 \\ \downarrow & 2 & 4 & 0 & 0 & 40 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 20 & \boxed{34} & \end{array}$$

Οπότε $P(2)=34$

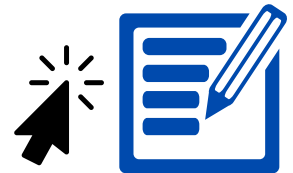
$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 0 & -4 & 0 & 20 & -6 & -3 \\ \downarrow & -3 & 9 & -15 & 45 & -195 & \\ \hline 1 & -3 & 5 & -15 & 65 & \boxed{-201} & \end{array}$$

Οπότε $P(-3)=-201$





3. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ονομάζουμε πολυωνυμική εξίσωση;

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \text{ με } a_n \neq 0.$$

2. Τι ονομάζουμε ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης;

Ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ δηλαδή κάθε αριθμό } \rho \text{ για τον οποίο ισχύει } P(\rho) = 0.$$

3. Πώς λύνουμε μια πολυωνυμική εξίσωση;

Για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x) = 0$, παραγοντοποιούμε το $P(x)$ σε μορφή $P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \dots \cdot P_v(x)$ και αναγόμεντες έτσι στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων μικρότερου βαθμού.

4. Θεώρημα Ακέραιων Ριζών

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

Απόδειξη:

Αν ο $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε:

$$a_v \rho^v + a_{v-1} \rho^{v-1} + \dots + a_1 \rho + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_0 = -a_v \rho^v - a_{v-1} \rho^{v-1} - \dots - a_1 \rho$$

$$a_0 = \rho(-a_v \rho^{v-1} - a_{v-1} \rho^{v-2} - \dots - a_1)$$

Αφού $\rho, a_1, a_2, \dots$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και $-a_v \rho^{v-1} - a_{v-1} \rho^{v-2} - \dots - a_1$ είναι ακέραιος.

Από τη τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του a_0 .

5. Πώς βρίσκουμε το πρόσημο ενός πολυωνύμου $P(x)$;

Αν θέλουμε να μελετήσουμε το πρόσημο του πολυωνύμου $P(x)$, αρκεί να το γράψουμε στη μορφή $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$ και να μελετήσουμε τους παράγοντες ως προς το πρόσημό τους.

Θυμόμαστε ότι:

- οι παράγοντες της μορφής $ax + \beta$ με ρίζα $-\frac{\beta}{a}$ θα έχουν πρόσημο της μορφής:

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{a}$	$+\infty$
$ax + \beta$	ετερόσημο του a	0	ομόσημο του a

- οι παράγοντες της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με ρίζες $x_1 < x_2$ θα έχουν πρόσημο της μορφής:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + \beta x + \gamma$	ομόσημο του a	0	ετερόσημο του a	0	ομόσημο του a

- οι παράγοντες της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με διπλή ρίζα x_0 θα έχουν πρόσημο της μορφής:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + \gamma$	ομόσημο του a	0	ομόσημο του a

- οι παράγοντες της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$ που δεν έχουν ρίζα θα έχουν πρόσημο της μορφής:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + \gamma$	ομόσημο του a	

6. Πώς λύνουμε ανισώσεις της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0);

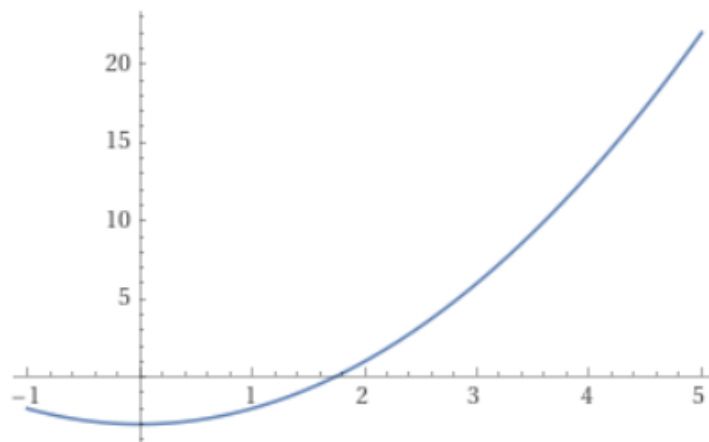
Για να λύσουμε την ανίσωση αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το γινόμενο είναι θετικό ή αρνητικό αντίστοιχα.

7. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη ρίζα μιας εξίσωσης χωρίς να τη βρούμε με ακρίβεια;

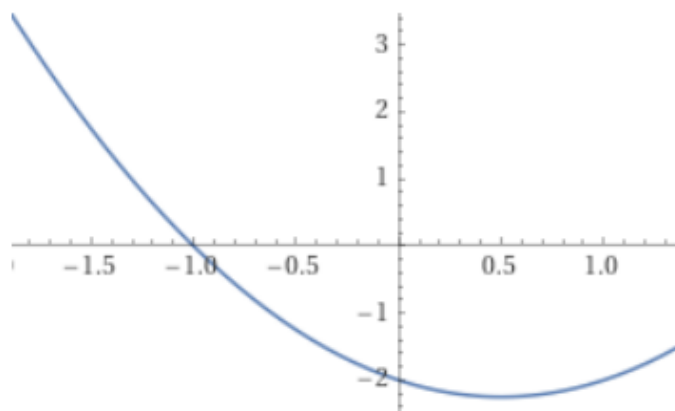
Έστω η συνάρτηση $f(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Αν για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ οι τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ της συνάρτησης είναι ετερόσημες, τότε υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ μεταξύ των α και β .

Το παραπάνω θεώρημα ερμηνεύεται γεωμετρικά:



Το $f(-1) < 0$ και το $f(3) > 0$, δηλαδή υπάρχουν δύο σημεία εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, δηλαδή η γραφική παράσταση της $f(x)$ θα περνάει υποχρεωτικά από τον άξονα $x'x$, δηλαδή θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα.



Το $f(-1,5) > 0$ και το $f(1) < 0$, δηλαδή υπάρχουν δύο σημεία εκατέρωθεν του άξονα x' , δηλαδή η γραφική παράσταση της $f(x)$ θα περνάει υποχρεωτικά από τον άξονα x' , δηλαδή θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα.



Λυμένα Παραδείγματα



1. Λύσε την παρακάτω εξίσωση $12x^4 - 14x^3 - 24x^2 + 6x + 4 = 0$.

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή του 4. Αυτοί είναι : -4, 4, -2, 2, -1, 1. Με σχήμα Horner θα εξετάσουμε αν κάποιος από αυτούς μηδενίζει το πολυώνυμο $P(x) = 12x^4 - 14x^3 - 24x^2 + 6x + 4$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} \text{Έχουμε:} & 12 & -14 & -24 & 6 & 4 & 1 \\ & \downarrow & 12 & -2 & -26 & -20 & \\ & 12 & -2 & -26 & -20 & \boxed{-16} & \end{array}$$

Το 1 δεν είναι ακέραιη ρίζα της εξίσωσης.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 12 & -14 & -24 & 6 & 4 & 2 \\ & \downarrow & 24 & 20 & -8 & -4 & \\ & 12 & 10 & -4 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Το 2 είναι ακέραιη ρίζα της εξίσωσης.

Επομένως το $x-2$ είναι παράγοντας και από το σχήμα Horner έχουμε:

$$12x^4 - 14x^3 - 24x^2 + 6x + 4 = (x - 2)(12x^3 + 10x^2 - 4x - 2) = 2(x - 2)(6x^3 + 5x^2 - 2x - 1)$$

Θα επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για το $6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0$.

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & 5 & -2 & -1 & -1 \\ \downarrow & & & & \\ 6 & -1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Το -1 είναι ακέραιη ρίζα της εξίσωσης.

Επομένως το $x+1$ είναι παράγοντας και από το σχήμα Horner έχουμε:

$$12x^4 - 14x^3 - 24x^2 + 6x + 4 = 2(x-2)(6x^3 + 5x^2 - 2x - 1) = 2(x-2)(x+1)(6x^2 - x - 1)$$

Για τον παράγοντα $6x^2 - x - 1 = 0$ έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 1 + 24 = 25 \text{ και } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 5}{12} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

Συνεπώς η αρχική εξίσωση έχει 4 ρίζες.

2. Βρες τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\varphi(x) = 2x^3 - 8x^2 + x + 11$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Για να βρούμε το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ αρκεί να βρούμε το

$$\varphi(0) = 2 \cdot 0^3 - 8 \cdot 0^2 + 0 + 11 = 11, \text{ άρα παίρνουμε το σημείο } A(0, 11).$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ θα χρειαστεί να βρούμε τις ρίζες του πολωνύμου, δηλαδή να πάρουμε $2x^3 - 8x^2 + x + 11 = 0$.

Από το θεώρημα ακεραίων ριζών και σχήμα Horner παίρνουμε:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -8 & 1 & 11 & -1 \\ \downarrow & & & & \\ 2 & -10 & 11 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\text{και } 2x^3 - 8x^2 + x + 11 = (x+1)(2x^2 - 10x + 11).$$

Για το $2x^2 - 10x + 11 = 0$ παίρνουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 11 = 100 - 88 = 12$

$$\text{και } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{10 \pm \sqrt{12}}{4} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{10 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{5 + \sqrt{3}}{2} \\ x_2 &= \frac{10 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{5 - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Οπότε βρίσκουμε τα σημεία Β(-1,0), Γ($\frac{5+\sqrt{3}}{2}$,0) και Δ($\frac{5-\sqrt{3}}{2}$,0).

3. Βρες το πρόσημο του γινομένου: $P(x) = (x^3 - x)(x^2 + 5x - 6)(x^2 + 2x + 2)$.

Θα εξετάσουμε τους επιμέρους παράγοντες:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$$

$$x^2 + 5x - 6 \text{ έχει } \Delta = 25 + 24 = 49 \text{ και } x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -6 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x + 2 \text{ έχει } \Delta = 4 - 8 = -4 < 0, \text{ συνεπώς δεν έχει ρίζες.}$$

Θα φτιάξουμε τον πίνακα πρόσημων:

x	$-\infty$	-6	-1	0	1	$+\infty$	
x	-	-	-	0	+	+	
x-1	-	-	-	-	0	+	
x+1	-	-	0	+	+	+	
$x^2 + 5x + 6$	+	0	-	-	0	+	
$x^2 + 2x + 2$	+	+	+	+	+	+	
P(x)	-	0	+	0	-	0	+

Συνεπώς: $P(x) > 0$ για $x \in (-6, -1) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και $P(x) < 0$ για $x \in (-\infty, -6) \cup (-1, 0)$

4. Λύσε την ανίσωση $2κ^3 - κ^2 + 2κ + 24 > 0$.

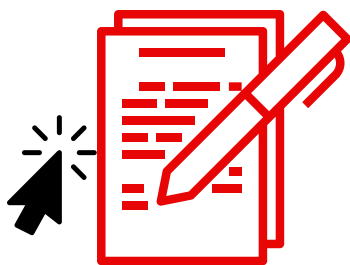
Χρησιμοποιούμε το σχήμα Horner και παίρνουμε:

$$\begin{array}{r|l} 2 & -1 & 2 & 24 & -2 \\ \downarrow & -4 & 10 & -24 & \\ 2 & -5 & 12 & \boxed{0} & \end{array} \quad 2κ^3 - κ^2 + 2κ + 24 = (κ + 2)(2κ^2 - 5κ + 12)$$

Για το $2κ^2 - 5κ + 12 = 0$ έχουμε $\Delta = 25 - 96 < 0$, οπότε για το πολυώνυμο $2κ^3 - κ^2 + 2κ + 24$ παίρνουμε τον πίνακα προσήμων:

κ	$-\infty$	-2	$+\infty$
$κ + 2$	-	0	+
$2κ^2 - 5κ + 12$	+	+	+
$2κ^3 - κ^2 + 2κ + 24$	-	+	+

Οπότε για να έχουμε $2κ^3 - κ^2 + 2κ + 24 > 0$ πρέπει $κ \in (-2, +\infty)$.



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

5. Μια βιομηχανία έχει υπολογίσει ότι για την παραγωγή μ μονάδων από ένα προϊόν έχει κόστος $K(\mu) = -2\mu^2 + 120\mu + 100$ (σε εκατοντάδες ευρώ) και έσοδα από τη πώληση $E(\mu) = \mu^3 - \mu^2 + 20\mu$ (σε εκατοντάδες ευρώ). Πόση πρέπει να είναι η παραγωγή ώστε η βιομηχανία να έχει κέρδος; Το εργοστάσιο παράγει τουλάχιστον 4 μονάδες προϊόντος και το πολύ 15 μονάδες.

Για να έχει κέρδος η βιομηχανία αρκεί $E(\mu) > K(\mu)$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu^3 - \mu^2 + 20\mu &> -2\mu^2 + 120\mu + 100 \\ \mu^3 + \mu^2 - 100\mu - 100 &> 0 \end{aligned}$$

Με σχήμα Horner έχουμε:

1	1	-100	-100	-1
↓	-1	0	100	
1	0	-100	0	

$\mu^3 + \mu^2 - 100\mu - 100 = (\mu + 1)(\mu^2 - 100) = (\mu + 1)(\mu - 10)(\mu + 10)$

μ	$-\infty$	-10	-1	+10	$+\infty$
$\mu+1$	-	-	0	+	+
$\mu-10$	-	-	-	0	+
$\mu+10$	-	0	+	+	+
Κέρδος	-	0	+	0	+

Για να έχει κέρδος η βιομηχανία θα πρέπει να κατασκευάζει πάνω από 10 μονάδες προϊόντος, δηλαδή $\mu \in (10,15]$.

6. Εξέτασε αν η εξίσωση $x^3 + 2x - 2 = 0$ έχει ρίζα μεταξύ των αριθμών 0 και 1. Μπορείς να την προσδιορίσεις με ακρίβεια εκατοστού;

Σκεφτόμαστε ότι στο πολυώνυμο $f(x) = x^3 + 2x - 2$ παίρνουμε $f(0)=-2$ και $f(1)=1$.

Συνεπώς υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ μεταξύ των 0 και 1.

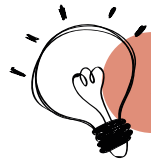
Χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή τσέπης παίρνουμε $f(0,5)=-0,875$, $f(0,8)=0,112$, $f(0,75)=-0,078$, $f(0,76)=-0,04$, $f(0,77)=-0,003$ οπότε συμπεραίνουμε ότι με ακρίβεια εκατοστού η λύση είναι ο αριθμός 0,77.





4. Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Υπάρχουν εξισώσεις, οι οποίες δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά με κατάλληλη διαδικασία η λύση τους ανάγεται σε λύση πολυωνυμικών εξισώσεων.



Λυμένα Παραδείγματα



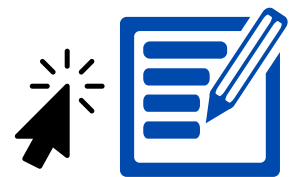
1. Λύσε την εξίσωση: $\frac{3x^2 - 1}{x - 1} - \frac{2}{x^2 - x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$.

Αρχικά πρέπει να προσδιορίσουμε και να αποκλείσουμε όλες τις τιμές που μηδενίζουν τους παρονομαστές.

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq 1$$

$$x \neq 0$$



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Στη συνέχεια θα γράψουμε τους παρονομαστές των κλασμάτων παραγοντοποιημένους.

$$\frac{3x^2 - 1}{x - 1} - \frac{2}{x(x - 1)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

Τώρα μπορούμε να βρούμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών, Ε.Κ.Π. = $x(x - 1)$.

$$\begin{aligned}\frac{(3x^2 - 1)x}{x(x-1)} - \frac{2}{x(x-1)} &= \frac{(x^2 - 3x + 2)(x-1)}{x(x-1)} \\ \frac{3x^3 - x - 2}{x(x-1)} &= \frac{x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x + 2x - 2}{x(x-1)} \\ \frac{3x^3 - x - 2}{x(x-1)} &= \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x(x-1)} \\ 3x^3 - x - 2 &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \\ 2x^3 + 4x^2 - 6x &= 0 \\ x(2x^2 + 4x - 6) &= 0\end{aligned}$$

Η εξίσωση έχει πλέον μορφή γινόμενου παραγόντων, οπότε θα πάρουμε ξεχωριστά:

$$\begin{aligned}x &= 0 \\ 2x^2 + 4x - 6 &= 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x - 3) = 0 \\ \Delta &= 4 + 12 = 16 > 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{matrix}\end{aligned}$$

Η εξίσωση $x(2x^2 + 4x - 6) = 0$ έχει 3 λύσεις, όμως μόνο η λύση $x = -3$ είναι δεκτή.

2. Λύσε την εξίσωση $x + 2\sqrt{x} - 15 = 0$.

Αρχικά θα θέσουμε $\sqrt{x} = \lambda \geq 0$, και η εξίσωση είναι της μορφής $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$.

Λύνουμε την εξίσωση ως δευτεροβάθμια με $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$ και

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -5, \text{ απορρίπτεται} \\ \lambda_2 = 3, \text{ δεκτή} \end{matrix}$$

Συνεπώς έχουμε $\lambda = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$.

3. Λύσε την ανίσωση: $1 - \sqrt{x} \geq 0$.

Αρχικά θα προσδιορίσουμε όλες τις τιμές για τις οποίες ορίζεται η υπόρριζη ποσότητα, οπότε θα έχουμε $x \geq 0$.

Για την ανίσωση έχουμε: $1 - \sqrt{x} \geq 0$

$$1 \geq \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

4. Λύσε την ανίσωση: $\frac{x}{3x-5} > \frac{2}{x-1}$.

Αρχικά πρέπει να προσδιορίσουμε και να αποκλείσουμε όλες τις τιμές που μηδενίζουν τους παρονομαστές, οπότε έχουμε $x \neq \frac{5}{3}$ και $x \neq 1$.

$$\frac{x}{3x-5} > \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{x}{3x-5} - \frac{2}{x-1} > 0$$

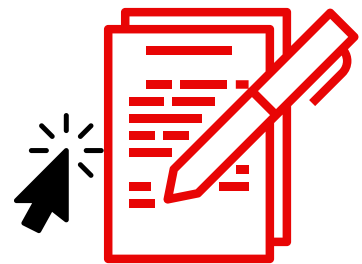
Θα λύσουμε την αντίστοιχη εξίσωση και θα φτιάξουμε στη συνέχεια πίνακα προσήμων.

$$\frac{x}{3x-5} - \frac{2}{x-1} = 0$$

$$\frac{x(x-1)}{(3x-5)(x-1)} - \frac{2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)} = 0$$

$$\frac{x^2 - x - 6x + 10}{(3x-5)(x-1)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{(3x-5)(x-1)} = 0$$



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Για παράσταση του αριθμητή παίρνουμε $x^2 - 7x + 10 = 0$,

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 \text{ και αντίστοιχα } x_{1,2} = \frac{7 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

οπότε πλέον μπορούμε να φτιάξουμε τον πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{3}$	2	5	$+\infty$			
x-1	-	~~0~~	+	+	+	+			
3x-5	-	-	~~0~~	+	+	+			
$x^2 - 7x + 10$	+	+	+	0	-	0	+		
$(3x-5)(x-1)$	+	~~0~~	-	~~0~~	+	0	-	0	+

Από τον πίνακα προκύπτει και το πρόσημο σε κάθε περίπτωση, για $\frac{x}{3x-5} > \frac{2}{x-1}$ έχουμε $x \in (-\infty, 1) \cup (\frac{5}{3}, 2) \cup (5, +\infty)$.

5. Λύσε την εξίσωση $2x^2 + x - 7 = \sqrt{2x^2 + x - 1}$.

Αρχικά θα βρούμε όλα τα x για τα οποία η υπόρριζη ποσότητα είναι μη αρνητική.

Έχουμε $2x^2 + x - 1 \geq 0$ και λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε $x \in (-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση γράφεται και ως $2x^2 + x - 1 - 6 = \sqrt{2x^2 + x - 1}$, οπότε αν θέσουμε $\sqrt{2x^2 + x - 1} = \kappa \geq 0$, παίρνουμε

$$\kappa^2 - 6 = \kappa$$

$$\kappa^2 - \kappa - 6 = 0$$

Λύνουμε την εξίσωση και παίρνουμε $\kappa_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{matrix} \kappa_1 = 3, \text{ δεκτή} \\ \kappa_2 = -2, \text{ απορρίπτεται} \end{matrix}$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2 + x - 1} &= 3 \\ 2x^2 + x - 1 &= 9 \\ 2x^2 + x - 10 &= 0\end{aligned}$$

Με $\Delta = 81$ και λύσεις $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 9}{4} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -\frac{5}{2} \\ x_2 = 2 \end{matrix}$.

Από νωρίτερα έχουμε $x \in (-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$, συνεπώς και οι δύο λύσεις είναι αποδεκτές απαντήσεις.

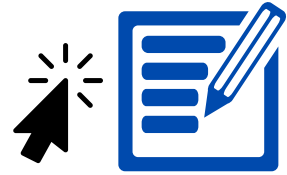


5

*εκθετική και λογαριθμική
συνάρτηση*



2. Λογάριθμοι



ΛΥΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τι ορίζουμε ως $\log_{\theta} a$ με $0 < a \neq 1$ και $\theta > 0$;

Ο $\log_{\theta} a$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον αριθμό a για να βρούμε τον αριθμό θ . Δηλαδή:

$$\log_{\theta} a = x \Leftrightarrow a^x = \theta, \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Π.χ.: } \log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 3^2 = 9$$

2. Ποια χαρακτηριστικά των λογαρίθμων προκύπτουν από τον ορισμό του;

Για $a > 0$, $a \neq 1$, $\theta > 0$ και $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a \theta} = \theta$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\text{Π.χ.: } \log_2 2^4 = 4, 2^{\log_2 5} = 5, \log_{50} 1 = 0, \log_7 7 = 1$$

3. Ποιες είναι οι ιδιότητες των λογαρίθμων;

Για $a > 0$, $a \neq 1$, $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει:

α. $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$, π.χ.: $\log_3(9 \cdot 27) = \log_3 9 + \log_3 27 = 2 + 3 = 5$

β. $\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$, π.χ.: $\log_2 \frac{16}{8} = \log_2 16 - \log_2 8 = 4 - 3 = 1$

γ. $\log_a \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_a \theta$, π.χ.: $\log_5 5^6 = 6 \log_5 5 = 6 \cdot 1 = 6$

4. Αποδείξεις Ιδιοτήτων:

Για $a > 0$, $a \neq 1$, $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$:

α. Για την ιδιότητα $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$:

Έστω ότι $\log_a \theta_1 = x_1$ και $\log_a \theta_2 = x_2$.

Τότε έχουμε $a^{x_1} = \theta_1$ και $a^{x_2} = \theta_2$.

Οπότε έχουμε: $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2$

$$a^{x_1+x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2$$

Και από τον ορισμό του λογαρίθμου θα είναι $\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = x_1 + x_2$, οπότε προκύπτει:

$$\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = x_1 + x_2 = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2, \text{ δηλαδή } \log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2.$$

β. Η ιδιότητα $\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$

Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω.

γ. Για την ιδιότητα $\log_a \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_a \theta$:

Έστω ότι $\log_a \theta = x$. Τότε θα είναι $a^x = \theta$ και $a^{\kappa x} = \theta^\kappa$.

Από τον ορισμό του λογαρίθμου παίρνουμε ότι $\log_a \theta^k = k \cdot x$, δηλαδή

$$\log_a \theta^k = k \cdot x = k \cdot \log_a \theta, \text{ δηλαδή } \boxed{\log_a \theta^k = k \cdot \log_a \theta}$$

5. Τι ονομάζουμε δεκαδικό λογάριθμο;

Δεκαδικός λογάριθμος λέγεται ο λογάριθμος που έχει βάση α το 10.

Γενικά γράφουμε $\log \theta$, που ισοδυναμεί με $\log_{10} \theta$. Από τον ορισμό του δεκαδικού λογαρίθμου παίρνουμε $\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$.

Π.χ.: $\log 100 = 2 \Leftrightarrow 10^2 = 100$

6. Τι ονομάζουμε φυσικό λογάριθμο;

Φυσικός λογάριθμος -ή νεπέριος- λέγεται ο λογάριθμος που έχει βάση τον αριθμό e .

Γενικά γράφουμε $\ln \theta$, που ισοδυναμεί με $\log_e \theta$. Από τον ορισμό του φυσικού λογαρίθμου παίρνουμε $\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$, $e \approx 2,71$.

Π.χ.: $\ln e^3 = 3 \ln e = 3$



Λυμένα Παραδείγματα



1. Να υπολογίσεις τους λογάριθμους:

α. $\log 0,01$

β. $\log_2 16$

γ. $\log_3 \frac{1}{9}$

Λύση:

α. $\log 0,01$, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $10^x = 0,01$, δηλαδή $10^x = 10^{-2} \Leftrightarrow x = -2 \Leftrightarrow \log 0,01 = -2$.

β. $\log_2 16$, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $2^x = 16$, δηλαδή $2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow \log_2 16 = 4$.

γ. $\log_3 \frac{1}{9}$, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $3^x = \frac{1}{9}$, δηλαδή $3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2 \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$.

2. Να βρεις για ποιο $x > 0$ ισχύει:

α. $\log x = 6$

β. $\log_2 x = -\frac{1}{2}$

γ. $\log_3 x = 0$



Λύση:

α. $\log x = 6$, αρκεί να υπολογίσουμε την δύναμη $10^6 = 1.000.000$ άρα $x = 1.000.000$.

β. $\log_2 x = -\frac{1}{2}$, αρκεί να υπολογίσουμε την δύναμη $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
άρα $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

γ. $\log_3 x = 0$, αρκεί να υπολογίσουμε την δύναμη $3^0 = 1$ άρα $x = 1$.

3. Να βρεις για ποιο $a > 0$ ισχύει:

α. $\log_a 32 = 5$

β. $\log_a 0,0001 = -4$

γ. $\log_a 7 = 1$

Λύση:

α. $\log_a 32 = 5$, αρκεί να βρούμε για ποιον αριθμό $a > 0$ ισχύει $a^5 = 32$, οπότε $a = 2$.

β. $\log_a 0,0001 = -4$, αρκεί να βρούμε για ποιον αριθμό $a > 0$ ισχύει $a^{-4} = 0,0001$, οπότε $a = 10$.

γ. $\log_a 7 = 1$, αρκεί να βρούμε για ποιον αριθμό $a > 0$ ισχύει $a^1 = 7$, οπότε $a = 7$.

4. Να αποδείξεις ότι: $\log_2 5 + 2\log_2 6 - \log_2 9 = \log_2 10 + 1$

Θα αξιοποιήσουμε τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

Έχουμε $\log_2 5 + 2\log_2 6 - \log_2 9 = \log_2 10 + 1$, οπότε παίρνουμε:

$$\log_2 5 + 2\log_2 6 - \log_2 9 = \log_2 10 + 1$$

$$\log_2 5 + \log_2 6^2 - \log_2 9 = \log_2 10 + 1$$

$$\log_2 5 + \log_2 36 - \log_2 9 = \log_2 10 + 1$$

$$\log_2 (5 \cdot 36) - \log_2 9 = \log_2 10 + 1$$

$$\log_2 180 - \log_2 9 = \log_2 10 + 1$$

$$\log_2 \frac{180}{9} = \log_2 10 + 1$$

$$\log_2 20 = \log_2 10 + 1, \text{ επειδή } \log_2 2 = 1 \text{ παίρνουμε:}$$

$$\log_2 20 = \log_2 10 + \log_2 2$$

$$\log_2 20 = \log_2 (10 \cdot 2)$$

$$\log_2 20 = \log_2 20, \text{ που ισχύει.}$$

ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΚΔΟΣΗΣ:
Πρόδρομος Μιχαλάκης

© ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΛΥΣΑΡΙ | LISARI.GR
& Πρόδρομος Μιχαλάκης



Πανόρμου 14 & Σμύρνης,
12242, Αιγάλεω
τηλ.: 210 5982 614
e-mail: info@lisari.gr
www.lisari.gr

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται από τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και από τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η χωρίς γραπτή άδεια του εκδότη κατά οποιονδήποτε τρόπο ή οποιοδήποτε μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

